Евклидовы и унитарные пространства

О. ЛП E над полем $\mathbb{R}$ (над полем $\mathbb{C}$) называется ЕП (УП), если любой паре элементов $x, y \in E$ поставлено в соответствие вещественное (комплексное) число (x, y), которое называется *скалярным произведением* (СП), причём выполняются четыре аксиомы ЕП (УП):

1) $\forall x, y \in E$ выполняется $(x, y) = (y, x)$ (для УП: $(x, y) = \overline{(y, x)}$);
2) $\forall x, y, z \in E$ выполняется $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$) выполняется $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $\forall x \in E$ выполняется $(x, x) \geq 0$, причём $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Пример 1. Можно ли в ЛП вещественных столбцов T_n над полем $\mathbb{R}$ ввести СП по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$?

Проверим: $\forall x, y \in T_n$ поставлено в соответствие число

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \in \mathbb{R};$$

1) $\forall x, y \in T_n$ выполняется

$$\left.\begin{aligned} (x, y) &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ (y, x) &= \sum_{k=1}^{n} y_k x_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x, y) = (y, x);$$

2) $\forall x, y, z \in T_n$ выполняется

$$\left.\begin{aligned} (x + y, z) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) z_k \\ (x, z) + (y, z) &= \sum_{k=1}^{n} x_k z_k + \sum_{k=1}^{n} y_k z_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z);$$

3) $\forall x, y \in T_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\left.\begin{aligned} (\lambda x, y) &= \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k y_k \\ \lambda(x, y) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ (\lambda x, y) = \lambda(x, y);$$

4) $\forall x \in T_n$ выполняется

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0,$$

причём $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$, т.е. $x = \theta$.

Значит, СП можно ввести по такой формуле (это стандартное СП в пространстве T_n).
Ответ: да.

Для ЛП комплексных столбцов T_n^* над полем $\mathbb{C}$ эта формула не годится (подумайте, почему). В этом случае СП вводится по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k.$$

Другие примеры СП. Для ЛП трёхмерных геометрических векторов V_3 и ЛП двумерных геометрических векторов V_2: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$. Для $C[a, b]$ — ЛП вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$: $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$. Для $C^*[a, b]$ — ЛП комплекснозначных функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$: $(f, g) = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)\, dt$.

О. *Нормой (*или *длиной)* элемента x ЕП (УП) называется число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.
Заметим, что из четвёртой аксиомы ЕП (УП) следует, что $(x, x) \geq 0$, откуда $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
В ЕП и УП справедливо *неравенство Коши—Буняковского:*
$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.
О. *Углом* между ненулевыми элементами x, y ЕП называется число $\varphi = \arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Пример 2. Пусть $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найти (x, y), $\|x\|$, $\|y\|$ и φ, если СП введено стандартным образом, как в примере 1: $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

$(x, y) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -1, \qquad \|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{2},$

$\|y\| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0} = 1, \qquad \varphi = \arccos\dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \arccos\dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\pi}{4}.$

Ответ: $(x, y) = -1$, $\|x\| = \sqrt{2}$, $\|y\| = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Пусть E — ЕП (УП) размерности n.
О. Пусть в E есть базис e_1, …, e_n. Тогда матрица $G = \left(g_{ij}\right)_{n\times n}$, где $g_{ij} = \left(e_i, e_j\right)$, называется КМТ (*ковариантным метрическим тензором)* пространства E в базисе e.

Т. Если $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ — координаты элементов x, y в базисе e, то

1) в ЕП:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j,$$

2) в УП:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_i\bar{y}_j,$$

где $G=\left(g_{ij}\right)_{n\times n}$ — КМТ в базисе e.

Пример 3. Найти КМТ в базисе $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $e_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ЕП T_2, если СП введено по стандартной формуле: $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$.

$G=\begin{pmatrix}(e_1,e_1) & (e_1,e_2)\\(e_2,e_1) & (e_2,e_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Ответ: $G=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

О. Если $(x,y)=0$, то элементы x,y ЕП (УП) называются *ортогональными*. Обозначение: $x\perp y$.

О. Базис e_1, ..., e_n ЕП (УП) называется *ортогональным* (ОБ), если $\forall i\neq j$ выполняется $\left(e_i,e_j\right)=0$ (т.е. элементы e_1, ..., e_n попарно ортогональны).

О. Базис e_1, ..., e_n ЕП (УП) называется *ортонормированным* (ОНБ), если $\forall i,j$ выполняется $\left(e_i,e_j\right)=\delta_{ij}$ (т.е. элементы e_1, ..., e_n попарно ортогональны и имеют норму, равную 1).

В ОНБ $G=I$, т.е. КМТ — единичная матрица.

Т. Пусть $x_e=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y_e=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, где e — ОНБ. Тогда

1) в ЕП:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\,,\qquad \|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2},$$

2) в УП:

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k\,,\qquad \|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2},$$

3) в ЕП и УП: $x_k=(x,e_k)$, $k=1,\dots,n$.

Построение ОБ и ОНБ из произвольного базиса (метод Грама—Шмидта)

Пусть в ЕП (УП) E есть произвольный базис e_1, ..., e_n. Проведём *ортогонализацию:*

$f_1=e_1$;

$f_2=e_2-\dfrac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)}f_1 \;\;\Rightarrow\;\; f_2\perp f_1$;

$f_3=e_3-\dfrac{(e_3,f_1)}{(f_1,f_1)}f_1-\dfrac{(e_3,f_2)}{(f_2,f_2)}f_2 \;\;\Rightarrow\;\; f_3\perp f_1,f_2$;

…

$$f_n = e_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(e_n, f_k)}{(f_k, f_k)} f_k \quad \Rightarrow \quad f_n \perp f_1, \dots, f_{n-1}.$$

Тогда $f_1, \dots, f_n$ — ОБ в пространстве E.

Далее, сделаем *нормировку:*

$$g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1, \dots, g_n = \frac{1}{\|f_n\|} \cdot f_n.$$

Тогда $g_1, \dots, g_n$ — ОНБ в пространстве E.

Пример 4 (ЛАВЗ гл. IV № 16а). В ЕП E есть ОНБ e_1, e_2, e_3 и элементы

$$x_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3, \qquad x_2 = -e_1 - e_3, \qquad x_3 = 5e_1 - 3e_2 - 7e_3.$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис в пространстве E, и применить к ним процедуру ортогонализации с нормировкой.

Выпишем столбцы координат элементов x_1, x_2, x_3 в базисе e:

$$(x_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, (x_2)_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (x_3)_e = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель, построенный на этих столбцах:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

Поскольку определитель отличен от нуля, то столбцы координат ЛНЗ, поэтому и элементы x_1, x_2, x_3 ЛНЗ. Пространство E имеет размерность три, поскольку в нём есть базис e_1, e_2, e_3, состоящий из трёх элементов. Следовательно, и элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис в E.

Проведём ортогонализацию.

1) $f_1 = x_1 = e_1 - 2e_2 + 2e_3$.
2) $f_2 = x_2 - \frac{(x_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1$.

   Поскольку e — ОНБ в ЕП, то для вычисления СП воспользуемся формулой

   $$(a, b) = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k,$$

   где a_k, b_k — координаты элементов a, b в ОНБ e. Тогда

   $(x_2, f_1) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -3,$

   $(f_1, f_1) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 9,$

   $$f_2 = -e_1 - e_3 + \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -\frac{2}{3} e_1 - \frac{2}{3} e_2 - \frac{1}{3} e_3.$$
3) $f_3 = x_3 - \frac{(x_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(x_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2$.

   $(x_3, f_1) = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + (-7) \cdot 2 = -3,$

   $$(x_3, f_2) = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-3) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-7) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1,$$

   $$(f_2, f_2) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1,$$

$$f_3 = 5e_1 - 3e_2 - 7e_3 + \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + 2e_3) - \left(-\frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3\right) =$$
$$= 6e_1 - 3e_2 - 6e_3.$$

Теперь элементы f_1, f_2, f_3 образуют ОБ в пространстве E.
Проведём нормировку:

$\|f_1\| = \sqrt{(f_1, f_1)} = 3, \qquad \|f_2\| = \sqrt{(f_2, f_2)} = 1,$

$\|f_3\| = \sqrt{(f_3, f_3)} = \sqrt{6 \cdot 6 + (-3) \cdot (-3) + (-6) \cdot (-6)} = 9,$

$g_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1 = \dfrac{1}{3}e_1 - \dfrac{2}{3}e_2 + \dfrac{2}{3}e_3, \qquad g_2 = \dfrac{1}{\|f_2\|} \cdot f_2 = -\dfrac{2}{3}e_1 - \dfrac{2}{3}e_2 - \dfrac{1}{3}e_3,$

$g_3 = \dfrac{1}{\|f_3\|} \cdot f_3 = \dfrac{2}{3}e_1 - \dfrac{1}{3}e_2 - \dfrac{2}{3}e_3.$

Теперь элементы g_1, g_2, g_3 образуют ОНБ в пространстве E.
Ответ: $\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, -\frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3.$

ДЗ 15. ЛАВЗ гл. IV № 1–3, 5, 10–12, 14, 16(б).
(*) Найти КМТ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ЕП T_2.
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: гл. IV § 3, 4.

Решение некоторых задач из ДЗ

ЛАВЗ гл. IV № 10. В базисе e_1, e_2 комплексного ЛП E произвольные элементы x, y имеют разложения $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$.

а) Можно ли в этом пространстве ввести скалярное умножение элементов по формуле:
1°) $(x, y) = x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} + (i-1)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$;
2°) $(x, y) = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$;
3°) $(x, y) = x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (i-1)x_2\overline{y_1} - x_2\overline{y_2}$?

б) Вычислите СП столбцов $A = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$ и их нормы, если скалярное умножение столбцов введено по формуле 2°) из пункта а) в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) По формуле 1°) скалярное умножение ввести нельзя, так как не выполнена аксиома СП $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Поскольку
$(x, y) = x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} + (i-1)x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2},$
$(y, x) = y_1\overline{x_1} + iy_1\overline{x_2} + (i-1)y_2\overline{x_1} + 3y_2\overline{x_2},$
$\overline{(y, x)} = \overline{y_1}x_1 - i\overline{y_1}x_2 + (-i-1)\overline{y_2}x_1 + 3\overline{y_2}x_2,$
то равенство $(x, y) = \overline{(y, x)}$ выполняется не всегда. Например, для элементов
$x = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2, \qquad y = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$
получим
$(x, y) = i, \qquad (y, x) = i - 1, \qquad \overline{(y, x)} = -i - 1 \neq (x, y).$
По формуле 3°) скалярное умножение ввести нельзя по той же причине: аксиома СП $(x, y) = \overline{(y, x)}$ не выполнена. Поскольку

$(x,y) = x_1\overline{y_1} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (i-1)x_2\overline{y_1} - x_2\overline{y_2}$,
$(y,x) = y_1\overline{x_1} + (1+i)y_1\overline{x_2} + (i-1)y_2\overline{x_1} - y_2\overline{x_2}$,
$\overline{(y,x)} = \overline{y_1}x_1 + (1-i)\overline{y_1}x_2 + (-i-1)\overline{y_2}x_1 - \overline{y_2}x_2$,
то равенство $(x,y) = \overline{(y,x)}$ выполняется не всегда. Например, для элементов
$x = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2, \qquad y = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2$
получим
$(x,y) = 1+i, \qquad (y,x) = i-1, \qquad \overline{(y,x)} = -i-1 \neq (x,y)$.
По формуле 2°) скалярное умножение ввести можно, так как выполняются все требования, которым должно удовлетворять СП в УП. Во-первых, для любых элементов $x,y \in E$ СП (x,y) является комплексным числом. Во-вторых, выполнены четыре аксиомы СП. Проверим это.

1) $\forall x,y \in E$ должно выполняться равенство $(x,y) = \overline{(y,x)}$. Запишем (x,y) и $\overline{(y,x)}$:
$(x,y) = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}, \qquad (y,x) = 2y_1\overline{x_1} + iy_1\overline{x_2} - iy_2\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}$,
$\overline{(y,x)} = 2\overline{y_1}x_1 - i\overline{y_1}x_2 + i\overline{y_2}x_1 + \overline{y_2}x_2$.
Видно, что $(x,y) \equiv \overline{(y,x)}$.
2) $\forall x,y,z \in E$ должно выполняться равенство $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$. Запишем $(x+y,z)$:
$(x+y,z) = 2(x_1+y_1)\overline{z_1} + i(x_1+y_1)\overline{z_2} - i(x_2+y_2)\overline{z_1} + (x_2+y_2)\overline{z_2} =$
$= 2x_1\overline{z_1} + 2y_1\overline{z_1} + ix_1\overline{z_2} + iy_1\overline{z_2} - ix_2\overline{z_1} - iy_2\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + y_2\overline{z_2} =$
$= (2x_1\overline{z_1} + ix_1\overline{z_2} - ix_2\overline{z_1} + x_2\overline{z_2}) + (2y_1\overline{z_1} + iy_1\overline{z_2} - iy_2\overline{z_1} + y_2\overline{z_2}) = (x,z) + (y,z)$,
ч.т.д.
3) $\forall x,y \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ должно выполняться равенство $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$. Запишем $(\lambda x,y)$:
$(\lambda x,y) = 2\lambda x_1\overline{y_1} + i\lambda x_1\overline{y_2} - i\lambda x_2\overline{y_1} + \lambda x_2\overline{y_2} = \lambda(2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}) =$
$= \lambda(x,y), \qquad$ ч. т. д.
4) $\forall x \in E$ должно выполняться равенство $(x,x) \geq 0$, причём $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$. Пусть $x_1 = a_1 + ib_1, x_2 = a_2 + ib_2$, где $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. Тогда
$(x,x) = 2x_1\overline{x_1} + ix_1\overline{x_2} - ix_2\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} =$
$= 2(a_1+ib_1)(a_1-ib_1) + i(a_1+ib_1)(a_2-ib_2) - i(a_2+ib_2)(a_1-ib_1) +$
$+ (a_2+ib_2)(a_2-ib_2) =$
$= 2a_1^2 + 2b_1^2 + ia_1a_2 - b_1a_2 + a_1b_2 + ib_1b_2 - ia_2a_1 + b_2a_1 - a_2b_1 - ib_2b_1 + a_2^2 +$
$+ b_2^2 = 2a_1^2 + 2b_1^2 - 2b_1a_2 + 2a_1b_2 + a_2^2 + b_2^2 =$
$= a_1^2 + b_1^2 + (b_1^2 - 2b_1a_2 + a_2^2) + (a_1^2 + 2a_1b_2 + b_2^2) =$
$= a_1^2 + b_1^2 + (b_1 - a_2)^2 + (a_1 + b_2)^2$.
Видно, что $(x,x) \geq 0$, причём $(x,x) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, b_1 = 0, a_2 = b_1 = 0, b_2 = -a_1 = 0$, т.е. $x = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 = \theta$, ч.т.д.

б) Поскольку
$A = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix} = (1+2i)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 3i \\ 1-i \end{pmatrix} = (1+i)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + (2+i)\cdot\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$,
то $x_1 = 1+2i, x_2 = -1, y_1 = 1+i, y_2 = 2+i$, поэтому

$(A,B) = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} =$
$= 2(1+2i)(1-i) + i(1+2i)(2-i) - i\cdot(-1)\cdot(1-i) + (-1)\cdot(2-i) =$
$= 2 + 4i - 2i + 4 + 2i - 4 + 1 + 2i + i + 1 - 2 + i = 2 + 8i,$
$\|A\| = \sqrt{(A,A)} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (2+1)^2 + (1+0)^2} = \sqrt{15},$
$\|B\| = \sqrt{(B,B)} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (1-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{7}.$

Ответ: а) 1°) нет, 2°) да, 3°) нет; б) $(A,B) = 2 + 8i$, $\|A\| = \sqrt{15}$, $\|B\| = \sqrt{7}$.

ЛАВЗ гл. IV № 12. В ЛП P_2 многочленов степени, не превосходящей 2, СП элементов $f(x)$ и $g(x)$ задано формулой

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

Постройте ОНБ пространства P_2 с помощью процедуры ортогонализации, исходя из базиса $1, x, x^2$.

Решение. Обозначим исходный базис $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$.
Проведём ортогонализацию.

1) $f_1 = e_1 = 1.$
2) $f_2 = e_2 - \frac{(e_2,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1.$

$$(e_2,f_1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0.$$

$f_2 = e_2 = x.$

3) $f_3 = e_3 - \frac{(e_3,f_1)}{(f_1,f_1)} f_1 - \frac{(e_3,f_2)}{(f_2,f_2)} f_2.$

$$(e_3,f_1) = (f_2,f_2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

$$(f_1,f_1) = \int_{-1}^{1} dx = 2.$$

$$(e_3,f_2) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0.$$

$$f_3 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Проведём нормировку:

$$\|f_1\| = \sqrt{(f_1,f_1)} = \sqrt{2}, \qquad \|f_2\| = \sqrt{(f_2,f_2)} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\|f_3\| = \sqrt{(f_3, f_3)} = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) dx} = \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{8}{45}} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} \cdot f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad g_2 = \frac{1}{\|f_2\|} \cdot f_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \qquad g_3 = \frac{1}{\|f_3\|} \cdot f_3 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

$\{g_1, g_2, g_3\}$ — ОНБ в P_2.

Ответ: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3x^2-1}{2}\right\}$.