2

Решение ОДУ 1-го порядка: ОДУ с разделяющимися переменными, линейные ОДУ

1. Цели

В конце этой главы вы будете уметь:

1. решать ОДУ с разделяющимися переменными;

2. находить интегрирующий множитель или множитель Эйлера;

2. решать линейные ОДУ 1-го порядка;

3. решать соответствующие им начальные задачи.

2. ОДУ с разделяющимися переменными;

Мы уже знакомы с общим видом ОДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

которое иногда можно привести к виду

$$y' = G(x, y) \tag{1.2}$$

ОДУ 1-го порядка (1.2) называется ОДУ с разделяющимися переменными, если $G(x, y) = f(x)\, g(y)$. То есть, уравнение имеет следующий вид:

$$\boxed{y' = f(x)\, g(y),} \tag{1.3}$$

где в правой части переменные “x” и “y” разделяются: Правило разделения переменных:

Мухи отдельно, котлеты отдельно!

2.1 Решение ОДУ с разделяющимися переменными

Когда мы говорим “решим ОДУ”, то мы имеем в виду, что “найдем общее решение ОДУ”. Таким образом решение ОДУ (1.3) состоит из 4-х шагов.

Шаг 1: Переносим все “y” налево, все “x” направо.

$$\frac{1}{g(y)}\,y' = f(x). \tag{1.4}$$

Шаг 2: Интегрируем по x обе части:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,y'\,dx = \int f(x)\,dx + c.$$

Шаг 3: Замечаем, что $y'\,dx$ является дифференциалом ф-и $y(x)$: $dy = \frac{dy}{dx}\,dx = y'\,dx$.

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + c.$$

Шаг 4: Вычисляем интегралы, и решаем, если возможно, полученное алгебраическое уравнение для y.

$$y = f(x,\ c),$$

которое является *общим решением* ОДУ (1.3). Если мы не можем решить его явно для y, то получаем уравнение вида

$$G(y,\ x,\ c) = 0,$$

которое является *общим решением* ОДУ (1.3) в **неявном** виде.

Пример 2.1 Решить ОДУ

$$y' = x\,y^{-1}. \tag{1.5}$$

Это ОДУ 1-го порядка, нелинейное, неавтономное. Кроме того, (1.9) является ОДУ с разделяющимися переменными.

***Шаг 1*:**

$$y\,y' = x\,.$$

***Шаг 2*:**

$$\int y\,\underbrace{y'\,dx}_{dy} = \int x\,dx + c.$$

***Шаг 3*:**

$$\int y\,dy = \int x\,dx + c.$$

***Шаг 4*:**

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{x^2 + c_1}\,,\; c_1 := 2\,c.$$

Это общее решение ОДУ (1.5). ■

Пример 2.2 Решить ОДУ

$$y' = x^{-1}\,y. \tag{1.6}$$

Это ОДУ 1-го порядка, линейное, неавтономное. Кроме того, (1.9) является ОДУ с разделяющимися переменными.

***Шаг 1*:**

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x}.$$

***Шаг 2*:**

$$\int \frac{1}{y}y'\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + c.$$

***Шаг 3*:**

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx + c.$$

***Шаг 4*:**

$$\ln|y| = \ln\left|x\right| + c \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{y}{x}\right| = c \;\Rightarrow\; \left|\frac{y}{x}\right| = e^c \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \underbrace{\pm e^c}_{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C\,x,\quad C \in \mathbb{R}}. \tag{1.7}$$

Это общее решение ОДУ (1.6). ■

2.2 Начальная задача

На примере 2.2, общее решение (1.7) является однопараметрическим семейством ф-й (в этом случаи, прямых), с параметром C. Каждый член этого семейства удовлетворяет ОДУ (1.6). То есть, для каждого выбора параматра C, у нас частное решение ОДУ (1.6):

При $C = 1$, $y = x$;

При $C = 2$, $y = 2x$;

При $C = -1$, $y = -x$,

и т.д., как в рисунке 2.1

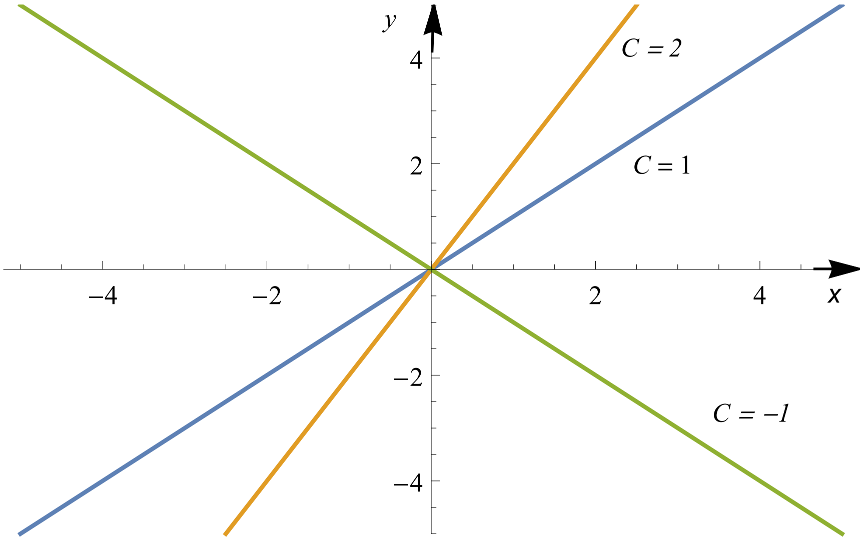

Рис. 2.1 Решения ОДУ (1.6), для разных значений параметра C.

Давайте, сейчас, найдем особенное решение ОДУ, которое входит через точку $A\left(\sqrt{2}, 2\right)$. Другими словами, найти решение $y = y(x)$, которое удовлетворяет условие $y\left(\sqrt{2}\right) = 2$. У нас есть:

$$y\left(\sqrt{2}\right) = 2 \Rightarrow C \cdot \sqrt{2} = 2 \Rightarrow C = \sqrt{2}.$$

То есть, ф-я

$$y = \sqrt{2}\, x,$$

является решением *начальной задачи.*

$$\begin{cases} y' = x^{-1} y \\ y\left(\sqrt{2}\right) = 2 \end{cases}.$$

Вообще, следующая задача

$$\begin{cases} y' = f(x)\,g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

называется *начальной задачей*, и условие $y(x_0) = y_0$ называется *начальным значением*.

3. Линейные ОДУ 1-го порядка

Общий вид ОДУ 1-го порядка:

$$a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x), \tag{1.8}$$

или, проще,

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x),} \tag{1.9}$$

где $p(x) := b(x)\,/\,a(x)$ и $q(x) := c(x)\,/\,a(x)$.

Замечание 3.1 Если $q(x) = 0$, то ОДУ (1.9) является ОДУ с разделяющимися переменными.

3.1 Решение ОДУ 1-го порядка

Умножаем обе части (1.9) на ф-ю $R(x)$:

$$R(x)\,y' + \underbrace{R(x)\,p(x)}\,y = R(x)\,q(x) \tag{1.10}$$

Мы хотим найти ф-ю $R(x)$ такую, что левая часть (1.10):

$$R'(x) = R(x)\,p(x), \tag{1.11}$$

которое является ОДУ с разделяющимися переменными.

Тогда мы можем переписать (1.10), как

$$R(x)\,y' + R'(x)\,y = R(x)\,q(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dx}(R(x)\cdot y) = R(x)\,q(x). \tag{1.12}$$

Сейчас, интегрируем ОДУ (1.12) по x

$$\int \frac{d}{dx}(R(x)\cdot y)\,dx = \int R(x)\,q(x)\,dx + c,$$

или

$$\int (R(x) \cdot y)' \, dx = \int R(x) \, q(x) \, dx + c,$$

$$\Rightarrow \; R(x) \cdot y = \int R(x) \, q(x) \, dx + c.$$

которое можем решить для $y(x)$:

$$y(x) = \frac{1}{R(x)} \left(\int R(x) \, q(x) \, dx + c \right),$$

которое является общим решением линейного ОДУ 1-го порядка.

Осталось найти для какой ф-и, $R(x)$, это возможно. То есть, осталось найти ф-ю $R(x)$, которая удовлетворяет (1.11):

$$R'(x) = R(x) \, p(x)$$

$$\Rightarrow \; \frac{dR}{dx} = R \, p(x)$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} = p(x)$$

$$\Rightarrow \; \int \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \, dx = \int \frac{1}{R} \, dR = \int p(x) \, dx + c$$

$$\Rightarrow \; \ln |R| = \int p(x) \, dx + c$$

$$\Rightarrow \; R = \pm e^{\int p(x) \, dx + c} = c_1 \, e^{\int p(x) \, dx}.$$

Не надо рассматривать параметр c_1, так как если умножим обе части ОДУ (1.9) на R, параметр сокращается. Ф-я $R(x)$ называется ***интегрирующим множителем***, или ***множителем Эйлера***.

Поэтому, решение линейного ОДУ 1-го порядка

$$y' + p(x) \, y = q(x), \tag{1.13}$$

состоит из 5-х шагов.

Шаг 1: Вычисляем множитель Эйлера:

$$R(x) = e^{\int p(x) \, dx}.$$

Шаг 2: Умножаем обе части (1.13) на $R(x)$:

$$R(x)\,y' + R(x)\,p(x)\,y = R(x)\,q(x). \tag{1.14}$$

Шаг 3: Замечаем, что левую часть (1.14) можно переписать, как

$$(R(x)\cdot y(x))' = R(x)\,q(x). \tag{1.15}$$

Шаг 4: Интегрируем обе части (1.15):

$$R(x)\cdot y(x) = \int R(x)\,q(x)\,dx + c. \tag{1.16}$$

Шаг 5: Решаем (1.16) для y

$$y(x) = \frac{1}{R(x)}\left(\int R(x)\,q(x)\,dx + c\right), \tag{1.17}$$

и вычисляем интеграл $\int R(x)\,q(x)\,dx$.

■

Пример 3.1 Найти общее решение ОДУ

$$y' - x\,y = x. \tag{1.18}$$

Решение:

Шаг 1: Вычисляем множитель Эйлера:

$$R(x) = e^{-\int x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Шаг 2: Умножаем обе части (1.18) на $e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\,y' - x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,y = e^{-\frac{x^2}{2}}\,x. \tag{1.19}$$

Шаг 3: Замечаем, что левую часть (1.19) можно переписать, как

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot y(x)\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}\,x. \tag{1.20}$$

Шаг 4: Интегрируем обе части (1.20):

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot y(x) = \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,x\,dx + c. \tag{1.21}$$

$$I = \int e^{-\frac{x^2}{2}} x\,dx = -\int e^u\,du = -e^u = -e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$u = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -x \Rightarrow x\,dx = -du$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c. \qquad (1.22)$$

Шаг 5: Решаем (1.16) для y

$$\boxed{y(x) = c\,e^{-\frac{x^2}{2}} - 1,} \qquad (1.23)$$

которое является общим решением ОДУ (1.18). ■

Пример 3.2 Найти общее решение ОДУ

$$y' = \frac{y}{x} + 1. \qquad (1.24)$$

Решение:

В начале нужно перевести ОДУ (1.24) в вид ОДУ (1.9):

$$y' - \frac{1}{x}y = 1. \qquad (1.25)$$

Шаг 1: Вычисляем множитель Эйлера:

$$R(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Шаг 2: Умножаем обе части (1.25) на $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}. \qquad (1.26)$$

Шаг 3: Замечаем, что левую часть (1.26) можно переписать, как

$$\left(\frac{1}{x} \cdot y\right)' = \frac{1}{x}. \qquad (1.27)$$

Шаг 4: Интегрируем обе части (1.27):

$$\frac{1}{x} \cdot y = \int \frac{1}{x} dx + c = \ln|x| + c. \tag{1.28}$$

Шаг 5: Решаем (1.28) для *y*

$$\boxed{y = x(\ln|x| + c),} \tag{1.29}$$

которое является общим решением ОДУ (1.18). ■

Начальная задача

Если на примере 3.2 мы хотели найти решение начальной задачи

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} y + 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}, \tag{1.30}$$

то есть, найти решение которое входит через точку (1, 0).

Как мы увидели, ОДУ $y' = \frac{1}{x} y + 1$ имеет однопараметрическое семейство решений:

$$y = x(\ln|x| + c), \tag{1.31}$$

с параметром *c*, как на рисунке 3.1.

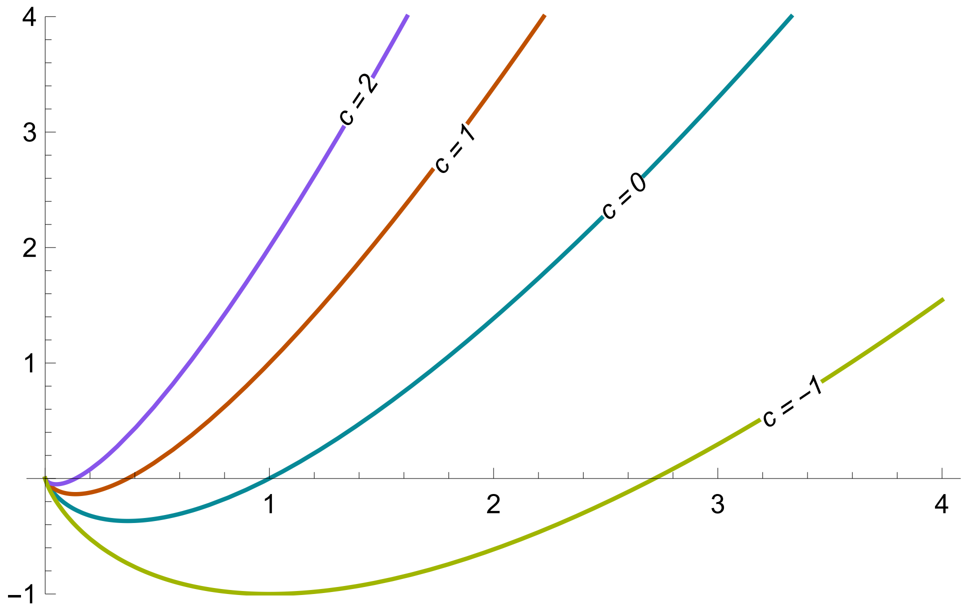

Рис. 2.1 Решения ОДУ (1.6), для разных значений параметра *C*.

Для решение, которое проходит через (1, 0):

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; 1 \cdot (0 + c) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0,$$

$$\Rightarrow\ y = x\ln|x|, \tag{1.32}$$

которое является решением начальной задачи (1.30).

4. Линейные ОДУ 1-го порядка, где неоднородный член является кусочно-гладкой функцией

Пусть ОДУ 1-го порядка

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{1.33}$$

где $q(x)$

$$q(x) := \begin{cases} f_1(x), & x \le x_0 \\ f_2(x), & x \ge x_0 \end{cases}. \tag{1.34}$$

Как его решить?

→ Решаем (1.33), строго для $x < x_0$. То есть, решаем ОДУ

$$y' + p(x)\,y = f_1(x)$$

Общее решение будет иметь вид

$$y(x) = g(x,\ c_1).$$

→ Решаем (1.33), строго для $x > x_0$. То есть, решаем ОДУ

$$y' + p(x)\,y = f_2(x)$$

Общее решение будет иметь вид

$$y(x) = h(x,\ c_2).$$

Получается, что общим решением ОДУ является следующее выражение

$$y(x) = \begin{cases} g(x,\ c_1), & x < x_0 \\ h(x,\ c_2), & x > x_0 \end{cases}. \tag{1.35}$$

Общее решение ОДУ 1-го порядка должно иметь только 1 параметр!

Поскольку $y(x)$ — дифференцируема в точке x_0, оно должно быть и непрерывной ф-ей в этой точке. То есть,

$$\lim_{x\to x_0^-} y(x) = \lim_{x\to x_0^+} y(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} g(x,\, c_1) = \lim_{x\to x_0} h(x,\, c_2).$$

Последнее уравнение является отношением между параметрами c_1 и c_2. Поэтому мы можем определить один из параметров с точки зрения второго, и общее решение будет содержать только один параметр, и будет непрерывным.

Пример 4.1 Найти общее решение ОДУ

$$y' - \frac{1}{x-1} y = \begin{cases} x-1, & x \le 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}. \tag{1.36}$$

→ Для $x < 2$,

$$y' - \frac{1}{x-1} y = x - 1. \tag{1.37}$$

Интегрирующий множитель Эйлера:

$$p(x) = \frac{-1}{x-1} \;\Rightarrow\; R(x) = e^{-\int \frac{1}{x-1}dx} = e^{-\ln(x-1)} = e^{\ln(x-1)^{-1}} = (x-1)^{-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Умножаем обе части ОДУ (1.37) на $R(x)$:

$$\frac{1}{x-1} y' - \frac{1}{(x-1)^2} y = 1.$$

Замечаем, что левая часть этой уравнения может быть переписана как

$$\left(\frac{1}{x-1} y\right)' = 1.$$

Интегрируем по x:

$$\frac{1}{x-1} y = x + c_1.$$

Решаем для y:

$$y = (x-1)\,(x + c_1),$$

это выражение является общим решением ОДУ (1.37).

→ Для $x > 2$,

$$y' - \frac{1}{x-1} y = x^2 - 3. \tag{1.38}$$

Интегрирующий множитель Эйлера, как раньше:

$$R(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Умножаем обе части ОДУ (1.37) на $R(x)$:

$$\frac{1}{x-1}y' - \frac{1}{(x-1)^2}y = \frac{x^2-3}{x-1}.$$

Замечаем, что левая часть этой уравнения может быть переписана как

$$\left(\frac{1}{x-1}y\right)' = \frac{x^2-3}{x-1}.$$

Интегрируем по x:

$$\frac{1}{x-1}y = \int \frac{x^2-3}{x-1}\,dx + c_2.$$

Вычисляем интеграл

$$I = \int \frac{x^2-3}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2-1-2}{x-1}\,dx = \int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$
$$= \int (x+1)\,dx - 2\ln(x-1) = x^2 + x - 2\ln(x-1).$$

Поэтому,

$$\frac{1}{x-1}y = x^2 + x - 2\ln(x-1) + c_2.$$

Решаем для $y = y(x)$

$$y(x) = (x-1)\left[x^2 + x - 2\ln(x-1) + c_2\right],$$

которое является общим решением ОДУ (1.38).

Наконец-то, для ОДУ (1.36), у нас есть

$$y(x) = \begin{cases} (x-1)\,(x+c_1), & x < 2 \\ (x-1)\left[x^2 + x - 2\ln(x-1) + c_2\right], & x > 2 \end{cases}.$$

Функция $y(x)$ должна быть непрерывной в точке $x = 2$. То есть,

$$\lim_{x\to 2^-} y(x) = \lim_{x\to 2^+} y(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 2}(x-1)\,(x+c_1) = \lim_{x\to 2}(x-1)\left[x^2 + x - 2\ln(x-1) + c_2\right]$$

$$\Rightarrow\; 2 + c_1 = 4 + 2 - 2\cdot 0 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = c_1 - 4.$$

Поэтому,

$$y(x) = \begin{cases} (x-1)\,(x+c_1), & x < 2 \\ (x-1)\left[x^2 + x - 2\ln(x-1) + c_1 - 4\right], & x > 2 \end{cases},$$

является общим решением ОДУ (1.36).