7

Методы решения линейных ОДУ второго порядка типа Эйлера

1. Линейные ОДУ 2-го порядка с непостоянными коэффициентами

В этом параграфе мы рассмотрим ОДУ следующего вида

$$a(x)\,y''(x)+b(x)\,y'(x)+c(x)\,y(x)=d(x),\ \ a(x)\not\equiv 0,\ \ x\in I\subset\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

У нас нет общего метода решения произвольных ОДУ 2-го порядка вида (1.48). Однако, для некоторых из них мы можем найти общее решение при помощи подстановки независимой переменной.

1.1 Однородные ОДУ. ОДУ типа Эйлера

Рассмотрим линейное ОДУ 2-го порядка, однородное, с непостоянными коэффициентами вида

$$\alpha\,x^2\,y''(x)+\beta\,x\,y'(x)+\gamma\,y(x)=0,\ \ x\in I\subset\mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Тогда ОДУ (1.49) называется ***уравнением Эйлера***.

Мы можем преобразовывать каждое ОДУ типа Эйлера в ОДУ с постоянными коэффициентами путём изменения независимой переменной. В самом деле, подставим

$$x=e^t\ \ \Rightarrow\ \ \frac{dx}{dt}=e^t.$$

Кроме того:

$$x=e^t\ \ \Rightarrow\ \ t=\ln x\ \ \Rightarrow\ \ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=\frac{1}{e^t}=e^{-t}.$$

При $x = e^t$

$$y(x) \to y\left(e^t\right) = u(t).$$

Поэтому, по цепному правилу

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{du}{dt}e^{-t} = u'(t)\,e^{-t},$$

и

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2u}{dt^2}e^{-t} - \frac{du}{dt}e^{-t}\right)e^{-t}$$
$$\Rightarrow\ y''(x) = (u''(t) - u'(t))\cdot e^{-2t}.$$

Подставляем в (1.49):

$$\alpha\, e^{2t}(u''(t) - u'(t))\,e^{-2t} + \beta\, e^t u'(t)\,e^{-t} + \gamma\, u(t) = 0$$

$$\Rightarrow\ \alpha\,(u''(t) - u'(t)) + \beta\, u'(t) + \gamma\, u(t) = 0$$

$$\Rightarrow\ \alpha\, u'' + (\beta - \alpha)\, u' + \gamma\, u = 0,\ \ u = u(t),$$

Которое является ОДУ с постоянными коэффициентами.

Сформулируем алгоритм решения ОДУ типа Эйлера (1.49):

Шаг-1: Подставим $x = e^t$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = e^t \text{ и } \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

и y с его производными $y,\ y'$:

$$y(e^x) = u(t),\ \ y' = u'\,e^{-t},\ \ y'' = (u'' - u')\,e^{-2t}.$$

Шаг-2: Подставляем в (1.49), получим ОДУ 2-го порядка, с постоянными коэффициентами для $u = u(t)$, и находим его общее решение.

Шаг-3: Находим общее решение исходного ОДУ Эйлера, возвращаясь к начальной переменной $t \to \ln x$.

Пример 1.1 Найти решение задачи Коши

$$x^2\, y'' - x\, y' + 2\, y = 0. \tag{1.3}$$

с начальными условиями $y(1) = y'(1) = 1$.

Решение:

Это ОДУ типа Эйлера.

Подставим

$$x = e^t \;\Rightarrow\; t = \ln x \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}.$$

Поэтому $y(x) \to y(e^t) = u\,(t)$ и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\,\frac{dt}{dx} = u'\,e^{-t}, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(u'\,e^{-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(u'\,e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}\\ &= \left(u''\,e^{-t} - u'\,e^{-t}\right)e^{-t} = (u'' - u')\,e^{-2\,t}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Подставляем (1.51) и (1.52) в (1.50):

$$e^{2\,t}\left(u'' - u'\right)e^{-2\,t} - e^t\,u'\,e^{-t} + 2\,u = 0$$

$$\Rightarrow\; (u'' - u') - u' + 2\,u = 0\,,$$

$$\Rightarrow\; u'' - 2\,u' + 2\,u = 0, \tag{1.6}$$

которое является ОДУ с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \pm i.$$

Поэтому общее решение ОДУ (1.53) будет иметь вид:

$$u(t) = e^t(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Для получения общего решения ОДУ (1.50) подставим $t = \ln x$

$$y(x) = x\,[c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)].$$

Для решения задачи Коши:

$$y(1) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = 1.$$

$$y'\,(x) = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + x\left[-c_1 \sin(\ln x)\,\frac{1}{x} + c_2 \cos(\ln x)\,\frac{1}{x}\right].$$

$$y'\,(1) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 - c_1 \cdot 0 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \;\Rightarrow\; 1 + c_2 = 1 \;\Rightarrow\; c_2 = 0.$$

Поэтому

$$y(x) = x\cos(\ln x).$$

■

Пример 1.2 Найти решение задачи Коши

$$4x^2 y'' + y = 0. \tag{1.7}$$

с начальными условиями $y(e) = y'(e) = 0$.

Решение:

Подставим

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}.$$

Поэтому $y(x) \to y(e^t) = u(t)$ и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = u' e^{-t}, \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(u' e^{-t}\right) = \left(u'' e^{-t} - u' e^{-t}\right) e^{-t} = (u'' - u')\, e^{-2t}. \tag{1.9}$$

Подставляем (1.55) и (1.56) в (1.50):

$$4e^{2t}\left(u'' - u'\right) e^{-2t} + u = 0 \Rightarrow 4u'' - 4u' + u = 0, \tag{1.10}$$

которое является ОДУ с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение:

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому общее решение ОДУ (1.53) будет:

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{\frac{t}{2}}.$$

Для получения общего решения ОДУ (1.50) подставим $t = \ln x$

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)\, e^{\frac{\ln x}{2}} \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)\sqrt{x}.$$

Для решения задачи Коши:

$$y(e) = 1 \Rightarrow (c_1 + c_2 \cdot 1)\sqrt{e} = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2.$$

$$y'(x) = \frac{c_2}{x}\sqrt{x} + \frac{c_1 + c_2 \ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$y'(e) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{c_2}{\sqrt{e}} + 0 = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0.$$

Поэтому

$$y(x) = 0.$$

■

1.2 Неоднородные ОДУ

Мы знаем, что для всех линейных ОДУ вида

$$\alpha x^2 y''(x) + \beta x y'(x) + \gamma y(x) = d(x), \;\; x \in I \subset \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

общее решение будет иметь вид

$$y(x) = y_o(x) + y_ч(x), \tag{1.12}$$

где $y_o(x)$ —общее решение соответствующего однородного ОДУ (1.58) и $y_ч(x)$ —частное решение неоднородного ОДУ (1.58).

1.2.1 Метод нахождения частного решения для ОДУ с непостоянными коэффициентами

Как мы уже заметили ранее, метод вариации параметров (Лагранжа) работает и для ОДУ с непостоянными коэффициентами.

В самом деле, если общее решение однородного ОДУ

$$\alpha x^2 y''(x) + \beta x y'(x) + \gamma y(x) = 0 \tag{1.13}$$

дано в виде:

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \tag{1.14}$$

то, пользуясь методом Лагранжа, частное решение ОДУ (1.58) получается вида:

$$y_ч(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{d(x)}{a(x)} \end{cases}.$$

Пример 1.3 Найти общее решение ОДУ

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^3. \tag{1.15}$$

Решение:

Рассматриваем соответствующее однородное ОДУ

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \tag{1.16}$$

и находим общее его решение.

Это ОДУ типа Эйлера. Подставим $x = e^t$. Тогда:

$$t = \ln x \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}.$$

Поэтому, $y(x) = y(e^t) = u(t)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = u' e^{-t}, \tag{1.17}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(u' e^{-t}\right) = \left(u'' e^{-t} - u' e^{-t}\right) e^{-t} = (u'' - u')\, e^{-2t}. \tag{1.18}$$

Подставляем (1.64) и (1.65) в (1.63):

$$\begin{gathered} e^{2t}\left(u'' - u'\right) e^{-2t} - 4 e^t u' e^{-t} + 6u = 0 \\ \Rightarrow\; u'' - 5u' + 6u = 0, \end{gathered} \tag{1.19}$$

которое является ОДУ с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2,\;\; \lambda_2 = 3.$$

Поэтому общее решение ОДУ (1.63) будет иметь вид:

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}.$$

Для общего решения ОДУ (1.50) ставим $t = \ln x$

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3.$$

Метод Лагранжа частное даёт решение ОДУ (1.63) вида:

$$y_1(x) = c_1(x)\,x^2 + c_2(x)\,x^3,$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} c_1'\,x^2 + c_2'\,x^3 = 0 \\ 2\,c_1'\,x + 3\,c_2'\,x^2 = \frac{x^3}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' + c_2'\,x = 0 \\ 2\,c_1' + 3\,c_2'\,x = 1 \end{cases} \Rightarrow\ c_1'(x) = -1,\ \ c_2'(x) = \frac{1}{x}.$$

Из этого следует, что

$$c_1(x) = -x,\ \ c_2 = \ln x,$$

и частное решение ОДУ (1.63) будет иметь вид

$$y_1(x) = -x \cdot x^2 + (\ln x)\,x^3 = x^3(\ln x - 1).$$

Получаем общее решение ОДУ (1.63):

$$y(x) = c_1\,x^2 + c_2\,x^3 + x^3(\ln x - 1).$$