3

Нелинейные ОДУ 1-го порядка: однородные, типа Бернулли и Риккати

1. Цели

В конце этой главы вы будете уметь:

1. что такое однородное неленейное ОДУ и как найти общее его решение;

2. как решать ОДУ типа Бернулли;

3. как решать ОДУ типа Риккати;

4. что такое ОДУ в полных дифференциалах.

2. Однородное нелинейное ОДУ 1-го порядка

Пусть нелинейное ОДУ 1-го порядка общего вида

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \tag{1.1}$$

ОДУ (1.1) называется *однородным*, если мы можем его переписать в следующим виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.2}$$

2.1 Общее решение однородного ОДУ

Ставим $u = \frac{y}{x}$. Поэтому,

$$y = x \cdot u \ \Rightarrow\ y' = u + x\,u'.$$

Подставляем в (1.2):

$$u + x\,u' = f(u) \ \Rightarrow\ x\,u' = f(u) - u$$

из которого следует, что

$$u' = \frac{f(u) - u}{u}. \tag{1.3}$$

ОДУ (1.3) является ОДУ с раделяющимися переменными для ф-и $u = u(x)$, и у нас есть метод решение для таких ОДУ. Мы находим общее решение ОДУ (1.3) вида

$$u(x) = g(x,\ c),$$

и, поэтому, общее решение ОДУ (1.2) будет

$$y(x) = x\,u(x) = x\,g(x,\ c).$$

Пример 2.1 Найти общее решение ОДУ

$$2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = x^2 + 2\,y^2 \tag{1.4}$$

Решение:

ОДУ (1.4) — 1-го порядка, нелинейное, неавтономное, которое можем переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2\,y^2}{2\,x\,y} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2\,x\,y} + \frac{2\,y^2}{2\,x\,y}$$

$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \tag{1.5}$$

которое является однородным ОДУ.

Ставим

$$u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = x\,u \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = u + x\,u'.$$

Поэтому,

$$u + x\,u' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{u} + u \;\Rightarrow\; x\,u' = \frac{1}{2\,u} \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{2\,x\,u}.$$

Это ОДУ 1-го порядка, нелинейно, с разделяющимися переменными, для ф-и $u = u(x)$.

Шаг-1: Все “u” на лево, все “y” на право:

$$2\,u\,u' = \frac{1}{x}.$$

Шаг-2: Интегрируем по x:

$$2\int u\,u'\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + c.$$

Шаг-3: Замечаем, что $u'\,dx = du$:

$$2\int u\,du = \int \frac{1}{x}\,dx + c.$$

Шаг-4: Вычисляем интегралы и решаем (если это возможно) для u:

$$u^2 = \ln|x| + c,$$

$$\Rightarrow\ u = \pm\sqrt{\ln|x| + c}\,.$$

Это общее решение ОДУ (1.5). Общим решением ОДУ (1.4) является следующее

$$y(x) = x\,u(x)\ \Rightarrow\ \boxed{y = \pm x\sqrt{\ln|x| + c}}\,.$$

Пример 2.2 Найти общее решение ОДУ

$$(x+y)\frac{dy}{dx} = x - y \qquad (1.6)$$

Решение:

ОДУ (1.6) — 1-го порядка, нелинейное, неавтономное, которое можем переписать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Если делим оба числитель и знаменатель дроби в правой части на x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}},$$

которое является однородным ОДУ.

Ставим

$$u = \frac{y}{x}\ \Rightarrow\ y = x\,u\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = u + x\,u'.$$

Поэтому,

$$u + x\,u' = \frac{1-u}{1+u} \;\Rightarrow\; x\,u' = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-2\,u-u^2}{1+u}$$

$$\Rightarrow\; u' = \frac{1-2\,u-u^2}{x(1+u)}. \tag{1.7}$$

Это ОДУ 1-го порядка, нелинейно, с разделяющимися переменными, для ф-и $u = u(x)$.

Шаг-1: Все "u" на лево, все "y" на право:

$$\frac{1+u}{1-2\,u-u^2}\;u' = \frac{1}{x}.$$

Шаг-2: Интегрируем по x:

$$\int \frac{1+u}{1-2\,u-u^2}\;u'\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + c.$$

Шаг-3: Замечаем, что $u'\,dx = du$:

$$\int \frac{1+u}{1-2\,u-u^2}\;du = \int \frac{1}{x}\,dx + c.$$

Шаг-4: Вычисляем интегралы и решаем (если это возможно) для u:

$$\rightarrow\; \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

$$\rightarrow\; \int \frac{1+u}{1-2\,u-u^2}\,du = \frac{-1}{2}\int \frac{dr}{r} = \frac{-1}{2}\ln\left|r\right| = \frac{-1}{2}\ln\left|1-2\,u-u^2\right|$$

ставим $r = 1-2\,u-u^2$

$$\Rightarrow\; dr = (-2-2\,u)\,du = -2\,(1+u)\,du \;\Rightarrow\; (1+u)\,du = \frac{-1}{2}\,dr$$

Поэтому,

$$\frac{-1}{2}\ln\left|1-2\,u-u^2\right| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow\; \ln\left|1-2\,u-u^2\right| = -2\ln\left|x\right| - 2\,c \;\Rightarrow\; \ln\left|1-2\,u-u^2\right| = \ln|x|^{-2} - 2\,c$$

$$\overset{\exp}{\Rightarrow}\; e^{\ln\left|1-2\,u-u^2\right|} = e^{\ln|x|^{-2}-2\,c} = e^{-2\,c}\,e^{\ln|x|^{-2}}$$

$$\overset{\exp}{\Rightarrow}\; \left|1-2\,u-u^2\right| = e^{-2\,c}\left|x\right|^{-2} = \frac{e^{-2\,c}}{x^2} \;\Rightarrow\; 1-2\,u-u^2 = \pm\frac{e^{-2\,c}}{x^2}$$

$$\Rightarrow\; 1-2\,u-u^2 = c_1\,x^{-2},\;\; c_1 := \pm e^{-2\,c}.$$

Решаем для $u(x)$:

$$\Rightarrow\ u^2 + 2\,u + c_1\,x^{-2} - 1 = 0$$

$$D = 4 - 4\left(c_1\,x^{-2} - 1\right)\ \Rightarrow\ u(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{8 - 4\,c_1\,x^{-2}}}{2}$$

Это общее решение ОДУ (1.7). Общим решением ОДУ (1.6) является следующее

$$y(x) = x\,u(x)\ \Rightarrow\ \boxed{y = \frac{-2\,x \pm \sqrt{8\,x^2 - 4\,c_1}}{2}}.$$

3. ОДУ типа Бернулли (Bernoulli)

ОДУ типа Бернулли -- это нелинейное ОДУ, 1-го порядка, следующего вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n,\ \text{ где } n \neq 0,\ 1. \tag{1.8}$$

→ Если $n = 0$, то ОДУ (1.8) является линейным ОДУ 1-го порядка.

→ Если $n = 1$, то ОДУ (1.8):

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y\ \Rightarrow\ y' = (q(x) - p(x))\,y,$$

которое является ОДУ с разделяющимися переменными.

3.1 Общее решение ОДУ типа Бернулли

Здесь, представляем метод решения ОДУ типа Бернулли. Мы увидем, что можемм преобразовывать любое ОДУ тупа Бернулли либо в линейное ОДУ 1-го порадка, лиобо в ОДУ с разделяющимися переменными, которые знаем как решать.

Пусть следующее ОДУ типа Бернулли:

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n. \tag{1.9}$$

Шаг-1: Разделяем обе части (1.9) на нелинейный член “y^n”:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\,\frac{y}{y^n} = q(x)$$

То есть

$$y'\,y^{-n} + p(x)\,\underbrace{y^{1-n}}_{u} = q(x). \tag{1.10}$$

Шаг-2: Ставим $u = y^{1-n}$:

$$u = y^{1-n}\ \Rightarrow\ u' = (1-n)\,y^{-n}\,y'\ \Rightarrow\ y^{-n}\,y' = \frac{1}{1-n}\,u'.$$

Шаг-3: Подставляем в (1.10)

$$\frac{1}{1-n}\, u' + p(x)\, u = q(x), \tag{1.11}$$

которое является линейным ОДУ, 1-го порядка, для $u = u(x)$. (Иногда (1.11) имеет вид ОДУ с разделяющимися переменными)

Шаг-4: Находим общее решение ОДУ (1.11)

$$u = g(x,\, c_1).$$

Шаг-5: Используя $u = y^{1-n}$, находим общее решение ОДУ (1.9).

Пример 3.1 Найти общее решение ОДУ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\, y = x^2\, y^2. \tag{1.12}$$

Решение:

Это ОДУ 1-го порядка, нелинейное, неавтономное, типа Бернулли.

Шаг-1: Разделяем обе части (1.12) на нелинейный член “y^2”:

$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\,\frac{y}{y^2} = x^2 \;\Rightarrow\; y^{-2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\, y^{-1} = x^2. \tag{1.13}$$

Шаг-2: Ставим $u = y^{-1}$:

$$u = y^{-1} \;\Rightarrow\; u' = -y^{-2}\, y' \;\Rightarrow\; y^{-2}\, y' = -u'.$$

Шаг-3: Подставляем в (1.13)

$$-u' + \frac{1}{x}\, u = x^2 \;\Rightarrow\; u' - \frac{1}{x}\, u = -x^2, \tag{1.14}$$

которое является линейным ОДУ, 1-го порядка, для $u = u(x)$.

Шаг-4: Находим общее решение ОДУ (1.14).

■ Множитель Эйлера:

$$p(x) = \frac{-1}{x} \;\Rightarrow\; R(x) = e^{-\int \frac{1}{x}\, dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

■ Умножаем обе части (1.14) на $R(x) = 1/x$:

$$\frac{1}{x}\, u' - \frac{1}{x^2}\, u = -x.$$

■ Замечаем, что левая часть:

$$\left(\frac{1}{x}\,u\right)' = -x.$$

■ Интегрируем по x:

$$\frac{1}{x}\,u = -\frac{x^2}{2} + c.$$

■ Решаем для $u = u(x)$:

$$u = -\frac{x^3}{2} + c\,x,$$

которое является общим решением ОДУ (1.14).

Шаг-5: Используя $u = y^{-1}$, находим общее решение ОДУ (1.12)

$$u = y^{-1} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{u} = \frac{1}{x\left(c - \frac{x^2}{2}\right)} \;\Rightarrow\; \boxed{y\,(x) = \frac{2}{x\left(2\,c - x^2\right)}}.$$

Пример 3.2 Найти общее решение ОДУ

$$\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y}\,. \tag{1.15}$$

Решение:

Это ОДУ 1-го порядка, нелинейное, неавтономное, типа Бернулли.

$$\frac{dy}{dx} - y = y^{1/2}. \tag{1.16}$$

Шаг-1: Разделяем обе части (1.12) на нелинейный член “$y^{1/2}$”:

$$\frac{1}{y^{1/2}}\,\frac{dy}{dx} - \frac{y}{y^{1/2}} = 1 \;\Rightarrow\; y^{-1/2}\,\frac{dy}{dx} - y^{1/2} = 1 \tag{1.17}$$

Шаг-2: Ставим $u = y^{1/2}$:

$$u = y^{1/2} \;\Rightarrow\; u' = \frac{1}{2}\,y^{-1/2}\,y' \;\Rightarrow\; y^{-1/2}\,y' = 2\,u'.$$

Шаг-3: Подставляем в (1.17)

$$2\,u' - u = 1 \;\Rightarrow\; u' = 1 + u, \tag{1.18}$$

которое является линейным ОДУ, 1-го порядка, с разделяющимися переменными для

$u = u(x)$.

Шаг-4: Находим общее решение ОДУ (1.14).

■ Все "u" на лево, все "x" на право:

$$\frac{1}{1+u}\, u' = 1.$$

■ Интегрируем по x:

$$\int \frac{1}{1+u}\, u'\, dx = \int dx + c.$$

■ Замечаем, что $u'\, dx = du$

$$\int \frac{1}{1+u}\, du = \int dx + c$$

$$\Rightarrow\ \ln|1+u| = x + c$$

$$\Rightarrow\ |1+u| = e^{x+c} = e^c\, e^x$$

$$\Rightarrow 1 + u = \pm e^c\, e^x \ \Rightarrow\ u = c_1\, e^x - 1,\ \ c_1 := \pm e^c,$$

которое является общим решением ОДУ (1.18).

Шаг-5: Используя $u = y^{1/2}$, находим общее решение ОДУ (1.12)

$$u = y^{1/2} \ \Rightarrow\ y = u^2 \ \Rightarrow \boxed{y(x) = (c_1\, e^x - 1)^2}.$$

4. ОДУ типа Риккати (Riccati)

ОДУ типа Риккати -- это нелинейное ОДУ, 1-го порядка, следующего вида

$$y' = q(x) + p(x)\, y + r(x)\, y^2. \tag{1.19}$$

Мы увидем, что, зная одно частное решение ОДУ (1.19), мы можем преобразовывать (1.19) либо в линейное ОДУ, либо в нелинейное ОДУ типа Бернулли.

4.1 Общее решение ОДУ типа Риккати

Пусть $y_1 = y_1(x)$ —частное решение ОДУ (1.19). То есть $y_1' = q(x) + p(x)\, y_1 + r(x)\, y_1^2$.

■ **Метод 1:** ***Преобразовывать в ОДУ типа Бернулли***.

Шаг-1: Ставим $y(x) = y_1(x) + u(x)$.

$$y(x) = y_1(x) + u(x) \ \Rightarrow\ y'(x) = y_1'(x) + u'(x).$$

Шаг-2: Подставляем в (1.19) и используем, что y_1является *частным решением*.

$$y_1' + u' = q(x) + p(x)\,(y_1 + u) + r(x)\,(y_1 + u)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_1'} + u' = \underbrace{q(x)} + \underbrace{p(x)\,y_1} + p(x)\,u + \underbrace{r(x)\,y_1^2} + 2\,r(x)\,y_1\,u + r(x)\,u^2$$

$$\Rightarrow u' = p(x)\,u + 2\,r(x)\,y_1\,u + r(x)\,u^2$$

$$\Rightarrow u' - (p(x) + 2\,r(x)\,y_1(x))\,u(x) = r(x)\,u^2 \tag{1.20}$$

которое является ОДУ типа Бернулли для $u = u(x)$.

Шаг-3: Находим общее решение ОДУ (1.20) и, поэтому, находим общее решение ОДУ (1.19) через

$$y(x) = y_1(x) + u(x).$$

■ **Метод 2:** ***Преобразовывать в линейное ОДУ***

Шаг-1: Ставим $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$.

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)} \;\Rightarrow\; y'(x) = y_1'(x) - \frac{1}{(u(x))^2}\,u'(x).$$

Шаг-2: Подставляем в (1.19) и используем, что y_1является *частным решением*.

$$y_1' - \frac{1}{u^2}\,u' = q(x) + p(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + r(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{y_1'} - \frac{1}{u^2}\,u' = \underbrace{q(x)} + \underbrace{p(x)\,y_1} + p(x)\,\frac{1}{u} + \underbrace{r(x)\,y_1^2} + 2\,r(x)\,\frac{y_1}{u} + r(x)\,\frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u^2}\,u' = p(x)\,\frac{1}{u} + 2\,r(x)\,\frac{y_1}{u} + r(x)\,\frac{1}{u^2}$$

$$\overset{\cdot u^2}{\Rightarrow} -u' = p(x)\,u + 2\,r(x)\,y_1\,u + r(x)$$

$$\overset{\cdot u^2}{\Rightarrow} u' + (p(x) + 2\,r(x)\,y_1)\,u = r(x) \tag{1.21}$$

которое является линейным ОДУ 1-го порядка для $u = u(x)$.

Шаг-3: Находим общее решение ОДУ (1.21) и, поэтому, находим общее решение ОДУ (1.19) через

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

■

Определение 4.1 *Функция ошибок (error function) — эта специальная ф-я,* *которая определяется через*

$$\boxed{\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.}$$

Пример 4.1 Проверьте, что $y_1 = x$ являеться решением ОДУ

$$y' = 1 + x\,y - y^2, \tag{1.22}$$

и найдите его общее решение.

Решение:

В самом деле

$$y_1 = x \;\Rightarrow\; 1 = 1 + x \cdot x - x^2 \;\Rightarrow\; 0 = 0,$$

поэтому $y_1 = x$ являеться решением ОДУ (1.22).

Шаг-1: Ставим $y(x) = y_1(x) + u(x)$.

$$y = x + u \;\Rightarrow\; y' = 1 + u'.$$

Шаг-2: Подставляем в (1.22) и используем, что y_1является *частным решением*.

$$1 + u' = 1 + x\,(x + u) - (x + u)^2$$

$$\Rightarrow 1 + u' = 1 + x^2 + x\,u - x^2 - 2\,x\,u - u^2$$

$$\Rightarrow u' = -x\,u - u^2$$

$$\Rightarrow u' + x\,u = u^2 \tag{1.23}$$

которое является ОДУ типа Бернулли для $u = u(x)$.

Шаг-3: Находим общее решение ОДУ (1.23):

→ Делим на u^2 обе части (1.23):

$$u^{-2}\,u' + x\,u^{-1} = 1. \tag{1.24}$$

→ Ставим $v = u^{-1}$:

$$v = u^{-1} \;\Rightarrow\; v' = -\underline{u^{-2}\,u'}.$$

→ Подставляем в (1.24)

$$-v' + x\,v = 1 \;\Rightarrow\; v' - x\,v = -1, \tag{1.25}$$

которое является линейным ОДУ для $v(x)$:

→ Множитель Эйлера

$$p(x) = -x \Rightarrow R(x) = e^{-\int x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

→ Умножаем обе части (1.25) на $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\,v' - x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,v = -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

→ Замечаем, что

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\,v\right)' = -e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

→ Интегрируем по x:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\,v = -\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + c$$

$$\Rightarrow\ v = -e^{\frac{x^2}{2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(x) + c\right]$$

Поэтому,

$$v = u^{-1} \Rightarrow u(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{-e^{\frac{-x^2}{2}}}{\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(x) + c\right]} \Rightarrow y(x) = x + u(x) = x - \frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(x) + c\right]},$$

которое является общим решением ОДУ (1.22).

Пример 4.2 Проверьте, что $y_1 = 1/x$ являеться решением ОДУ

$$x^2\,y' + x\,y = x^2\,y^2 - 1, \tag{1.26}$$

и найдите его общее решение.

Решение:

В самом деле

$$y_1 = \frac{1}{x},\ y_1' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2\,y_1' + x\,y_1 = x^2\,y_1^2 + 1 \Rightarrow -1 + 1 = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0.$$

Нужно перевести ОДУ (1.26) в виде ОДУ (1.19). То есть,

$$y' + \frac{1}{x}\,y = y^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x}\,y + y^2. \tag{1.27}$$

Шаг-1: Ставим $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)}$.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{u^2}\,u'.$$

Шаг-2: Подставляем в (1.27).

$$\frac{-1}{x^2} - \frac{1}{u^2}\,u' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{u^2}\,u' = \frac{1}{x\,u} + \frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow\; u' = \frac{-u}{x} - 1 \;\Rightarrow\; u' + \frac{1}{x}\,u = -1,$$

которое является линейным ОДУ 1-го порядка, неоднородное.

→ Множитель Эйлера

$$p(x) = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; R(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x.$$

→ Умножаем обе части (1.25) на x

$$x\,u' + u = -x.$$

→ Замечаем, что

$$(x\,u)' = -x.$$

→ Интегрируем по x:

$$x\,u = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow\; u = \frac{-x}{2} + c\,x^{-1}.$$

Поэтому,

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u} \;\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{c\,x^{-1} - \frac{x}{2}} \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\,x}{2\,c - x^2},$$

которое является общим решением ОДУ (1.26).