

Задачи к мини-курсу «Элементарное введение в интегральную и комбинаторную геометрию»

Д. В. Гринёв

Математический факультет ЯрГУ им. П.Г.Демидова

Мини-курс «Центра Интегрируемых Систем» ЯрГУ им.
П.Г.Демидова
Ярославль 30 и 31 октября 2020

Задачи на разбиения множеств

- Пусть произвольное ограниченное множество в n -мерном пространстве разбивается на частей меньшего диаметра $f(n)$. Докажите, что величина $f(n)$ не изменится, если вместо произвольных ограниченных множеств разбивать произвольные множества диаметра 1.
- Докажите, что квадрат со стороной 1 нельзя разбить на 3 части диаметра меньше 1.

Задачи на свойства покрывающих систем

- Назовем универсальной покрывающей системой на плоскости любую совокупность множеств G_α , обладающих тем свойством, что для всякого F , $\text{diam}F = 1$, существует движение, переводящее F внутрь хотя бы одного из множеств G_α .
- Возьмите на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
 - Докажите, что он является универсальной покрывающей системой на плоскости.
 - Выберите произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ — также универсальная покрывающая система на плоскости.

Задачи по теореме Борсука

- Докажите следующее утверждение: в качестве универсальной покрывки для множеств диаметра 1 на плоскости можно взять правильный шестиугольник, расстояние между параллельными сторонами которого равно единице.
- Не ссылаясь на предыдущее утверждение, докажите, что всякий многоугольник на плоскости может быть разбит на три части меньшего диаметра.
- Придумайте универсальную покрывку для множеств диаметра 1 на плоскости, которая имела бы как можно меньшую площадь.