Дифференциальные уравнения
Домашнее задание (ДЗ) и задачи для занятия -- 6
Преподаватель: Д.В.Гринёв

Домашнее задание

1. Найти детерминант Вронского $W[f, g](x)$ в интервале I. В каждом случае, объясните, если согласно теоремам, которые мы доказали, можем заключить что функции являются линейно зависимыми/независимыми.

i) $f(x) = x, \; g(x) = \sqrt{x}\,, \; I = \mathbb{R}$;

ii) $f(x) = \sin(x + \pi), \; g(x) = \cos x, \; I = \mathbb{R}$;

2. Для следующих функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:
a) Проверьте если они являются решениями данного ОДУ
b) Проверьте если множество $\{y_1(x), y_2(x)\}$ является фундаментальным.

i) $f(x) = x(x + 1), \; g(x) = x^2, \; I = \mathbb{R}, \; x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$;

ii) $f(x) = x, \; g(x) = \cos x, \; I = \mathbb{R}, \; (1 + x\tan x)\, y'' - xy' + y = 0$;

3. Используя теорему Абеля, найдите детерминант Вронского для каждого фундаментального множества решений следующих ОДУ.

i) $x^2 y'' + 2xy' - 3y = 0$;

ii) $(2 + \cos x)\, y'' - \sin x\, y' + y = 0$.

4. Методом понижения порядка, решите следующие ОДУ.

i) $(1 + x)\, y'' + (1 - 2x)\, y' + (x - 2)\, y = 1$, где $y_1 = e^x$ —частное решение соотв. однородного ОДУ.

ii) $x^2 y'' - xy' + y = x^2$, где $y_1 = x$ —частное решение соотв. однородного ОДУ.

Задачи для занятия

1. Найти детерминант Вронского $W[f, g](x)$ в интервале I. В каждом случае, объясните, если согласно теоремам, которые мы доказали, можем заключить что функции являются линейно зависимыми/независимыми.

i) $f(x) = 1 + x^2, \; g(x) = x(x - 1), \; I = (0, 1)$;

ii) $f(x) = x^2, \; g(x) = 2x^2 + \cos^2(x), \; I = \mathbb{R}$;

iii) $f(x) = \sinh(x), \; g(x) = \sinh(2x), \; I = \mathbb{R}$;

iv) $f(x) = \sin x, \; g(x) = \begin{cases} \sin x, & \frac{-\pi}{2} \le x \le 0 \\ x(x + 1), & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \end{cases}, \; I = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

2. Для следующих функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:
a) Проверьте если они являются решениями данного ОДУ
b) Проверьте, если множество $\{y_1(x), y_2(x)\}$ является фундаментальным.

i) $y_1(x) = x, \; y_2(x) = (x + 1)\, e^x, \; I = \mathbb{R}, \; x^2 y'' - x(x + 2)\, y' + (x + 2)\, y = 0$;

ii) $y_1(x) = \sinh x, \; y_2(x) = e^x, \; I = \mathbb{R}, \; y'' = y$;

3. Используя теорему Абеля, найдите детерминант Вронского для каждого фундаментального множества решений следующих ОДУ.

i) $y'' = 4y + y'$;

ii) $\left(1 + x^2\right) y'' - xy' + (x + 1)\, y = 0$.

4. Методом понижения порядка, решите следующие ОДУ.

i) $(1+x^2)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 2$, где $y_1 = x$ —частное решение соотв. однородного;

ii) $(1+x)\,y'' - (2\,x+3)\,y' + (x+2)\,y = 6\,e^x(1+x)^2$, где $y_1 = e^x$ —частное решение.

iii) $4\,y'' + 4\,y' + y = 8\,e^{-x/2}$, где $y_1 = e^{-x/2}$ —частное решение;