

Листок 1 с задачами по мини-курсу «Элементарное введение в стохастическую геометрию фракталов»

Д. В. Гринёв

Математический факультет, кафедра нелинейной динамики

Мини-курс «Центра Интегрируемых Систем» ЯрГУ им.
П.Г.Демидова
Ярославль 2021

Множество Кантора и регулярные фракталы

- Множество $M \subset R^n$ имеет меру *ноль*, если оно может быть покрыто семейством открытых множеств $\{G_{\alpha,k}, \alpha \in A, k \in Z\}$ таких, что выполнены соотношения:

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_{\alpha,k}$$
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in A} S(G_{\alpha,k}) = 0$$

где $s(G)$ является площадью множества G в пространстве R^n .

- Доказать, что последовательность $\{\frac{2}{3^i}, i = 1, 2, \dots\}$ на отрезке $[0, 1]$ имеет меру *ноль*.

Множество Кантора и регулярные фракталы

Докажите следующие свойства множества Кантора K :

- Мощность K равна континууму.
- Множество K имеет меру *ноль*.
- Пересечение $[a, b] \cap K$ для любого сколь угодно малого отрезка $[a, b] \in [0, 1]$ будет подобно K .

Множество Кантора и регулярные фракталы

- Рассмотрим множество Γ и уменьшим его линейный размер в L раз. Пусть в результате такого преобразования имеется N множеств G_i , подобных исходному множеству Γ и таких, что выполнены соотношения: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N G_i$ и $N = L^D$
- Показатель степени D называется *размерностью подобия*.
- Найдите размерность подобия множества Кантора K .

Множество Кантора и регулярные фракталы

- Рассмотрим равносторонний треугольник и построим в нём все средние линии. Эти средние линии делят треугольник на четыре треугольника, подобных исходному. Выбросим внутренность среднего маленького треугольника и рассмотрим объединение трёх оставшихся. На следующем шаге сделаем такую же процедуру с каждым из трёх оставшихся треугольников и получим девять треугольников, подобных исходному. Продолжим этот процесс до бесконечности и в пределе получим некое множество T .
- Найдите длину границы и площадь полученного предельного множества T .
- Найдите размерность подобия полученного предельного множества T .

Множество Кантора и регулярные фракталы

- Рассмотрим куб с единичным ребром и поделим его на двадцать семь одинаковых кубиков. Выбросим центральный кубик и восемь угловых. На следующем шаге сделаем такую же процедуру с каждым из восемнадцати оставшихся кубиков. Продолжим этот процесс до бесконечности и в пределе получим некое множество M .
- Найдите длину границы и объём полученного предельного множества M .
- Найдите размерность подобия полученного предельного множества M .