4

Нелинейные ОДУ 1-го порядка: ОДУ в полных дифференциалах

1. Цели

В конце этой главы вы будете уметь:

1. решать ОДУ в полных дифференциалах;

2. сводить некоторые ОДУ к уравнениям в полных дифференциалах используя множетели Эйлера.

2. Предварительные замечания

2.1 Частные производные 1-го и 2-го порядка ф-и двух переменных

Пусть ф-я двух переменных, $f(x, y)$.

Определение 2.1 *Частной производной первого порядка по x ф-и $f(x, y)$ называется, если существует, следующее количество*

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

и обозначается через $\partial_x f$, или $\frac{\partial f}{\partial x}$, или f_x. Кроме того,частной производной первого порядка по y ф-и $f(x, y)$ называется, если существует, следующее количество

$$\frac{\partial f}{\partial y} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h},$$

и обозначается через $\partial_y f$, или $\frac{\partial f}{\partial y}$, или f_y.

Практически, когда дифференцируем ф-ю $f(x, y)$ по x, переменная y считается постоянной. А когда дифференцируем по y, переменная x считается постоянной.

Пример 2.1 Пусть $f(x, y) = x\,y^2 + x^3\,y + \sqrt{x} + \sin y$**.**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3\,x^2\,y + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\,x\,y + x^3 + \cos y.$$

Определение 2.2 *Частной производной второго порядка по x ф-и* $f(x, y)$ *назывется, если существует, следующее количество*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h},$$

и обозначается через $\partial_x^2 f$*, или* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$*, или* f_{xx}*.Кроме того,частной производной второго порядка по y ф-и* $f(x, y)$ *называется, если существует, следующее количество*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{h},$$

и обозначается через $\partial_y^2 f$*, или* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$*, или* f_{yy}*.Наконец,смешеной производной второго порядка x по y ф-и* $f(x, y)$ *называется, если существует, следующее количество*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h},$$

и обозначается через $\partial_{y\,x}^2 f$*, или* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$*, или* f_{xy}*.Наконец,смешеной производной второго порядка y по x ф-и* $f(x, y)$ *называется, если существует, следующее количество*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{h},$$

и обозначается через $\partial_{x\,y}^2 f$*, или* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$*, или* f_{yx}*.*

Пример 2.2 Пусть ф-я примера 2.1**.**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + 3\,x^2\,y + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 6\,x\,y - \frac{1}{4\,x^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\,x\,y + x^3 + \cos y\right) = 2\,x - \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + 3\,x^2\,y + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 2\,y + 3\,x^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\,x\,y + x^3 + \cos y\right) = 2\,y + 3\,x^2.$$

Замечаем, что, в примере 2.2,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},$$

но это не правильно для каждой ф-я $f(x,\ y)$.

Теорема Шварца *(Schwartz) Пусть f непрерывная ф-я, с непрерывными производными 1-го порядка f_x и f_y. То*

$$f_{x\,y} = f_{y\,x} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},$$

2.2 Дифференциал ф-и двух переменных

→ Пусть сложная ф-я $f(u(x))$. Напоминаем, что, по цепному правилу:

$$\frac{d f}{d x} = f'\,u'(x) \equiv \frac{d f}{d u}\,\frac{d u}{d x}.$$

Дифференциал ф-и f определяется через

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x}\,d x.$$

→ *Дифференциал ф-и двух переменных* $f = f(x,\ y)$ определяется через

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x}\,d x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d y.$$

→ Пусть ф-я $f(x,\ y(x))$. По цепному правилу:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

2. ОДУ в полных дифференциалах

Пусть ОДУ 1-го порядка в общим виде

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.1}$$

Как мы уже видели, мы не можем всегда выражать общее решение данного ОДУ 1-го порядка в явным виде

$$y = f(x, c_1),$$

и иногда пишем

$$g(x, y, c_1) = 0,$$

которое является общим решением ОДУ (1.1) в неявным виде.

Теперь, рассматриваем ОДУ 1-го порадка типа

$$A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что ОДУ (1.2) имеет общее решение вида

$$H(x, y) = c, \ \ c \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где частные производные первого порадкя ф-и H по x и по y, $\partial_x H$ и $\partial_y H$, являются непрерывными. Для каждого значения параметра c, уравнение (1.2) определяет кривую на плоскости x-y. Вдоль каждой кривой y является ф-ей от x, $y = y(x)$. То есть,

$$H(x, y(x)) = c, \tag{1.4}$$

Дифференцируем (1.4) по x, используя цепное правило

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Ввиду уравнений (1.2) и (1.4), завершаем, что, если

$$\frac{\partial H}{\partial x} = A(x, y) \ \text{ и } \ \frac{\partial H}{\partial y} = B(x, y), \tag{1.5}$$

то уравнение (1.3) является общим решением ОДУ 1-го порадкя (1.2). А если существует такая ф-я $H(x, y)$, поскольку $\partial_x H$ и $\partial_y H$ — непрерывны, то согласно теореме Шварца,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \overset{(1.5)}{\Longrightarrow} \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Определение 2.1 *Если $A(x, y)$, $B(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y}A(x, y)$ и $\frac{\partial}{\partial x}B(x, y)$ являются непрерывными, то ОДУ (1.2) называется ОДУ в полных диффренциалах, тогда и тольлко тогда когда*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Но, как можно найти общее решение ОДУ (1.2) если оно является ОДУ в польных дифференциалах. Это зависит от существования решения, $H(x, y)$, системы (1.5):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = A(x, y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = B(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x, y) = \int A(x, y)\, dx + c_1(y) \\ H(x, y) = \int B(x, y)\, dy + c_2(x) \end{cases}.$$

Эта, на самом деле, является системой дифференциальных уравнений с частными производными, для ф-и $H(x, y)$.

Теорема 2.1 *Если ОДУ 1-го порядка*

$$A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.6}$$

является ОДУ в полных диффренциалах,то есть

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

то уравнение

$$H(x, y) = c, \;\; c \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

является общим решением ОДУ (1.6). А ф-я $H(x, y)$ можно найти решая систему дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = A(x, y) \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = B(x, y) \end{cases}.$$

Пример 2.1 Найти общее решение ОДУ

$$y - x + (x + y)\, y' = 0. \tag{1.8}$$

Решение:

У нас есть $A(x,\ y) = y - x$ и $B(x,\ y) = x + y$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

поэтому, по определению, ОДУ (1.8) является ОДУ в полных дифференциалах. То есть, общее решение ОДУ (1.8) будет

$$H(x,\ y) = c,$$

где $H(x,\ y)$ удовлетворяет

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = A\,(x,\ y) = x - y \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = B\,(x,\ y) = x + y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,\ y) = \int (x - y)\, dx + c_1(y) = \underbrace{\dfrac{x^2}{2}} - y\,x + \underbrace{c_1(y)} \\ H(x,\ y) = \int (x + y)\, dy + c_2(x) = x\,y + \underbrace{\dfrac{y^2}{2}} + \underbrace{c_2(x)} \end{cases}$$

где $c_1(y) = \frac{y^2}{2}$ и $c_2(x) = \frac{x^2}{2}$. Поэтому, $H(x,\ y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - y\,x$, и общее решение будет

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - y\,x = c$$

$$\Rightarrow\ y^2 - 2\,x\,y + x^2 = 2\,c \ \Rightarrow\ (y - x)^2 = 2\,c \ \Rightarrow\ y - x = \pm 2\,c \ \Rightarrow\ \boxed{y = x \pm c_1}.$$

■

Пример 2.2 Найти общее решение ОДУ

$$y^2 - 2\,x + 2\,x\,y\,y' = 0. \tag{1.9}$$

Решение:

У нас есть $A(x,\ y) = y^2 - 2\,x$ и $B(x,\ y) = 2\,x\,y$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2\,y, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2\,y \ \Rightarrow\ \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

поэтому, по определению, ОДУ (1.9) является ОДУ в полных дифференциалах. То есть, общее решение ОДУ (1.9) будет

$$H(x,\ y) = c,$$

где $H(x,\ y)$ удовлетворяет

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = A\,(x,\ y) = y^2 - 2\,x \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = B\,(x,\ y) = 2\,x\,y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,\ y) = y^2\,x \underbrace{-x^2} + c_1(y) \\ H(x,\ y) = x\,y^2 + \underbrace{c_2(x)} \end{cases}$$

где $c_1(y) = 0$ и $c_2(x) = -x^2$. Поэтому, $H(x,\ y) = x\,y^2 - x^2$, и общее решение будет

$$x\,y^2 - x^2 = c$$

$$\Rightarrow\ y^2 = \frac{c + x^2}{x} \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{\frac{c + x^2}{x}}}.$$

■

4. ОДУ, сводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах

Обычно уравнения вида

$$A(x,\ y) + B(x,\ y)\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0, \tag{1.10}$$

не являются уравнениями в полных дифференциалах. То есть,

$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Однако, иногда, можем умножать обе части ОДУ (1.10) на ф-ю $\mu(x,\ y)$, такую, что

$$\mu(x,\ y)\,A(x,\ y) + \mu(x,\ y)\,B(x,\ y)\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0,$$

будет ОДУ в полных дифференциалах. Другими словами, ОДУ

$$\tilde{A}(x,\ y) + \tilde{B}(x,\ y)\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0, \tag{1.11}$$

где

$$\tilde{A}(x,\ y) := \mu(x,\ y)\, A(x,\ y), \quad \tilde{B}(x,\ y) := \mu(x,\ y)\, B(x,\ y),$$

является ОДУ в полных диффернциалах. То есть,

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x}.$$

Определение 4.1 *Ф-я $\mu(x,\ y)$, при которой ОДУ (1.10) сводится к ОДУ в полных дифференциалах, называется можителем Эйлера или интегрирующим множителем.*

Пример 4.1 Найти общее решение ОДУ

$$\left(x^2 + 2\, x\, y^3\right) y' + 3\, x\, y + y^4 = 0. \qquad (1.12)$$

Решение:

У нас есть $A(x,\ y) = 3\, x\, y + y^4$ и $B(x,\ y) = x^2 + 2\, x\, y^3$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3\, x + 4\, y^3, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2\, x + 2\, y^3 \ \Rightarrow \ \frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x},$$

поэтому, (1.12) не является ОДУ в полных дифференциалах. Но, если умножим обе части (1.12) на x:

$$\left(x^3 + 2\, x^2\, y^3\right) y' + 3\, x^2\, y + x\, y^4 = 0, \qquad (1.13)$$

где $\tilde{A}(x,\ y) = 3\, x^2\, y + x\, y^4$ и $\tilde{B}(x,\ y) = x^3 + 2\, x^2\, y^3$:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} = 3\, x^2 + 4\, x\, y^3, \quad \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} = 3\, x^2 + 4\, x\, y^3 \ \Rightarrow \ \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x}.$$

То есть, ОДУ (1.13) является ОДУ в полных дифференциалах. Поэтому, общее решение ОДУ (1.12) будет:

$$H(x,\ y) = C,$$

где

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \tilde{A}(x,\ y) = 3\, x^2\, y + x\, y^4 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = \tilde{B}(x,\ y) = x^3 + 2\, x^2\, y^3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} H\,(x,\ y) = \int\left(3\, x^2\, y + x\, y^4\right) dx + c_1(y) \\ H\,(x,\ y) = \int\left(x^3 + 2\, x^2\, y^3\right) dy + c_2(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} H\,(x,\ y) = x^3\, y + \frac{1}{2}\, x^2\, y^4 + c_1(y) \\ H\,(x,\ y) = x^3\, y + \frac{1}{2}\, x^2\, y^4 + c_2(x) \end{cases}.$$

Выбираем $c_1 = c_2 = 0$, и $H(x, y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^4$, и общее решение ОДУ (1.13) будет:

$$x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^4 = C,$$

в неявным виде.

4.1 Нахождение множителя Эйлера

У нас нет общего метода нахождения множителя Эйлера. Однако, иногда, как мы уведем, можем предполагать особенный вид для него.

Пусть ОДУ вида

$$A(x, y) + B(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.14}$$

и $\mu(x, y)$ —множитель Эйлера для (1.14). То есть,

$$\tilde{A}(x, y) + \tilde{B}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \tag{1.15}$$

где $\tilde{A}(x, y) := \mu(x, y) A(x, y)$, $\tilde{B}(x, y) := \mu(x, y) B(x, y)$, является ОДУ в полных дифференциалах. То есть,

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(x, y) A(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, y) B(x, y)).$$

Поэтому, $\mu = \mu(x, y)$ удовлетворяет следующее дифференциальное уравнение:

$$\mu_y A + \mu A_y = \mu_x B + \mu B_x. \tag{1.16}$$

4.1.1 Множитель Эйлера вида $\mu(x, y) = f(x)$

Пусть $\mu(x, y) = f(x)$. То $\mu_y(x, y) = 0$, $\mu_x(x, y) = f'(x)$, и из (1.16):

$$f A_y = f' B + f B_x \Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{A_y - B_x}{B}. \tag{1.17}$$

Левая часть уравнения (1.17) является ф-ей только от x. Поэтому, количество $\left(A_y - B_x\right) / B$

в левой часте должно быть ф-ей от x, скажем

$$p(x) = \frac{A_y - B_x}{B}.$$

То, f удовлетворяет ОДУ

$$f' = p(x)\, f,$$

которое ОДУ с разделяющимися переменными, которое можем решать и получить

$$f = c\, e^{\int p(x)\, dx}.$$

У нас есть следующее.

Предложение 4.1 *Если количество $\left(A_y - B_x\right) / B$ является ф-ей от x, т.е.*

$$\boxed{\frac{A_y - B_x}{B} = p\,(x)},$$

то ф-я

$$\boxed{f(x) = e^{\int p(x)\, dx}},$$

является множителем Эйлера для ОДУ (1.14).

Пример 4.2 Найти общее решение ОДУ

$$y^2 + \frac{3}{2}\, x + x\, y\, \frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.18}$$

Решение:

У нас есть $A(x,\ y) = y^2 + \frac{3}{2}\, x$ и $B(x,\ y) = x\, y$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2\, y, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = y \ \Rightarrow\ \frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x},$$

поэтому, (1.18) не является ОДУ в полных дифференциалах.

Количество

$$\frac{A_y - B_x}{B} = \frac{2\, y - y}{x\, y} = \frac{1}{x} = p(x).$$

То, согласно предложению 4.1, множитель Эйлера будет

$$f(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x.$$

Умножаем обе части ОДУ (1.18) на x:

$$(1.18) \overset{\cdot x}{\Longrightarrow} x\,y^2 + \frac{3}{2}\,x^2 + x^2\,y\,\frac{d\,y}{d\,x} = 0. \tag{1.19}$$

Ставим $\tilde{A}(x,\ y) = x\,y^2 + \frac{3}{2}\,x^2$ и $\tilde{B}(x,\ y) = x^2\,y$.

$$\partial_y \tilde{A} = 2\,x\,y, \quad \partial_x \tilde{B} = 2\,x\,y.$$

Поэтому, ОДУ (1.19) является ОДУ в полных дифференциалах. То есть, общее решение его будет:

$$H(x,\ y) = C,$$

где $H(x,\ y)$ удовлетворяет следую систему дифференциалых уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} H\,(x,\ y) = \tilde{A}(x,\ y) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} H\,(x,\ y) = \tilde{B}\,(x,\ y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} H\,(x,\ y) = x\,y^2 + \dfrac{3}{2}\,x^2 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} H\,(x,\ y) = x^2\,y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,\ y) = \int\!\left(x\,y^2 + \frac{3}{2}\,x^2\right) d\,x + c_1(y) = \frac{x^2}{2}\,y^2 + \underline{\frac{1}{2}\,x^3} + c_1(y) \\ H(x,\ y) = \int x^2\,y\,d\,y + c_2(x) = x^2\,\frac{y^2}{2} + \underline{c_2(x)} \end{cases}.$$

Из этой системы следует, что $c_2(x) = \frac{1}{2}\,x^3$ и $c_1(y) = 0$. Поэтому, $H(x,\ y) = \frac{x^2}{2}\,y^2 + \frac{1}{2}\,x^3$, и общее решение ОДУ (1.18) будет

$$\frac{x^2}{2}\,y^2 + \frac{1}{2}\,x^3 = C,$$

которое можем явно решить для $y(x)$

$$y(x) = \pm\frac{\sqrt{C_1 - x^3}}{x}, \quad C_1 := 2\,C.$$

4.1.2 Множитель Эйлера вида $\mu(x, y) = g(y)$

Пусть $\mu(x,\ y) = g(y)$. То $\mu_x(x,\ y) = 0$, $\mu_y(x,\ y) = f'(y)$, и из (1.16):

$$f' A + f A_y = f B_x \ \Rightarrow \ \frac{f'}{f} = \frac{B_x - A_y}{A} \tag{1.20}$$

Левая часть уравнения (1.20) является ф-ей только от y. Поэтому, количество $\left(B_x - A_y\right)/A$ в левой части должно быть ф-ей от y, скажем

$$p(y) = \frac{B_x - A_y}{A}.$$

То, f удовлетворяет ОДУ

$$f' = p(y) f,$$

которое ОДУ с разделяющимися переменными, которое можем решать и получить

$$f = c\, e^{\int p(y)\, dy}.$$

У нас есть следующее.

Предложение 4.2 *Если количество* $\left(B_x - A_y\right)/A$ *является ф-ей от y, т.е.*

$$\boxed{\frac{B_x - A_y}{A} = p(y)},$$

то ф-я

$$\boxed{f(y) = e^{\int p(y)\, dy}},$$

является множителем Эйлера для ОДУ (1.14).

Пример 4.2 Найти общее решение ОДУ

$$y + 3 + (3y - 2x)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.21}$$

Решение:

У нас есть $A(x, y) = y + 3x$ и $B(x, y) = 3y - 2x$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 1, \ \frac{\partial B}{\partial x} = -2 \ \Rightarrow \ \frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x},$$

поэтому, (1.21) не является ОДУ в полных дифференциалах.

Количество

$$\frac{B_x - A_y}{A} = \frac{-2-1}{y+3} = \frac{-3}{y+3} = p(y).$$

То, согласно предложению 4.2, множитель Эйлера будет

$$f(y) = e^{\int p(y)\,dy} = e^{-3\int \frac{1}{y+3}\,dy} = e^{-3\ln(y+3)} = \frac{1}{(y+3)^3}.$$

Умножаем обе части ОДУ (1.21) на $(y+3)^{-3}$:

$$(1.18) \xRightarrow{\cdot (y+3)^{-3}} \frac{1}{(y+3)^2} + \frac{3y-2x}{(y+3)^3}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.22}$$

Ставим $\tilde{A}(x,\ y) = \frac{1}{(y+3)^2}$ и $\tilde{B}(x,\ y) = \frac{3y-2x}{(y+3)^3}$.

$$\partial_y \tilde{A} = -2\,(y+3)^{-3},\quad \partial_x \tilde{B} = -2\,(y+3)^{-3} \Rightarrow \partial_y \tilde{A} = \partial_x \tilde{B}.$$

Поэтому, ОДУ (1.21) является ОДУ в полных дифференциалах. То есть, общее решение его будет:

$$H(x,\ y) = C,$$

где $H(x,\ y)$ удовлетворяет следую систему дифференциалых уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} H(x,\ y) = \tilde{A}(x,\ y) \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x,\ y) = \tilde{B}(x,\ y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} H(x,\ y) = \frac{1}{(y+3)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x,\ y) = \frac{3y-2x}{(y+3)^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,\ y) = \int \frac{1}{(y+3)^2}\,dx + c_1(y) = \frac{x}{(y+3)^2} + \underline{c_1(y)} \\ H(x,\ y) = \int \frac{3y-2x}{(y+3)^3}\,dy + c_2(x) = \underline{-\frac{3(3+2y)}{2(3+y)^2}} + \frac{x}{(y+3)^2} + c_2(x) \end{cases}$$

(так как $\frac{y}{(y+3)^3} = \frac{1}{(y+3)^2} - \frac{3}{(y+3)^3}$). Из этой системы следует, что $c_1(y) = 0$ и $c_2(x) = 0$. Поэтому $H(x,\ y) = \frac{x}{(y+3)^2} - \frac{3(3+2y)}{2(3+y)^2}$, и общее решение будет

$$\frac{x}{(y+3)^2} - \frac{3(3+2y)}{2(3+y)^2} = C,$$

которое можем явно решить для $y(x)$

$$y(x) = \pm\frac{-3-6\,C \pm \sqrt{9+2\,c(2\,x+9)}}{2\,c}.$$

4.1.3 Множитель Эйлера вида μ(x, y) = ϕ(x ± y)

Пусть $\mu(x,\ y) = \phi(\xi)$, где $\xi := x \pm y$. То из (1.16):

$$\phi_y\,A + \phi\,A_y = \phi_x\,B + \phi\,B_x, \tag{1.23}$$

но $\phi_y = \phi' \cdot \xi_y = \pm\phi'$ и $\phi_x = \phi' \cdot \xi_x = \phi'$. Поэтому,

$$\pm\phi'\,A + \phi\,A_y = \phi'\,B + \phi\,B_x \;\Rightarrow\; \frac{\phi'}{\phi} = \pm\frac{B_x - A_y}{A - B}$$

Левая часть уравнения (1.17) является ф-ей только от ξ. Поэтому, количество $\left(B_x - A_y\right)/(A-B)$ в левой часте должно быть ф-ей от ξ, скажем

$$p(\xi) = \frac{B_x - A_y}{A - B}.$$

То, f удовлетворяет ОДУ

$$\phi' = \pm\,p(\xi)\,\phi,$$

которое ОДУ с разделяющимися переменными, которое можем решать и получить

$$\phi = c\,e^{\pm\int p(\xi)\,d\xi}.$$

У нас есть следующее.

Предложение 4.3 *Если количество $\left(B_x - A_y\right)/(A-B)$ является ф-ей от $\xi = x \pm y$, т.е.*

$$\boxed{\frac{B_x - A_y}{A - B} = p(\xi)},$$

то ф-я

$$\boxed{f(\xi) = e^{\pm\int p(\xi)\,d\xi}},$$

является множителем Эйлера для ОДУ (1.14).

Пример 4.3 Найти общее решение ОДУ

$$x^2 + 2\,x\,y + \left(x^2 + 3\,x\,y + y^2\right) \frac{d y}{d x} = 0. \tag{1.24}$$

Решение:

У нас есть $A(x,\ y) = x^2 + 2\,x\,y$ и $B(x,\ y) = x^2 + 3\,x\,y + y^2$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2\,x,\quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2\,x + 3\,y \;\Rightarrow\; \frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x},$$

поэтому, (1.24) не является ОДУ в полных дифференциалах.

Количество

$$\frac{B_x - A_y}{A - B} = \frac{3\,y}{-x\,y - y^2} = \frac{-3}{x + y} = p(\xi),\ \ \xi := x + y.$$

То, согласно предложению 4.3, множитель Эйлера будет

$$f(\xi) = e^{\int p(\xi)\,d\xi} = e^{-3\int \frac{1}{\xi}\,d\xi} = e^{-3\ln\xi} = \xi^{-3}.$$

Умножаем обе части ОДУ (1.18) на x:

$$(1.18) \overset{\cdot\xi^{-3}}{\Longrightarrow} \frac{x^2 + 2\,x\,y}{(x+y)^3} + \frac{x^2 + 3\,x\,y + y^2}{(x+y)^3}\,\frac{d y}{d x} = 0. \tag{1.25}$$

Ставим $\tilde{A}(x,\ y) = \frac{x^2+2\,x\,y}{(x+y)^3}$ и $\tilde{B}(x,\ y) = \frac{x^2+3\,x\,y+y^2}{(x+y)^3}$.

$$\partial_y \tilde{A} = \frac{-x^2 - 4\,x\,y}{(x+y)^4},\quad \partial_x \tilde{B} = \frac{-x^2 - 4\,x\,y}{(x+y)^4}.$$

Поэтому, ОДУ (1.25) является ОДУ в полных дифференциалах. То есть, общее решение его будет:

$$H(x,\ y) = C,$$

где $H(x,\ y)$ удовлетворяет следую систему дифференциалых уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} H(x,\ y) = \frac{x^2+2\,x\,y}{(x+y)^3} \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x,\ y) = \frac{x^2+3\,x\,y+y^2}{(x+y)^3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(x,\ y) = \int \frac{x^2+2\,x\,y}{(x+y)^3}\, dx + c_1(y) = \ln(x+y) + \frac{y^2}{2\,(x+y)^2} + c_1(y) \\ H(x,\ y) = \int \frac{x^2+3\,x\,y+y^2}{(x+y)^3}\, dy + c_2(x) = \ln(x+y) - \frac{x\,(x+2\,y)}{2\,(x+y)^2} + c_2(x) \end{cases}$$

Но, $\frac{x\,(x+2\,y)}{2\,(x+y)^2} = \frac{x^2+2\,x\,y+y^2-y^2}{2\,(x+y)^2} = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2\,(x+y)^2}$, поэтому

$$\begin{cases} H(x,\ y) = \ln(x+y) + \frac{y^2}{2\,(x+y)^2} + \underline{c_1(y)} \\ H(x,\ y) = \ln(x+y) + \frac{y^2}{2\,(x+y)^2} \underline{-\frac{1}{2}} + c_2(x) \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $c_2(x) = 0$ и $c_1(y) = -1/2$. Поэтому, $H(x,\ y) = \ln(x+y) + \frac{y^2}{2\,(x+y)^2} - \frac{1}{2}$, и общее решение ОДУ (1.18) будет

$$\ln(x+y) + \frac{y^2}{2\,(x+y)^2} - \frac{1}{2} = C,$$

которое является решением в неявным виде.