5

Введение в линейные ОДУ 2-го порядка

1. Цели

В конце этой главы вы будете:

1. знать важную терминологию по линейным уравнениям 2-го порядка;

2. знать что такое принцип суперпозиции для линейных уравнений;

3. знать что такое детерминант Вронского, и как его вычислять

4. понимать взаимосвязь между детерминантом Вронского и линейной зависимостью;

5. уметь использовать теорему Абеля для нахождения из данного частного решения ОДУ второго линейно независимого решения;

6. знать некоторые теоремы о решении линейных ОДУ 2-го порядка.

1. Примеры линейных ОДУ 2-го порядка

Самым простым линейным ОДУ 2-го порядка является следующее уравнение

$$y''(x) = 0, \tag{1.1}$$

которое можно проинтегрировать два раза:

$$y'(x) = c_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = c_1 x + c_2}. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) — общее решение ОДУ (1.1) и является двухпараметрическим семейством линий на плоскости с параметрами c_1 (градиент) и c_2. Это видно на рисунке 1.1.

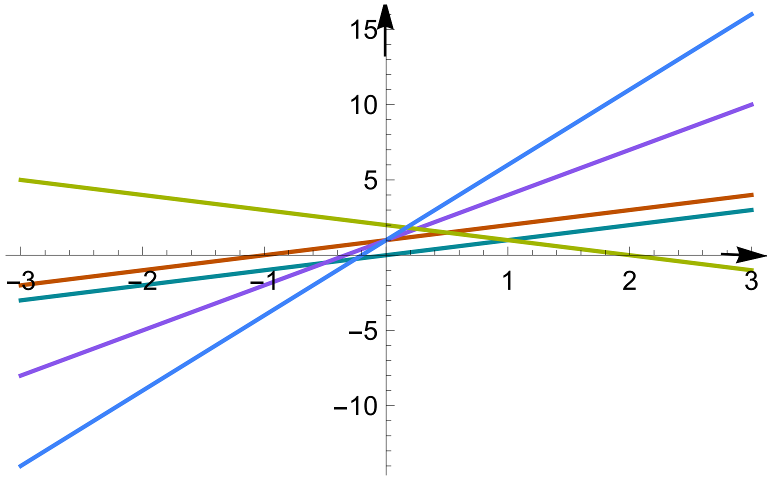

Рис. 1.1: *Линии* $y = c_1 x + c_2$ *на плоскости.*

Иногда мы хотим найти параметры c_1 и c_2, и для этого нам нужны два условия. Например, нужно найти решение ОДУ (1.1), которое удовлетворяет условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Другими словами, решить *задачу на начальные значения*:

$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

Первое условие $y(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. То есть, $y(x) = c_1 x + 1$. Поэтому, $y'(x) = c_1$. Тогда, из второго условия $y'(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2$, и решение задачи на начальные значения будет

$$y(x) = 2x + 1.$$

Для определения параметров c_1 и c_2 в (1.2), можем использовать два значения $y(x)$ в двух разных точках. Например, решить ОДУ (1.2) с условиями $y(0) = 1$, $y(1) = 2$:

$$\begin{cases} y''(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases} . \tag{1.4}$$

Проблема (1.4) называется *краевой задачей*.

Линейные ОДУ мы уже видели в матанализе. Например: нужно найти функцию f, для которой $f''(x) = \sin x + 2\pi$ и график которой имеет градиент -1 в точке $A(0, 1)$. Другими словами, найти решение задачи на начальные значения

$$\begin{cases} f''(x) = \sin x + 2\pi \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Для решения задачи у нас есть

$$f'(x) = -\cos x + 2\pi x + c_1 \;\Rightarrow\; f(x) = -\sin x + \frac{\pi}{2} x^2 + c_1 x + c_2. \tag{1.6}$$

которое является общим решением ОДУ $f'' = \sin x + 2\pi$. Кроме того,

$$f(0) = 1 \overset{(1.5)}{\Longrightarrow} c_2 = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = -\sin x + \frac{\pi}{2} x^2 + c_1 x, \;\; f'(x) = -\cos x + \pi x + c_1,$$

и из второго значения

$$f'(0) = -1 \overset{(1.5)}{\Longrightarrow} -1 + c_1 = -1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = -\sin x + \frac{\pi}{2} x^2,$$

которое является общим решением задачи на начальные значения (1.5).

2. Общий вид линейного ОДУ 2-го порядка и классификация

Общий вид линейного ОДУ 2-го порядка

$$a_2(x)\, y''(x) + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x), \quad a_2(x) \not\equiv 0.$$

Мы можем переписать это ОДУ в виде:

$$y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x), \quad a(x) := \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \;\; b(x) = \frac{a_0(x)}{a(x)}, \;\; c(x) := \frac{f(x)}{a(x)}. \tag{1.7}$$

2.1 Классификация

Как классифицировать ОДУ типа (1.7)?

■ **Однородность:** ОДУ (1.7) является однородным, если $c(x) = 0$.

■ **Коэффициенты:** ОДУ (1.7) называется ОДУ с постоянными коэффициентами, если $a(x) = a$ и $b(x) = b$.

2.2 Задача на начальные значения и краевая задача

Как мы уже знаем, общее решение ОДУ 2-го порядка должно иметь два параметра в общем решении. Для того, чтобы определить параметры, нужны два условия.

В том случае, если у нас есть два условия в той же точке, то есть мы рассматриваем следующую систему

$$\begin{cases} y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x) \\ y(x_0) = a \\ y'(x_0) = b \end{cases}, \tag{1.8}$$

тогда (1.3) является ***задачей на начальные значения***.

Теорема 2.1 *Если $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — непрерывны в интервале $I \subseteq \mathbb{R}$, то задача на начальные значения имеет единственное решение.*

Кроме того, в том случае, если у нас есть два условия в двух разных точках, то есть рассматриваем следующую систему

$$\begin{cases} y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x) \\ y(x_0) = a \\ y(x_1) = b \end{cases}, \tag{1.9}$$

тогда (1.3) является ***краевой задачей***.

2.3 Принцип суперпозиции для однородных ОДУ

Функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$ являются частными решениями ОДУ

$$y'' + y = 0. \tag{1.10}$$

в самом деле,

$$y_1'' + y_1 = -\cos x + \cos x = 0, \;\; y_2'' + y_2 = -\sin x + \sin x = 0.$$

Кроме того, каждая линейная комбинация

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

удовлетворяет (1.10)

$$y'' + y = -c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x = 0.$$

Теорема 2.2 *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения однородного ОДУ*

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0, \tag{1.11}$$

то и линейная комбинация их $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ является решением ОДУ (1.11)

Доказательство:

У нас есть

$$y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2, \quad y' = c_1\, y_1' + c_2\, y_2', \;\; y'' = c_1\, y_1'' + c_2\, y_2''.$$

Подставляем в (1.11)

$$\begin{aligned} y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y &= \left(c_1\, y_1'' + c_2\, y_2''\right) + a(x)\,(c_1\, y_1' + c_2\, y_2') + b(x)\,(c_1\, y_1 + c_2\, y_2) \\ &= c_1\left(y_1'' + a(x)\, y_1' + b(x)\, y_1\right) + c_2\left(y_2'' + a(x)\, y_2' + b(x)\, y_2\right) \end{aligned}$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0$$
$$=$$
0. ■

Линейная комбинация $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ является общим решением *данного ОДУ вследствие* ***принципа суперпозиции***.

3. Детерминант Вронского и линейно независимость решений

У нас есть следующее определение.

Определение 3.1 *Пусть заданы функции $f(x)$ и $g(x)$. Детерминант вида*

$$\det\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix}$$

называется ***детерминантом Вронского*** *и обозначается через $W[f, g]\,(x)$. То есть, мы будем писать*

$$\boxed{W[f, g]\,(x) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = f'g - f'g}.$$

Пример 3.1 Найти детерминант Вронского функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$.

Решение:

У нас есть

$$W[f, g]\,(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1.$$

■

Теорема 3.1 *Пусть f и g —дифференцируемые функции в интервале $I \subseteq \mathbb{R}$.*

A) *Если f и g — линейно зависимы, то $W[f, g]\,(x) = 0$, $\forall x \in I$.*

B) *Если существует $x_0 \in I$ такое, что $W[f, g]\,(x_0) \neq 0$, то f и g являются линейно независимыми.*

Доказательство:

A) Если f и g — линейно зависимы, то существует $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что

$$f(x) = \lambda\, g(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \lambda\, g'(x).$$

Поэтому,

$$W[f,\, g]\,(x) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda g & g \\ \lambda g' & g' \end{vmatrix} = \lambda\, g\, g' - \lambda\, g'\, g = 0, \;\; \forall\, x \in I.$$

B) Пусть $x_0 \in I$ такое, что $W[f,\, g]\,(x_0) \neq 0$. Пусть, еще, $c_1,\; c_2$ такие, что:

$$c_1\, f(x) + c_2\, g(x) = 0, \;\; \forall\, x \in I. \tag{1.12}$$

Функции f и g —дифференцируемы, поэтому

$$c_1\, f'\,(x) + c_2\, g'\,(x) = 0, \;\;\; \forall\, x \in I. \tag{1.13}$$

В точке $x_0 \in I$, уравнения (1.12), (1.13)

$$\begin{cases} c_1\, f\,(x_0) + c_2\, g(x_0) = 0 \\ c_1\, f'\,(x_0) + c_2\, g'\,(x_0) = 0 \end{cases}. \tag{1.14}$$

Система (1.14) является линейной системой для $c_1,\; c_2$. Так как $W[f,\, g]\,(x_0) \neq 0$ (детерминант коэффициентов), система имеет единственное решение $c_1 = c_2 = 0$. Поэтому, f и g являются линейно независимыми.

Пример 3.2 Докажите, что следующие функции являются линейно независимыми.

1. $f(x) = \sin x,\, g(x) = \cos x$;

2. $f(x) = e^x,\, g(x) = e^{-x}$;

3. $f(x) = x^2 + 1,\, g(x) = x$;

Решение:

1. $W[f,\, g]\,(x) = -1 \not\equiv 0$ (пример 3.1) $\Rightarrow$ f и g линейно независимыми.

2. $W[f,\, g]\,(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \not\equiv 0$ (пример 3.1) $\Rightarrow$ f и g линейно независимыми.

3. $W[f,\, g]\,(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ 2\,x & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 1 - 2\,x^2 = 1 - x^2 \not\equiv 0 \;\;\; \Rightarrow f$ и g линейно независимыми.

Понятно, что для $x = 1,\, -1$ детерминант Вронского равняется нулю. Но, это достаточно, что не всегда равен нулю.

Согласно теореме 3.1, **справедливы следующие утверждения:**

- Если f и g — линейно зависимы $\Longrightarrow W[f,\, g]\,(x) = 0$.
- Если $W[f,\, g]\,(x) \neq 0 \Longrightarrow f$ и g — линейно независимы.

но следующие утверждения **не справедливы:**

- $W[f, g](x) = 0 \Longrightarrow f$ и g — линейно зависимы .
- f и g — линейно независимы $\Longrightarrow W[f, g](x) \neq 0$.

Например, пусть дифференцируемые функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \text{ и } g(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases},$$

являются линейно независимыми в $\mathbb{R}$. Действительно, по определению линейно независимости, в интервале $(0, +\infty)$:

$$\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot x^3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Но, $W[f, g] = 0 \; \forall x \in (-\infty, 0]$.

“Линейная зависимость” и “$W[f, g](x) = 0$” —эквиваленты если f и g являются решениями однородного линейного ОДУ 2-го порядка. В частности, у нас есть следующая теорема.

Теорема 3.2 *Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения однородного ОДУ*

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0, \tag{1.15}$$

тогда

y_1 и y_2 —линейно зависимы $\Leftrightarrow W[y_1, y_2](x) = 0, \;\forall x \in I.$

Доказательство:

$(\Longrightarrow)$ Мы уже доказали в теореме 3.1.

$(\Longleftarrow)$ Пусть $W[y_1, y_2](x) = 0, \forall x \in I.$ Докажем, что y_1 и y_2 —линейно независимы.

Нужно доказать, что

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \neq 0: \;\lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x) = 0.$$

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in I$, и положим

$$\begin{aligned} \lambda_1\, y_1(x_0) + \lambda_2\, y_2(x_0) &= 0, \\ \lambda_1\, y_1'(x_0) + \lambda_2\, y_2'(x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Эта линейная система для λ_1, λ_2. Так как $x_0 \in I$,

$$W[y_1, y_2](x_0) = 0.$$

То есть, система (1.16) имеет решения отличные от ноля. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ решения

(1.16). Положим

$$y(x) = \lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x).$$

Этот $y = y(x)$ удовлетворяет ОДУ (1.15) как линейная комбинация решений y_1 и y_2. Кроме того, y=y(x) удовлетворяет условиям

$$y(x_0) = 0, \;\; y'(x_0) = 0,$$

согласно (1.16). Поэтому по теореме о единственном решении задачи на начальные значения (2.1)., $y(x)$ —единственное решение ОДУ (1.15). Но, так как, нулевое решение также удовлетворяет ОДУ (1.15),

$$y(x) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda_1\, y_1(x) + \lambda_2\, y_2(x) = 0 \;\text{ и }\; \lambda_1,\, \lambda_2 \neq 0.$$

Поэтому y_1 и y_2 являются линейно независимыми.

■

Следствие 3.1 *Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения однородного ОДУ (1.15). То,*

$$y_1 \text{ и } y_2 \text{ —линейно независимы } \;\Leftrightarrow\; W[y_1,\, y_2](x) \neq 0, \;\; \forall\, x \in I.$$

■

Теорема 3.3 (Абеля) *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны в интервале $I \subseteq \mathbb{R}$, и $y_1(x)$, $y_2(x)$ решения однородного ОДУ (1.15). Тогда, детерминант Вронского удовлетворяет следующему ОДУ*

$$W' + a(x)\, W = 0. \tag{1.17}$$

Поэтому

$$\boxed{W[y_1,\, y_2](x) = W[y_1,\, y_2](x_0)\, e^{A(x)-A(x_0)}, \;\text{ где } A(x) := -\int a(x)\, dx}. \tag{1.18}$$

Доказательство:

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ —решения ОДУ (1.15):

$$\begin{cases} y_1'' + a(x)\, y_1' + b(x)\, y_1 = 0, \\ y_2'' + a(x)\, y_2' + b(x)\, y_2 = 0, \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на y_2 и второе на y_1

$$\begin{cases} y_1'' y_2 + a(x)\, y_1' y_2 + b(x)\, y_1 y_2 = 0, \\ y_2'' y_1 + a(x)\, y_2' y_1 + b(x)\, y_2 y_1 = 0, \end{cases}$$

и вычитаем

$$y_1'' y_2 - y_2'' y_1 + a(x)\,(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 0. \qquad (1.19)$$

Но

$$W[y_1, y_2](x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} W[y_1, y_2](x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Поэтому, можем переписать (1.18) в виде (1.17), где $W = W[y_1, y_2](x)$.

ОДУ (1.17) является ОДУ в полных дифференциалах:

$$\frac{W'}{W} = -a(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{W'}{W}\, dt = -\int a(x)\, dx \;\Rightarrow \ln\left| W \right| = -\int a(x)\, dx + c$$

$$\Rightarrow\; W[y_1, y_2](x) = c_1\, e^{-\int a(x)\, dx}, \;\; c_1 := \pm e^{-c}.$$

Для $x = x_0 \in I$:

$$W[y_1, y_2](x_0) = c_1\, e^{A(x_0)} \;\Rightarrow\; c_1 = e^{-A(x_0)}\, W[y_1, y_2](x_0), \;\; A(x) := -\int a(x)\, dx.$$

Поэтому, $W[y_1, y_2](x)$ —дано из (1.18). ■

Следствие 3.2 *Из теоремы Абеля следует, что*

- Детерминант Вронского будет либо всегда ($\forall\, x \in I$) нулевым, либо всегда отличным от ноля.
- Зная одно решение однородного ОДУ (1.15), мы можем построить еще одно линейно независимо, используя формулу Абеля (1.18), то есть используя:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}.$$

Пример 3.3 Пусть

$$y'' + 4\, y = 0.$$

A) Проверьте, что $y_1(x) = \sin(2\, x)$ является частным решением.

B) Найдите второе частное решение линейно независимое от y_1.

C) Найдите общее решение ОДУ.

Решение:

A) У нас есть

$$y_1 = \sin(2x) \Rightarrow y_1' = 2\cos(2x) \Rightarrow y_1'' = -4\sin(2x),$$

Поэтому,

$$y_1'' + 2y_1 = -4\sin(2x) + 4\sin(2x) = 0.$$

B) Согласно теореме Абеля для любых линейно независимых функций y_1 и y_2, их детерминант Вронского удовлетворяет ОДУ

$$W' + a(x)\,W = 0.$$

А в этом случае

$$a(x) = 0 \Rightarrow A(x) = -\int a(x)\,dx = 0,$$

поэтому, W удовлетворяет

$$W' = 0 \Rightarrow W[y_1, y_2](x) = c \Rightarrow \begin{vmatrix} \sin(2x) & y_2 \\ 2\cos(2x) & y_2' \end{vmatrix} = c_1 \Rightarrow \sin(2x)\,y_2' - 2\cos(2x)\,y_2 = c_1,$$

которое можем переписать как

$$y_2' - 2\,\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,y_2 = \frac{c_1}{\sin(2x)},$$

и это линейное ОДУ 1-го порядка. Множитель Эйлера

$$p(x) = -2\,\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} \Rightarrow R(x) = e^{-2\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,dx} = e^{-\ln(\sin(2x))} = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Поэтому,

$$\left(\frac{1}{\sin(2x)}\,y_2\right)' = \frac{c_1}{\sin^2(2x)} \Rightarrow \frac{1}{\sin(2x)}\,y_2 = \int \frac{c_1}{\sin(2x)} + c_1 = \frac{-c_1}{2}\,\mathrm{ctan}(2x) + c_2$$

$$\Longrightarrow y_2(x) = \frac{-c_1}{2}\cos(2x) + c_2\sin(2x).$$

Выбираем, например, $c_1 = -2$, $c_0 = 0$ и находим, что $y_2 = \cos(2x)$ —частное решение ОДУ линейно независимое от y_1.

C) Функции $y_1 = \sin(2x)$ и $y_2 = \cos(2x)$ являются линейно независимыми решениями однородного ОДУ 2-го порядка, поэтому являются базисом двухмерного пространства решений однородного ОДУ второго порядка и поэтому, каждый элемент пространства, $y(x)$, можем выразить как

$$y(x) = c_1 \cos(2\,x) + c_2 \sin(2\,x),$$

которое и является общим решением ОДУ.

4. Общее решение линейного однородного ОДУ 2-го порядка

Для нахождения общего решения линейного, однородного ОДУ 2-го порядка,

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0,\ \ x \in I, \tag{1.20}$$

у нас есть следующая теорема.

Теорема 4.1 *Пусть*

1. *функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны в интервале $I \subseteq \mathbb{R}$,*

2. *$y_1(x)$, $y_2(x)$ —линейно независимые решения однородного ОДУ (1.15).*

Тогда общее решение ОДУ (1.20) будет вида

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x). \tag{1.21}$$

Доказательство:

Достаточно будет доказать, что для каждого решения ОДУ (1.20), $f(x)$, можно найти пару параметров c_1 и c_2 такие, что

$$f(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x).$$

Выбираем одну точку $x_0 \in I$, и ставим

$$a := f(x_0), \quad b := f'\,(x_0).$$

Теперь рассматриваем множество решений (1.21) и исследуем, какие члены множества удовлетворяют условиям

$$y(x_0) = a, \quad y'\,(x_0) = b. \tag{1.22}$$

Последние условия перепишем в виде

$$\begin{aligned} c_1\,y_1(x_0) + c_2\,y_2(x_0) &= a, \\ c_1\,y_1'(x_0) + c_2\,y_2'(x_0) &= b. \end{aligned}$$

Умножаем первое на $y_2'(x_0)$, второе на $y_2(x_0)$ и вычитаем:

$$c_1[y_1(x_0)\,y_2'(x_0) - y_1'(x_0)\,y_2(x_0)] = a\,y_2'(x_0)\,b\,y_2(x_0),$$

Потом, умножаем первое на $y_1'(x_0)$, второе на $y_1(x_0)$ и вычитаем:

$$c_2[y_2(x_0)\,y_1'(x_0) - y_2'(x_0)\,y_1(x_0)] = a\,y_1'(x_0) - b\,y_1(x_0).$$

Последние два уравнения можем переписать, используя детерминант Вронского

$$c_1\, W[y_1,\, y_2]\,(x_0) = a\, y_2'(x_0)\; b\, y_2(x_0), \qquad c_2\, W[y_1,\, y_2]\,(x_0) = a\, y_1'(x_0) - b\, y_1(x_0). \tag{1.23}$$

Но, по условиям теоремы 3.2, решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ —линейно независимы, поэтому $W[y_1, y_2]\,(x_0) \neq 0$. То есть, c_1 и c_2 определяются единственным образом из (1.23). Поэтому, существуют c_1 и c_2 такие, что решение (1.21) удовлетворяет условиям (1.23). Кроме того, $f(x)$ также удовлетворяет той же задаче на начальные значения, и так как решение —единственное, то $f(x) = y(x)$, $x \in I$.

■

Определение 4.1: *Множество решений* $\{y_1(x), y_2(x)\}$ *называется* ***фундаментальным***.

Предложение 4.1: Фундаментальное множество решений $\{y_1(x), y_2(x)\}$ для ОДУ 2-го порядка (1.20) является базисом пространства решений этого ОДУ. Поэтому, можем выразить каждый элемент, $y(x)$, пространства решений ОДУ (1.20) как в (1.21).