1

Классификация и построение дифференциальных уравнений

1. Цели

Изучив эту главу вы будете уметь:

1. классифицировать дифференциальные уравнения по порядку, линейности и автономности;

2. различать решения дифференциальных уравнений по типу (частное/общее);

3. узнавать общий вид решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка;

4. строить дифференциальное уравнение по заданной функции.

2. Линейно независимые функции

Линейной комбинацией функций $f(x)$ и $g(x)$ называется выражение следующего вида:

$$c_1 f(x) + c_2 g(x),$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (или, вообще, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$). Кроме того, *линейной комбинацией* функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ называется выражение

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x),$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Линейная независимость двух функций:

Напоминаем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *линейно независимыми,* если единственная их линейная комбинация, равная нулю, тривиальна. То есть:

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0, \;\; c_i \in \mathbb{R} \;\Longrightarrow\; c_1 = c_2 = 0.$$

Например, функции $f(x) = x$ и $g(x) = 3x$, являются линейно зависимыми, так как

$$\exists\, c_1 = -3,\ c_2 = 1:\quad c_1\, f(x) + c_2\, g(x) = -3\,x + 3\,x = 0,\quad \text{и}\, c_i \neq 0,\ i = 1, 2.$$

Функции $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \sin x$, являются линейно независимыми, так как

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0 \implies c_1 = c_2 = 0$$

(не существуют действительные числа c_1 и c_2 отличные от ноля такие, что $c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0$).

Но, функции $f(x) = \sin^2 x$ и $g(x) = \cos^2 x - 1$, являются линейно зависимыми, так как

$$\exists\, c_1,\, c_2 \neq 0,\ c_1 = c_2 = 1:\quad c_1\, f(x) + c_2\, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0.$$

Линейная независимость n функций:

Ф-и $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ называются *линейно независимыми,* если единственна их линейная комбинация, равная нулю, тривиальна. То есть:

$$c_1\, f_1(x) + c_2\, f_2(x) + \ldots + c_n\, f_n(x) = 0,\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ \ldots,\ n \implies c_1 = c_2 =\ldots = c_n = 0.$$

3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Вы уже знаете как решать некоторые алгебраические уравнения. Например,

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \tag{1.1}$$

имеет решения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}. \tag{1.2}$$

В этом уравнении, неизвестное количество — переменная x. Конечно, мы не можем решить все алгебраические уравнения, так как это зависит от их порядка и линейности. Уравнение (1.1) — второго порядка, линейное.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) — это уравнение, где неизвестным количеством является функция (одной переменной), которая входит в уравнение со своими производными.

Мы уже увидели простые дифференциальные уравнения в Мат. анализе. Например, самое простое дифференциальное уравнение:

$$y' = 0,\quad y = y(x). \tag{1.3}$$

В уравнении (1.3) независимая переменная — x, а зависимая переменная y. Для того, чтобы решить (1.3), нам нужно интегрировать обе части:

$$\int y'\,dx = \int 0\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c}. \tag{1.4}$$

Как мы увидим позже, (1.3) — это уравнение 1-го порядка, линейное, автономное, и (1.4) является *общим решением* уравнения (1.3).

Другим примером ОДУ, который мы увидели в Мат. анализе, является следующий:
Найти функцию $f(x)$, для которой

$$f'' = \sin x + 2\pi, \tag{1.5}$$

и график которой имеет градиент -1 в точке $A(0,\ 1)$.

Для того, чтобы решить эту проблему, нужно, в начале, интегрировать 2 раза:

$$\Rightarrow\ f' = \int (\sin x + 2\pi)\,dx = -\cos x + 2\pi x + c_1$$

$$\Rightarrow\ f = -\sin x + \pi x^2 + c_1 x + c_2. \tag{1.6}$$

Сейчас, нужно определить параметры c_1 и c_2. Для этого, нам нужны два условия: функция имеет градиент -1 в $A(0,\ 1)$, то есть $f'(0) = -1$, и ф-я проходит через точку $A(0,\ 1)$, поэтому $f(0) = 1$.

$$f(0) = 1\ \Rightarrow\ 0 + c_2 = 1\ \Rightarrow\ c_2 = 1.$$

$$f'(0) = -1\ \Rightarrow\ -1 + c_1 = -1\ \Rightarrow\ c_1 = 0.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = -\sin x + \pi x^2 + 1. \tag{1.7}$$

Как мы увидим позже, (1.5) — это уравнение 2-го порядка, линейное, неавтономное. Кроме того, (1.6) является *общим решением* уравнения (1.5) и (1.7) является решением начальной задачи

$$\begin{cases} f'' = \sin x + 2\pi, \\ f(0) = 1, \\ f'(0) = -1. \end{cases}$$

Очень важно понять, что как и в случае алгебраических уравнений:

Мы не можем решить все дифференциальные уравнения аналитически!

Для некоторых классов дифференциальных уравнений у нас есть методы решения аналитически, которые мы увидим позже. Для остальных, можно использовать численные, или другие, методы.

4. Классификация ОДУ

ОДУ классифицируем по порядку, линейности и автономии.

■ **Порядок**: Порядок ОДУ — это порядок наивысшей (старшей) производной, входящей в дифференциальное уравнение.

■ **Линейность**: ОДУ называется линейным, если не имеет никаких произведений или степеней зависимой переменной и ее производных. Значит, линейная ОДУ не может иметь члены вида y^2, $\sqrt{y}$, $y \cdot y'$, $\sin y$ и т.д. А можно, конечно, иметь степени независимой переменной.

■ **Автономность**: ОДУ называется автономным, если независимая переменная не входит явно в уравнение.

Пример 2.1

1. $y' = 4\,x^7$: Здесь, зависимая переменная — y, и независимая — x.
Это ОДУ 1-го порядка, линейное, не автономное (x входит явно).

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\,\frac{dy}{dx} + 12\,y = 5\cos x$: Здесь, зависимая переменная — y, и независимая — x.
Это ОДУ 2-го порядка, линейное, не автономное.

3. $u'' + 2\,(u')^5 = 75\,x^3$: Здесь, зависимая переменная — u, и независимая — x.
Это ОДУ 2-го порядка, нелинейное (потому что $(u')^5$), не автономное.

4. $v\,\frac{dv}{dt} + 1 = 0$: Здесь, зависимая переменная — v, и независимая — t.
Это ОДУ 1-го порядка, нелинейное, автономное.

5. $v\,\frac{dv}{dt} + 1 = 0$: Здесь, зависимая переменная — v, и независимая — t.
Это ОДУ 1-го порядка, нелинейное, автономное.

6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = 7\,x$: Здесь, зависимая переменная — y, и независимая — x.
Это ОДУ 1-го порядка, нелинейное, неавтономное.

7. $(u'')^2 + \sqrt{u} = 4$: Здесь, зависимая переменная — u, и независимая — x.
Это ОДУ 2-го порядка, нелинейное, неавтономное.

5. Частное и общее решение ОДУ

Определение 3.1 *Каждая функция, которая удовлетворяет данному ОДУ,* *называется* ***частным решением*** *(или просто решением) ОДУ. А если решение содержит все решения ОДУ без исключения, называется* ***общим решением****.*

Например, пусть

$$y'' = 0. \tag{1.8}$$

Все функции

$$y_1 = x, \quad y_2 = x - 1, \quad y_3 = 3x + \sqrt{2}, \tag{1.9}$$

удовлетворяют ОДУ (1.8), так как $y_1'' = 0$, $y_2'' = 0$, и $y_3'' = 0$. Поэтому, все ф-и (1.9) являются *частными решениями* ОДУ (1.8). Теперь, интегрируем (1.8) 2 раза:

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; y' = c_1 \;\Rightarrow\; y = c_1 x + c_2,\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Но, $c_1 x + c_2$ содержит все ф-и y_1, y_2, y_3, для особенного выбора параметров c_1 и c_2:

Для $c_1 = 1,\; c_2 = 0:\;\; y = 1 \cdot x + 0 = x = y_1;$

Для $c_1 = 1,\; c_2 = -1:\;\; y = 1 \cdot x + -1 = x - 1 = y_2;$

Для $c_1 = 3,\; c_2 = \sqrt{2}:\;\; y = 3x + \sqrt{2} = y_3.$

Вообще,

$$y = c_1 x + c_2,$$

содержит все возможные решения ОДУ (1.8), для особенного выбора параметров c_1 и c_2, и поэтому является *общим решением* ОДУ (1.8).

Заметим, что общее решение ОДУ 2-го порядка (1.8), имеет 2 параметра. Это потому, что нужно интегрировать 2-раза, чтобы избавится от производной 2-го порядка.

Общий вид ОДУ n-го порядка, и его общее решение

Общий вид ОДУ 2-го порядка:

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{1.10}$$

и общее решение ОДУ (1.10) имеет вид

$$y = f(x, c_1, c_2), \tag{1.11}$$

с двумя параметрами. Мы увидим в следующей главе, что иногда не можем написать общее решение в явном виде, как в (1.11), но это возможно писать его в неявном виде, как

$$f(y, x, c_1, c_2) = 0 \tag{1.12}$$

Вообще, общий вид ОДУ n-го порядка:

$$F\left(y, y', y'', \ \ldots , y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.13}$$

и общее решение ОДУ (1.10) имеет вид

$$y = f(x, c_1, c_2, \ \ldots , \ c_n), \tag{1.14}$$

с n параметрами. Это потому, что, для того, чтобы найти решение ОДУ n-го порядка, нужно интегрировать n раз. В том случаи, если не можем писать наше решение в явном виде (1.14), пишем

$$f(y, x, c_1, c_2, \ \ldots , \ c_n) = 0 \tag{1.15}$$

Вид линейного ОДУ n-го порядка, и его общее решение

Линейное ОДУ 2-го порядка имеет общий вид

$$a(x)\, y''\, (x) + b(x)\, y'\, (x) + c(x)\, y(x) = d(x). \tag{1.16}$$

Если $d(x) = 0$, то (1.16) называется ***однородным***. А если $d(x) \neq 0$, называется ***неоднородным.***

Предложение 3.1 *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимые решения соответствующего однородного ОДУ (1.16),*

$$a(x)\, y''\, (x) + b(x)\, y'\, (x) + c(x)\, y(x) = 0, \tag{1.17}$$

то

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x). \tag{1.18}$$

является общим решением однородного ОДУ (1.17).

Доказательство:

Докажем, что $y(x)$ удовлетворяет (1.16):

$$\begin{gathered} a(x)\, (c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x))'' + b(x)\, (c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x))' + c(x)\, (c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)) = \\ = c_1 (a(x)\, y_1{}''\, (x) + b(x)\, y'\, (x) + c(x)) + c_2\, c_1 (a(x)\, y_1{}''\, (x) + b(x)\, y'\, (x) + c(x)) = \\ = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{gathered}$$

так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения однородного ОДУ (1.17). Поэтому,

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x).$$

так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения однородного ОДУ (1.17). Поэтому, (1.18) является решением ОДУ (1.17). Кроме того, является общим решением ОДУ (1.16) потому, что содержит 2 параметра. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не были линейно независимые, то $y(x)$ бы зависел только от одного параметра (подумайте почему!).

Таким образом ОДУ n-го порядка имеет общий вид

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x) \tag{1.19}$$

Если $b(x) = 0$, то (1.16) называется ***однородным***. А если $b(x) \neq 0$, называется ***неоднородным.***

Предложение 3.2 *Если $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейно независимые решения соответствующего однородного ОДУ (1.19),*

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0 \tag{1.20}$$

то

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) \tag{1.21}$$

является общим решением однородного ОДУ (1.20).

Доказательство:

Как доказательство предложения 3.1.

6. Построить ОДУ из данной функции

Демонстрируем метод с помощью примеров.

→ Пусть

$$y(x) = c\, e^{2x} + x^2. \tag{1.22}$$

Так как общее решение (1.22) имеет 1 параметр, c, понимаем, что нужно построить ОДУ 1-го порядка. Для этого, нужно дифференцировать один раз:

$$y'(x) = 2\, c\, e^{2x} + 2\, x. \tag{1.23}$$

ОДУ само не может иметь параметр, так как параметры следуют из интегрирования. Поэтому, нужно избавиться от параметра c в (1.23). Из (1.22) следует:

$$c\, e^{2x} = y - x^2. \tag{1.24}$$

Поставляем "с e^{2x}" в (1.23):

$$y' = 2\left(y - x^2\right) + 2x,$$

$$\Rightarrow \boxed{y' - 2y = 2x(1-x).} \tag{1.25}$$

Мы построили ОДУ 1-го порядка, линейное, неавтономное, неоднородное.

→ Пусть

$$y(x) = \sqrt{x^3 + c} \tag{1.26}$$

Общее решение (1.26) имеет 1 параметр, c, поэтому нужно построить ОДУ 1-го порядка. Для этого, нужно дифференцировать один раз:

$$y'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+c}}. \tag{1.27}$$

Сейчас, нужно избавится от c. Замечаем, что из (1.27)

$$\sqrt{x^3+c} = \frac{3x^2}{2y'}, \tag{1.28}$$

и подставляем $\sqrt{x^3+c}$ в (1.26)

$$y(x) = \frac{3x^2}{2y'},$$

$$\Rightarrow \boxed{y\,y' = \frac{3}{2}x^2.} \tag{1.29}$$

Мы построили ОДУ 1-го порядка, нелинейное.

→ Пусть

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2. \tag{1.30}$$

1-й способ:

Общее решение (1.30) имеет 2 параметра, c_1 и c_2, поэтому нужно построить ОДУ 2-го порядка. Для этого, нужно дифференцировать 2 раза.

$$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2x, \tag{1.31}$$

$$y''(x) = -c_1 \cos x - c_2 \sin x + 2. \tag{1.32}$$

Замечаем, что из (1.30)

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x = y - x^2 \tag{1.33}$$

$$(1.32) \overset{(1.30)}{\Longrightarrow} \quad y'' = -y + x^2 + 2,$$

$$\Longrightarrow \boxed{y'' + y = x^2 + 2.}$$

Мы построили ОДУ 2-го порядка, линейное, неоднородное.

2-й способ:

Иногда это не так легко избавится от двух параметров в случаи построения ОДУ 2-го порядка. Но, можем, использовать следующий метод: Пусть ОДУ, которое мы хотим построить, будет вида

$$y'' + A\,y' + B\,y = C, \tag{1.34}$$

где, наверно, A и B ф-и от x. Мы предлагаем вид (1.34) потому, что видим в общим решении, что есть линейная комбинация ф-й $\sin x$ и $\cos x$, которые являются линейно независимыми. Поэтому, понимаем, что (1.34) является решением линейного ОДУ.

Выражение:

$$\begin{aligned} y'' + A\,y' + B\,y &= -c_1 \cos x - c_2 \sin x + 2 + A\,(-c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2\,x) \\ &\quad + B\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2\right) \\ &= c_1 \underbrace{(-\cos x - A \sin x + B \cos x)} + c_2 \underbrace{(-\sin x + A \cos x + B \sin x)} \\ &\quad + 2 + 2\,A\,x + B\,x^2. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Так как мы хотим избавиться от параметров c_1 и c_2, приравняем то, что в скобках к нулю:

$$\begin{cases} -\cos x - A \sin x + B \cos x = 0 \\ -\sin x + A \cos x + B \sin x = 0 \end{cases}, \tag{1.36}$$

и находим A и B такие, что это система (1.36) была справедлива. Другими словами, нам нужно найти A и B, такие, что

$$\begin{cases} -A \sin x + (B-1) \cos x = 0 \\ A \cos x + (B-1) \sin x = 0 \end{cases}. \tag{1.37}$$

Сейчас, $\sin x$ и $\cos x$ линейно независимы функции, поэтому из (1.37) следует, что

$$A = 0,\; B - 1 = 0 \;\Rightarrow\; A = 0,\; B = 1. \tag{1.38}$$

Значит, что для $A = 0$ и $B = 1$, выражения в скобках в (1.35) равняются нулю, и поэтому, (1.35) перепишем, как

$$y'' + 0 \cdot y' + 1\,y = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + 2 + 2 \cdot 0 \cdot x + x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + y = x^2 + 2.} \tag{1.39}$$