6

Методы решения линейных ОДУ 2-го порядка

1. Цели

В конце этой главы вы будете уметь:

1. решать линейные ОДУ 2- порядка методом понижения порядка;

2. решать однородные и неоднородные ОДУ

1. Метод понижения порядка

Мы увидим, что иногда мы можем преобразовывать ОДУ 2-го порядка в ОДУ 1-го порядка, которые мы можем решать. Вообще в математике, самый обычный метод решения:это

Сведение задачи к известной, которую уже умеем решать.

Пусть ОДУ 2-го порядка

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x), \quad y = y(x), \tag{1.1}$$

где функции $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ —непрерывны в интервале I. Мы увидем, что мы можем решить ОДУ (1.1) если мы знаем одно частное решение, y_1, соответствующего однородного ОДУ

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0. \tag{1.2}$$

Предположим, что

$$y(x) = u(x)\,y_1(x) \tag{1.3}$$

является решением ОДУ (1.1), и мы узнаем при каких условиях. Дифференцируем (1.3) два раза:

$$y' = u'\,y_1 + u\,y_1' \;\Rightarrow\; y'' = u''\,y_1 + 2\,u'\,y_1' + u\,y_1'', \tag{1.4}$$

и подставляем в (1.1):

$$u''\,y_1 + 2\,u'\,y_1' + u\,y_1'' + a(x)\,(u'\,y_1 + u\,y_1') + b(x)\,u\,y_1 = c(x).$$

Но y_1 — частное решение однородного ОДУ (1.2), то есть $y_1'' + a(x)\,y_1' + b(x)\,y_1 = 0$. Поэтому,

$$u''\,y_1 + 2\,u'\,y_1' + a(x)\,u'\,y_1 = c(x) \;\Rightarrow\; u'' + (2\,y_1' + a(x)\,y_1)\,u' = c(x), \tag{1.5}$$

которое является ОДУ 2-го порядка для $u = u(x)$. Замечаем, что в уравнении (1.5) отсуствует функця $u = u(x)$. Это подсказывает подставить

$$u'(x) = v(x) \;\Rightarrow\; u''(x) = v'(x) \tag{1.6}$$

и при этом можем переписать (1.5) как

$$v' + (2\,y_1' + a(x)\,y_1)\,v = c(x), \tag{1.7}$$

Это уравнение является линейным ОДУ 1-го порядка, которое можем решить. Для него множитель Эйлера имеет вид

$$R(x) = e^{\int (2\,y_1' + a(x)\,y_1)\,dx},$$

Умножаем обе части (1.7) на это выражение. Находим

$$(R(x)\,v)' = R(x)\,c(x).$$

Интегрируем по x и потом решаем для $v = v(x)$

$$v(x) = \frac{1}{R(x)}\Big[\int R(x)\,c(x)\,dx + c_1\Big].$$

Проинтегрируем уравнение $u'(x) = v(x)$, чтобы найти $u(x)$:

$$u(x) = \int \frac{1}{R(x)}\Big[\int R(x)\,c(x)\,dx + c_1\Big]\,dx \; + c_2.$$

Поэтому,

$$y(x) = \Big\{\int \frac{1}{R(x)}\Big[\int R(x)\,c(x)\,dx + c_1\Big]\,dx \; + c_2\Big\}\,y_1(x),$$

является общим решением ОДУ (1.1).

Итак, если мы знаем одно частное решение линейного однородного ОДУ 2-го порядка (1.2), мы можем решить ОДУ (1.1) вышеупомянутым методом, который называется

методом понижения порядка.

Метод состоит из следующих шагов:

Шаг-1: Подставим $y(x) = u(x)\,y_1(x)$, где $y_1(x)$ — частное решение однородного ОДУ (1.2).

Шаг-2: ОДУ (1.1) преобразуется в ОДУ 2-го порадка для u, где сама функця u отсутствует.

Шаг-3: Подставим $u'(x) = v(x)$, и ОДУ 2-го порадка для u преобразуется в линейное ОДУ 1-го порядка для $v = v(x)$.

Шаг-4: Находим общее решение ОДУ для $v(x)$ и получаем выражение вида $v = v(x,\ c_1)$.

Шаг-5: Находим $u(x)$ интегрируя $u'(x) = v(x)$ по x. То есть $u(x) = \int v(x,\ c_1) + c_2$.

Шаг-6: Общее решение будет получено из $y(x) = u(x)\,y_1(x)$. То есть,
$y(x) = \left[\int v(x,\ c_1) + c_2\right] y_1(x)$.

Замечание 1.1 Метод работает и в том случае, если ОДУ (1.1) дано в виде

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = d(x).$$

Пример 1.1 Проверьте, что $y_1(x) = e^x$ является частным решением соответствующего однородного ОДУ

$$x\,y'' - (x+1)\,y' + y = 1, \tag{1.8}$$

и найдите его общее решение.

Решение 1.1:

Докажем, что $x\,y_1'' - (x+1)\,y_1' + y_1 = 0$. Действительно,

$$x\,y_1'' - (x+1)\,y_1' + y_1 = x\,e^x - (x+1)\,e^x + e^x = 0.$$

Пусть теперь

$$y(x) = u(x)\,e^x.$$

То есть

$$y' = u'\,e^x + u\,e^x,\quad y'' = u''\,e^x + 2\,u'\,e^x + u\,e^x,$$

и подставляя в (1.7):

$$x\,(u''\,e^x + 2\,u'\,e^x + u\,e^x) - (x+1)\,(u'\,e^x + u\,e^x) + u\,e^x = 1$$

из которого получаем

$$x\,u'' + (x-1)\,u' = e^{-x}. \tag{1.9}$$

В уравнении (1.9) отсуствует функция $u = u(x)$. Подставляем

$$v = u' \;\Rightarrow\; v' = u'', \tag{1.10}$$

и (1.9) преобразуется в

$$x\,v' + (x-1)\,v = e^{-x} \;\Rightarrow\; v' + \frac{x-1}{x}\,v = \frac{e^{-x}}{x}, \tag{1.11}$$

которое является линейным ОДУ 1-го порядка для v:

$$p(x) = \frac{x-1}{x} \;\Rightarrow\; R(x) = e^{\int \frac{x-1}{x}\,dx} = e^{x-\ln x} = \frac{e^x}{x}.$$

Умножаем обе части (1.11) на $R(x)$:

$$\left(\frac{e^x}{x}\,v\right)' = \frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{e^x}{x}\,v = \int \frac{1}{x^2}\,dx + c_1 = \frac{-1}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow\; v(x) = -e^{-x} + x\,c_1\,e^{-x}.$$

Поэтому, из (1.10) имеем

$$v = u' \;\Rightarrow\; u(x) = \int v(x)\,dx + c_2 = e^{-x} - (x\,+1)\,c_1\,e^{-x} + c_2.$$

Наконец получаем общее решение (1.8) в виде

$$y(x) = u(x)\,e^x \;\Rightarrow\; y(x) = 1 - (x+1)\,c_1 + c_2.$$

Пример 1.2 a) Найдите $a \in \mathbb{R}$ такое, что $y_1(x) = e^{a\,x}$ является частным решением соответствующего однородного ОДУ

$$x\,y'' + 2\,(x+1)\,y' + (x+2)\,y = x^2\,e^{-x}. \tag{1.12}$$

b) Найдите общее решение (1.12) и решение краевой задачи (1.12) для условий $y(1) = y(2) = 0$.

Решение 1.2:

a) У нас есть

$$y_1 = e^{a\,x} \;\Rightarrow\; y_1' = a\,e^{a\,x} \;\Rightarrow\; y_1'' = a^2\,e^{a\,x}.$$

Требуем чтобы

$$x\,y_1'' + 2\,(x+1)\,y_1' + (x+2)\,y_1 = 0$$

$$\Rightarrow\; x\,a^2\,e^{a\,x} + 2\,(x+1)\,a\,e^{a\,x} + (x+2)\,e^{a\,x} = 0.$$

Так как $e^{a\,x} > 0$:

$$a^2\,x + 2\,(x+1)\,a + x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \left(a^2 + 2\,a + 1\right)x + 2\,a + 2 = 0.$$

Поскольку это уравнение справедливо для каждого $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a^2 + 2\,a + 1 = 0 \\ 2\,a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\; a = -1.$$

То есть, $y_1 = e^{-x}$ является частным решением соответствующего однородного ОДУ (1.12).

b) Пусть теперь

$$y(x) = u(x)\,e^{-x}.$$

То есть,

$$y' = u'\,e^{-x} - u\,e^{-x},\;\; y'' = u''\,e^{-x} - 2\,u'\,e^{-x} + u\,e^{-x},$$

и поlставляя в (1.12):

$$x\,(u''\,e^{-x} - 2\,u'\,e^{-x} + u\,e^{-x}) + 2\,(x+1)\,(u'\,e^{-x} - u\,e^{-x}) + (x+2)\,u\,e^{-x} = x^2\,e^{-x}$$
$$\xRightarrow{e^{-x}>0} x\,(u'' - 2\,u' + u) + 2\,(x+1)\,(u' - u) + (x+2)\,u = x^2$$

получаем

$$x\,u'' + 2\,u' = x^2 \tag{1.13}$$

В уравнение (1.13) отсуствует функция $u = u(x)$. Подставим,

$$v = u' \;\Rightarrow\; v' = u'', \tag{1.14}$$

и (1.13) преобразуется в

$$v' + \frac{2}{x}\,v = x. \tag{1.15}$$

Это линейное ОДУ 1-го порядка для v:

$$p(x) = \frac{2}{x} \;\Rightarrow\; R(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = x^2.$$

Умножаем обе части (1.15) на $R(x)$:

$$\left(x^2\,v\right)' = x^3 \;\Rightarrow\; x^2\,v = \int x^3\,dx + c_1 = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\Rightarrow\ v(x) = \frac{x^2}{4} + c_1\, x^{-2}.$$

Поэтому, из (1.12)

$$v = u' \ \Rightarrow\ u(x) = \int v(x)\, dx + c_2 = \frac{x^3}{12} - \frac{c_1}{x} + c_2.$$

Наконец общее решение (1.8) будет: вида

$$y(x) = \left(\frac{x^3}{12} - \frac{c_1}{x} + c_2\right) e^{-x}.$$

Используем условия $y(1) = y(2) = 0$ и определяем c_1 и c_2.

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{12} - c_1 + c_2\right) e^{-1} = 0 \\ \left(\frac{8}{12} - \frac{c_1}{2} + c_2\right) e^{-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = \frac{1}{12} \\ c_1 - 2\, c_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow\ c_1 = \frac{-7}{6},\ c_2 = \frac{-5}{4}.$$

Поэтому решение краевой задачи будет иметь вид:

$$y(x) = \left(\frac{x^3}{12} + \frac{7}{6\,x} - \frac{5}{4}\right) e^{-x}.$$

2. Линейные ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы рассматриваем ОДУ следующего вида

$$a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = d(x),\ \ x \in I \subset \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2.1 Однородные ОДУ

В этом параграфе мы рассматриваем случай $d(x) = 0$, то есть однородные линейные ОДУ 2-го порядка вида

$$a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0. \tag{1.17}$$

Мы уже знаем, что для решения ОДУ (1.17), достаточно найти два линейно независимых решения y_1 и y_2, и общее решение будет иметь вид

$$y(x) = c_1\, y_1 + c_2\, y_2.$$

Ищем решения ОДУ (1.17) вида $y(x) = e^{\lambda x}$. То есть

$$y(x) = e^{\lambda x}\ \Rightarrow\ y'(x) = \lambda\, e^{\lambda x}\ \Rightarrow\ y''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda x},$$

которые подставляем в (1.17):

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0 \;\Rightarrow\; e^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$$

$$\xrightarrow{e^{\lambda x}>0} \boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}. \tag{1.18}$$

Полином (1.18) называется ***характерическим полиномом****, а уравнение* (1.18) называется ***характерическим уравнением***. Решение (1.18) имеет вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Для решений характерического уравнения, различаем следующие случаи:

■ $D > 0: \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \; \lambda_1 \neq \lambda_2$. Поэтому, два решения будутиметь вид:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ и } y_2 = e^{\lambda_2 x},$$

и будут линейно независимы. Действительно

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0, \text{ так как } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Поэтому общее решение будет иметь вид

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

■ $D = 0: \; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$. Поэтому, одно решение будет иметь вид:

$$y_1(x) = e^{\lambda x}.$$

Но нужно найти еще одно линейно независимое решение $y_2(x)$. Функция

$$y_2(x) = x e^{\lambda x}$$

удовлетворяет ОДУ (1.17). В самом деле

$$y_2' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}, \;\; y_2'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}$$

поэтому,

$$a y_2''(x) + b y_2'(x) + c y(x) = a\left(2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x}\right) + b\left(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}\right) + c x e^{\lambda x} =$$

$$= e^{\lambda x}\left[\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)x + 2a\lambda + b\right] \overset{\lambda = \frac{-b}{2a}}{=} e^{\lambda x} \cdot 0 = 0.$$

Кроме этого,

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} = e^{\frac{-b}{a} x} \neq 0,$$

поэтому y_1 и y_2 —линейно независимы.

То есть, общее решение в этом случае будет

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}.$$

■ $D < 0 : \lambda = \alpha + i\beta,\ \overline{\lambda} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C},\ \beta \neq 0$. Поэтому, два решения будут иметь вид :

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta) x} \text{ и } y_2 = e^{(\alpha - i\beta) x},$$

и являются линейно независимыми. В самом деле

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{(\alpha + i\beta) x} & e^{(\alpha - i\beta) x} \\ (\alpha + i\beta) e^{(a + i b) x} & (\alpha - i\beta) e^{(\alpha - i\beta) x} \end{vmatrix} = -2\beta i e^{2\alpha x} \neq 0, \text{ так как } \beta \neq 0.$$

Поэтому общее решение будет иметь вид

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha + i\beta) x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta) x} = e^{\alpha x}\left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right).$$

Теперь мы можем упростить выражение $e^{a x}\left(c_1 e^{i b x} + c_2 e^{-i b x}\right)$. В самом деле

$$c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x} = c_1[\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] + c_2[\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)] =$$
$$= \underbrace{(c_1 + c_2)}_{C_1} \cos(\beta x) + \underbrace{i (c_1 - c_2)}_{C_2} \sin(\beta x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x).$$

Поэтому, общее решение будет иметь вид

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

<u>*Итак*</u>, решение линейного, однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами состоит из двух шагов:

Шаг-1: Рассматриваем характерическое уравнение

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{1.19}$$

которое решаем и находим его корни.

Шаг-2: Различаем следующие случаи для решений (1.19).

■ $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае, общее решение будет

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}.$$

■ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. В этом случае, общее решение будет

$$\boxed{y(x) = (c_1 + c_2\, x)\, e^{\lambda\, x}}.$$

■ $\lambda = a + i\, b,\ \overline{\lambda} = a - i\, b \in \mathbb{C}$. В этом случае, общее решение будет

$$\boxed{y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x}.$$

Пример 2.1 Найти решение начальной задачи

$$\begin{cases} y'' + 3\, y' + 2\, y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}. \tag{1.20}$$

Решение:

Характерическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3\,\lambda + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2.$$

Поэтому, $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{-2\,x}$ —линейно зависимы решения, и общее решение будет

$$y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2\,x}.$$

Для решения начальной задачи (1.20), нужно определить параметры c_1 и c_2 через условия:

$$y(0) = 0 \ \Rightarrow\ c_1 + c_2 = 0 \ \Rightarrow\ c_1 = -c_2.$$

Для использования второго условия:

$$y'(x) = -c_1\, e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-2\,x},$$

$$y'(0) = 3 \ \Rightarrow\ -c_1 - 2\, c_2 = 3 \ \Rightarrow\ c_2 - 2\, c_2 = 3 \ \Rightarrow\ c_2 = -3,\ c_1 = 3.$$

Поэтому решение начальной задачи (1.20):

$$y(x) = 3\, e^{-x} - 3\, e^{-2\,x}.$$

Пример 2.2 Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} 4\, y'' + 4\, y' + 17\, y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\, i\, e^{\frac{-\pi}{4}} \end{cases}. \tag{1.21}$$

Решение:

Характерическое уравнение:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 17 = 0,\ D := -16^2 = (16\,i)^2 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{(16\,i)^2}}{8} = \frac{-1}{2} \pm 2\,i.$$

Поэтому общее решение будет

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Для решения начальной задачи (1.21), нужно определить параметры c_1 и c_2 через условия:

$$y(0) = 2 \ \Rightarrow\ c_1 + c_2 \cdot 0 = 2 \ \Rightarrow\ c_1 = 2.$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,i\,e^{\frac{-\pi}{4}} \ \Rightarrow\ e^{\frac{-\pi}{4}}\left(c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2\,i\,e^{\frac{-\pi}{4}} \ \Rightarrow\ c_2 = 2\,i.$$

Поэтому решение краевой задачи (1.21) будет

$$y(x) = 2\,e^{\frac{-x}{2}}(\cos x + i \sin x) = 2\,e^{\frac{-x}{2}}\,e^{i\,x} \ \Rightarrow\ y(x) = 2\,e^{x\left(i - \frac{1}{2}\right)}.$$

2.2 Неоднородные ОДУ

Пусть линейное ОДУ 2-го порядка с постояными коэффициентами

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = d(x),\ \ d(x) \not\equiv 0. \tag{1.22}$$

Для решения ОДУ (1.22), рассматриваем соответствующее однородное ОДУ

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0, \tag{1.23}$$

и находим его общее решение

$$y_o(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x). \tag{1.24}$$

Если мы знаем одно частное решение $y_ч = y_ч(x)$ неоднородного ОДУ (1.22), то общее его решение будет иметь вид

$$y(x) = y_o(x) + y_ч(x). \tag{1.25}$$

Вопрос в том, можем ли мы всегда найти частное решение ОДУ (1.22). Мы увидем, что иногда возможно “угадать” вид частного решения, который зависит от вида неоднородного члена $d(x)$.

2.2.1 Метод неопределенных коэффициентов для нахождения частного решения ОДУ (1.22) (метод Эйлера)

Это возможно, если $d(x)$ является комбинацией следующих функций: $p_n(x)$ (полином n-го порядкя) $e^{\alpha x}$, $\sin(\beta x)$, $\cos(\beta x)$. Тогда ищем частное решение похожего вида.

В частности, используем следующую таблицу.

Нахождение частного решения	
Тип неоднородного члена	**Ищем частное решение вида**
Полином n-го порядка: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$	$(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0)x^s$
Экспоненциальная ф-я: e^{kx}	$A\, e^{kx} x^s$
Тригонометрическая ф-я: $\sin x$ или $\cos x$	$(A\ \sin x + B\ \cos x)x^s$
Комбинация их: $(a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0)e^{kx}\sin x$ или $(a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0)e^{kx}\cos x$	$(a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0)e^{kx}(A\sin x + B\ \cos x)x^s$
s: кратность неоднородного члена как решение соответствующего однородного ОДУ	

Таблица 2.1 *Таблица для нахождения частного решения.*

Замечание 2.1 (Определение “s”) Параметер “s” будет 0, 1 или 2. В частности, если неоднородный член не совпадает ни с одним из решений y_1 и y_2 соответствующего однородного ОДУ, то $s = 0$. Если же он совпадает, то $s = 1$. А если совпадает и, кроме того, характерическое уравнение имеет одно решение кратности 2, то $s = 2$.

Пример 2.2 Найти решение начальной задачи

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = 4x^2 + 10x + 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} . \tag{1.26}$$

Решение:

Рассматриваем соответствующее однородное ОДУ:

$$y'' + 5y' + 4y = 0. \tag{1.27}$$

и находим его общее решение.

Характерическое уравнение:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,\ D := 25 - 16 = 9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Поэтому общее решение ОДУ (1.27) будет

$$y_o(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-4x}.$$

Неоднородный член в этом случае является полиномом 2-го порядка. Тогда ищем частное решение вида

$$y_1(x) = \left(A x^2 + B x + C\right) x^s.$$

Но неоднородный член ОДУ (1.26) не совпадает с решениями соответствующего однородного ОДУ (1.27). Поэтому $s = 0$, и

$$y_1(x) = A x^2 + B x + C.$$

Дифференцируем

$$y_1'(x) = 2Ax + B,\quad y_1''(x) = 2A,$$

и подставляем в ОДУ (1.26):

$$2A + 5(2Ax + B) + 4\left(A x^2 + B x + C\right) = 4x^2 + 10x + 2$$

$$\Rightarrow\ 4Ax^2 + (10A + 4B)x + 2A + 5B + 4C = 4x^2 + 10x + 2,\ \forall x,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 4 \\ 10A + 4B = 10 \\ 2A + 5B + 4C = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ B = C = 0.$$

Поэтому, $y_1(x) = x^2$, и общее решение ОДУ (1.26) будет

$$y(x) = y_o(x) + y_1(x) \Rightarrow y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-4x} + x^2.$$

Для решения начальной задачи:

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$$

$$y'(x) = -c_1\, e^{-x} - 4c_2\, e^{-4x} + 2x,\ y'(0) = 2 \Rightarrow -c_1 - 4c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -1,\ c_1 = 2.$$

Наконец решение начальной задачи (1.26) будет:

$$\boxed{y(x) = 2\, e^{-x} - e^{-4x} + x^2}.$$

■

Пример 2.3 Найти решение начальной задачи

$$\begin{cases} y'' + 5\,y' + 4\,y = \sin x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} . \tag{1.28}$$

Решение:

Мы уже знаем из Примера 2.2, что общее решение соотвествующего однородного ОДУ будет

$$y_o(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-4\,x}.$$

Неоднородный член: $d(x) = \sin x$. Тогда ищем частное решение вида

$$y_1(x) = (A \sin x + B \cos x)\, x^s.$$

Но $d(x) \not\equiv e^{-x}$, $d(x) \not\equiv e^{-4\,x}$. Поэтому, $s = 0$, и

$$y_1(x) = A \sin x + B \cos x.$$

Дифференцируем

$$y_1'(x) = A \cos x - B \sin x, \quad y_1''(x) = -A \sin x - B \cos x$$

и подставляем в ОДУ (1.28):

$$-A \sin x - B \cos x + 5\,(A \cos x - B \sin x) + 4\,(A \sin x + B \cos x) = \sin x$$

$$\Rightarrow\ (-A - 5\,B + 4\,A) \sin x + (-B + 5\,A + 4\,B) \cos x = \sin x,\ \ \forall\, x,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\,A - 5\,B = 1 \\ 5\,A + 3\,B = 0 \end{cases} \Rightarrow\ A = \frac{3}{34},\ \ B = -\frac{5}{34}.$$

Поэтому

$$y_1(x) = \frac{3}{34} \sin x - \frac{5}{34} \cos x.$$

Отсюда $y_1(x) = x^2$, и общее решение ОДУ (1.26) будет

$$y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-4\,x} + \frac{3}{34} \sin x - \frac{5}{34} \cos x.$$

Для решения начальной задачи:

$$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 - \frac{5}{34} = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = \frac{39}{34} - c_2$$

$$y'(x) = -c_1\, e^{-x} - 4\, c_2\, e^{-4x} + \frac{3}{34}\cos x + \frac{5}{34}\sin x,$$

$$y'(0) = 2 \;\Rightarrow\; -c_1 - 4\, c_2 + \frac{3}{34} = 2 \;\Rightarrow\; c_2 = -\frac{52}{51},\;\; c_1 = \frac{13}{6}.$$

Наконец решение начальной задачи (1.26) будет:

$$\boxed{y(x) = \frac{13}{6}\, e^{-x} - \frac{52}{51}\, e^{-4x} + \frac{3}{34}\sin x - \frac{5}{34}\cos x}.$$

■

Пример 2.4 Найти решение начальной задачи

$$\begin{cases} y'' + 5\, y' + 4\, y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}. \tag{1.29}$$

Решение:

Мы уже знаем из Примера 2.2, что общее решение соотвествующего однородного ОДУ будет иметь вид

$$y_o(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-4x}.$$

Неоднородный член: $d(x) = e^{-x}$. Тогда ищем частное решение вида

$$y_1(x) = A\, e^{-x}\, x^s.$$

Но в этом случае $d(x)$ совпадает с одним из решений соответствующего однородного уравнения. Поэтому $s = 1$, и мы ищем частное решение вида

$$y_1(x) = A\, x\, e^{-x} \;\Rightarrow\; y_1' = A\, e^{-x} - A\, x\, e^{-x} \;\Rightarrow\; y_1'' = -2\, A\, e^{-x} + A\, x\, e^{-x}.$$

Подставляем в (1.29)

$$-2\, A\, e^{-x} + A\, x\, e^{-x} + 5\,(A\, e^{-x} - A\, x\, e^{-x}) + 4\, A\, x\, e^{-x} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow\; -2\, A + A\, x + 5\,(A - A\, x) + 4\, A\, x = 1 \;\Rightarrow\; -2\, A + 5\, A = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; y_1(x) = \frac{1}{3}\, x\, e^{-x}$$

То есть, частным решением является $y_1(x) = \frac{1}{3}\, x\, e^{-x}$. Общее решение (1.29) будет

$$y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-4x} + \frac{1}{3}\, x\, e^{-x}.$$

Определим c_1 и c_2 из условий $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$:

$$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = 1 \;\Rightarrow\; c_2 = 1 - c_1$$

$$y'(x) = -c_1\, e^{-x} - 4\, c_2\, e^{-4x} + \frac{1}{3}\, e^{-x} - \frac{1}{3}\, x\, e^{-x},$$

$$y'(0) = 2 \;\Rightarrow\; -c_1 - 4\, c_2 = \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; c_1 = \frac{17}{9},\; c_2 = \frac{-8}{9}.$$

Решение начальной задачи (1.29) будет:

$$\boxed{y(x) = \frac{17}{9}\, e^{-x} - \frac{8}{9}\, e^{-4x} + \frac{1}{3}\, x\, e^{-x}}.$$

■

Иногда неоднородный член, $d(x)$, ОДУ (1.22) является суммой функций $\sum_{i=1}^{n} d_i(x)$, где каждый член суммы $d_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, имеет вид одной из функций таблицы 2.1. Например,

$$a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x). \tag{1.30}$$

Как решаем?

Шаг-1: Рассматриваем соответствующее однородное уравнение ОДУ (1.30)

$$a\, y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0,$$

и находим общее его решение

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x).$$

Шаг-2: Находим частное решение, $y_i(x)$ ОДУ

$$a\, y_i''(x) + b\, y_i' + c\, y_i = d_i(x),\; i = 1, \ldots, n,$$

методом Эйлера (неопределенных коэффициентов) для каждого $i = 1, \ldots, n$.

Шаг-3: Общее решение будет

$$y(x) = y_o(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x). \tag{1.31}$$

Действительно, из-за линейности ОДУ (1.30), $y(x)$ в (1.31) удовлетворяет (1.30):

$$y' = y_o'(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i'(x), \;\; y'' = y_o''(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i''(x)$$

$$a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = \underbrace{a\,y_o'' + b\,y_o' + c\,y_o}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \left(a\,y_i'' + b\,y_i' + c\,y_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_i(x).$$

Пример 2.5 Найти решение ОДУ

$$y'' + 4\,y' + 3\,y = 1 - 3\,x + 2\sin(2\,x). \tag{1.32}$$

Решение:

У нас $d_1(x) = 1 - 3\,x$ и $d_2(x) = 2\sin(2\,x)$.

Рассматриваем соответствующее однородное ОДУ

$$y'' + 4\,y' + 3\,y = 0 \tag{1.33}$$

Характерическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\,\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = -3.$$

Поэтому общее решение ОДУ (1.33):

$$y_o(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-3\,x}.$$

Теперь находим частное решение, $y_1(x)$ ОДУ

$$y_1'' + 4\,y_1' + 3\,y_1 = 1 - 3\,x. \tag{1.34}$$

По таблице ищем частное решение вида

$$y_1(x) = (A\,x + B)\,x^s \overset{s=0}{=} A\,x + B.$$

$$\Rightarrow\; y_1' = A, \;\; y_1'' = 0.$$

Подставляем в (1.34):

$$0 + 4\,A + 3\,(A\,x + B) = 1 - 3\,x \;\Rightarrow\; 3\,A\,x + 4\,A + 3\,B = 1 - 3\,x, \;\; \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow\; 3\,A = -3, \;\; 4\,A + 3\,B = 1 \;\Rightarrow\; A = -1, \;\; B = 5/3.$$

Поэтому,

$$y_1(x) = -x + \frac{5}{3}.$$

Кроме того находим частное решение $y_2(x)$, ОДУ

$$y_2'' + 4\,y_2' + 3\,y_2 = 2\sin(2\,x). \tag{1.35}$$

По таблице ищем частное решение вида

$$y_2(x) = (A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x))\,x^s \overset{s=0}{=} A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x).$$

$$\Rightarrow\ y_2' = -2\,A\sin(2\,x) + 2\,B\cos(2\,x),$$

$$\Rightarrow\ y_2'' = -4\,A\cos(2\,x) - 4\,B\sin(2\,x),$$

и подставляем в (1.35):

$$-4\,A\cos(2\,x) - 4\,B\sin(2\,x) +$$
$$4\,(-2\,A\sin(2\,x) + 2\,B\cos(2\,x)) + 3\,(A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x)) = 2\sin(2\,x)$$

$$\Rightarrow\ (-B - 8\,A - 2)\sin(2\,x) + (-A + 8\,B)\cos(2\,x) = 0.$$

Но $\sin(2\,x)$ и $\cos(2\,x)$ —линейно независимы, поэтому

$$\begin{cases} B + 8\,A = 2 \\ 8\,B - A = 0 \end{cases} \Rightarrow\ A = \frac{16}{65},\ B = \frac{2}{65}.$$

Тогда

$$y_2(x) = \frac{16}{65}\cos(2\,x) + \frac{2}{65}\sin(2\,x).$$

Общее решение ОДУ (1.32) будет:

$$y(x) = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-3\,x} - x + \frac{5}{3} + \frac{16}{65}\cos(2\,x) + \frac{2}{65}\sin(2\,x).$$

■

2.2.2 Метод вариации параметров для нахождения частного решения ОДУ (1.22) (метод Лагранжа)

Пусть

$$y_o(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x), \tag{1.36}$$

общее решение соответсвующего однородного ОДУ (1.22). Предполагаем, что ОДУ (1.22) имеет частное решение вида

$$y_ч(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x). \tag{1.37}$$

То есть вид (1.36) где c_i, $i = 1, 2$, являются функциями.

Нужно определить c_1 и c_2, если есть такие, что (1.37) являлось частным решением ОДУ (1.22). Дифференцируем два раза (1.37):

$$y_ч' = c_1'\, y_1 + c_1\, y_1' + c_2'\, y_2 + c_2\, y_2',$$

$$y_ч'' = c_1''\, y_1 + 2\, c_1'\, y_1' + c_1\, y_1'' + c_2''\, y_2 + 2\, c_2'\, y_2' + c_2\, y_2'',$$

и подставляем в (1.22):

$$a\left(c_1''\, y_1 + 2\, c_1'\, y_1' + c_1\, y_1'' + c_2''\, y_2 + 2\, c_2'\, y_2' + c_2\, y_2''\right) + b\,(c_1'\, y_1 + c_1\, y_1' + c_2'\, y_2 + c_2\, y_2')$$
$$+ c\,(c_1\, y_1 + c_2\, y_2) = d(x).$$

Это уравнение можно упростить используя тот факт, что y_1 и y_2 являются частными решениями однородного ОДУ, то есть $a\, y_1'' + b\, y_1' + c\, y_1 = 0$ и $a\, y_2'' + b\, y_2' + c\, y_2 = 0$. Поэтому,

$$a\left(c_1''\, y_1 + 2\, c_1'\, y_1' + c_2''\, y_2 + 2\, c_2'\, y_2'\right) + b\,(c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2) = d(x).$$

Перепишем это уравнение как

$$a\left(c_1''\, y_1 + c_1'\, y_1' + c_2''\, y_2 + c_2'\, y_2'\right) + a\,(c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') + b\,(c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2) = d(x).$$

Замечаем что $c_1''\, y_1 + c_1'\, y_1' + c_2''\, y_2 + c_2'\, y_2' = (c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2)'$ и у нас есть:

$$a\,(c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2)' + a\,(c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') + b\,(c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2) = d(x). \tag{1.38}$$

Мы хотим найти c_1 и c_2, которые удовлетворяют уравнение (1.38). Если выберем c_1 и c_2 такие, что $c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2 = 0$, то из (1.38) следует, что

$$a\,\cdot 0 + a\,(c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') + b\,\cdot 0 = d(x) \;\Rightarrow\; c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = \frac{d(x)}{a}.$$

Поэтому, решения (c_1, c_2) системы

$$\begin{cases} c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2 = 0 \\ c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = \frac{d(x)}{a}, \end{cases} \tag{1.39}$$

удовлетворяют уранение (1.38). Кроме того для этих решений (c_1, c_2), функция $y_ч(x)$ в (1.37) является частным решением ОДУ (1.22).

Алгебрайческую систему (1.39) можем решить разными методами. Решение методом Крамера будет иметь вид:

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{d(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2\, d(x)}{a\, W[y_1, y_2]\,(x)} \quad \text{и} \quad c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{d(x)}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1\, d(x)}{a\, W[y_1, y_2]\,(x)}, \tag{1.40}$$

где мы успользовали, что $W[y_1, y_2]\,(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$. Функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ мы можем найти, если проинтегрируем (1.40) по x:

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2\, d(x)}{a\, W[y_1, y_2]\,(x)}\, dx \quad \text{и} \quad c_2(x) = \int \frac{y_1\, d(x)}{a\, W[y_1, y_2]\,(x)}\, dx. \tag{1.41}$$

Поэтому одно частное решение ОДУ (1.22) будет $y_ч(x)$ в (1.37), где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ даны в (1.41).

Итак, для того, чтобы найти частное решение ОДУ (1.22) методом Лагранжа необходимо:

Шаг-1: Предполагаем, что c_1 и c_2 в общем решении соответствующего однородного ОДУ являются функциями, и что одно частное решение ОДУ (1.22) будет иметь вид

$$y_ч(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x). \tag{1.42}$$

Шаг-2: Находим производные функций $c_1(x)$ и $c_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2 = 0 \\ c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = \frac{d(x)}{a} \end{cases}. \tag{1.43}$$

Шаг-3: Интегрируем и находим производные $c_1(x)$ и $c_2(x)$.

Замечание 2.1 Мы увидим в следующем параграфе, что метод Лагранжа для нахождения частного решения ОДУ (1.22) работает и в том случае, если коэффициенты (a, b, c) являются функциями: ($a(x)$, $b(x)$, $c(x)$). То есть, мы можем использовать метод и для линейных ОДУ 2-го порядка с непостоянными коэффициентами.

Пример 2.6 Найти решение ОДУ

$$y'' - y = x. \tag{1.44}$$

Решение:

В начале рассматриваем соответствующее однородное ОДУ:

$$y'' - y = 0. \tag{1.45}$$

Характерическое уравнение будет:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Поэтому общее решение ОДУ (1.45) будет

$$y_o(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}.$$

Методом Лагранжа дает одно частное решение ОДУ (1.44) в виде

$$y_1(x) = c_1(x)\, e^x + c_2(x)\, e^{-x},$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} c_1'\, e^x + c_2'\, e^{-x} = 0 \\ c_1'\, e^x - c_2'\, e^{-x} = x \end{cases}.$$

Вычитаем по частям и получаем:

$$2\, c_2'\, e^{-x} = -x \Rightarrow c_2' = \frac{-x}{2} e^x \Rightarrow c_2(x) = \frac{-1}{2} \int x\, e^x \Rightarrow c_2(x) = \frac{e^x}{2}(1 - x).$$

Кроме того

$$c_1' = -e^{-x}\, c_2'\, e^{-x} = \frac{x}{2} e^{-x} \Rightarrow c_1(x) = \frac{1}{2} \int x\, e^{-x}\, dx = \frac{-e^{-x}}{2}(x + 1).$$

Поэтому одно частное решение ОДУ (1.44) будет

$$y_1(x) = -\frac{x+1}{2} + \frac{1-x}{2} = -x.$$

Наконец общее решение ОДУ (1.44) будет

$$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} - x.$$