Лекция 2. Теория линейных уравнений и геометрия.

В этой лекции проводится "визуализация" теории линейных уравнений, построенной в лекции 1. Здесь снова, как и в лекции 1 индексы векторов будем помещать наверху.

4.1. Геометрический смысл определителя матрицы и правило Крамера

Понятие определителя, которое мы собираемся сейчас вводить, играет выдающуюся роль и в алгебре, и в геометрии, и в анализе. Через определители выражаются решения систем уравнений (в которых число уравнений и неизвестных совпадают). Эти выражения называются правилом Крамера. Но на практике системы линейных уравнений в больших размерностях с помощью определителей не решают (такие решения требуют слишком большого числа операций).

Геометрический смысл определителя, порожденного n векторами в n-мерном пространстве — это *ориентированный объем параллелепипеда, порожденного этими векторами.* Отметим свойства такой характеристики, которые геометрически доказываются на примерах $n = 2, 3$. Введем функцию $V : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V = V(a^1, \ldots, a^n)$ системы векторов $\{a^j\}_{j=1}^n$ и потребуем от этой функции выполнения таких условий: a) *условие нормировки*, согласно которому объем единичного куба должен равняться единице: $V(e^1, \ldots, e^n) = 1$, где $e^1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e^n = (0, \ldots, 1)^T$ — набор единичных векторов в $\mathbb{R}^n$,

b) *условие "антисимметричности"*:
$V(a^1, \ldots, a^{i-1}, a^i, a^{i+1}, a^{i+2}, \ldots, a^n) = -V(a^1, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, a^i, a^{i+2}, \ldots, a^n)$ и

c) *условие линейности по каждому векторному аргументу* (для этого достаточно потребовать, чтобы $V(\alpha a^1 + \alpha' a^{1'}, a^2, \ldots, a^n) = \alpha V(a^1, a^2, \ldots, a^n) + \alpha' V(a^{1'}, a^2, \ldots, a^n)$).

Условия *a*) и *b*) представляются естественными, и они справедливы для определителей матриц второго порядка. Условие линейности для двумерного случая демонстрирует рис. 1

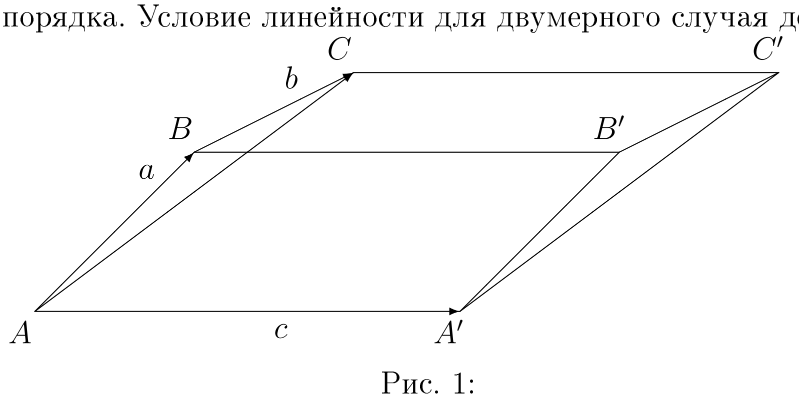

Рис. 1:

Из этого рисунка видно, что $V(a + b.c) = V(a.c) + V(b.c)$. Действительно, $V(a + b.c) =$

$S_{ACC'A'}$, а $V(a.c) + V(b.c) = S_{ACC'A'} - S_{A'B'C'} + S_{ABC}$. Но поскольку $S_{A'B'C'} = S_{ABC}$, мы и получаем искомое равенство.

Если $a^i = a^{i+1}$, то из условия b) следует, что $V(a^1, \dots, a^{i-1}, a^i, a^{i+1}, a^{i+1}, \dots, a^n) = 0$. Нетрудно показать, что при совпадении любых двух векторов (необязательно соседних) это равенство остается в силе.

Выведем из условий а) – с) выражение для определителя в двумерном случае. Здесь $e^1 = (1,0)^T$, $e^2 = (0,1)^T$. Имеем: $V = V(a^1, a^2) = V(a_{11}e^1 + a_{21}e^2, a_{12}e^1 + a_{22}e^2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})V(e^1, e^2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Аналогично из приведенных аксиом однозначно выводится выражение для объема параллелепипеда, порожденного векторами a^1, a^2 и a^3 в трехмерном случае: $V(a^1, a^2, a^3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$.

Продолжая этот процесс, приходим к такому результату: *существует единственная функция $V = V(a^1, \dots, a^n)$, которая определяется аксиомами а) - с).* Для этой функции имеет место равенство

$$\sum_P (-1)^{|P|} \Pi_{i=1}^n a_{iP(i)},$$

где сумма берется по всем перестановкам P первых n чисел $\{1, 2, \dots, n\}$, где число $|P|$ равно числу транспозиций соседних элементов, требующихся для перехода от $(P(1), P(2), \dots, P(n))$ к $\{1, 2, \dots, n\}$. Например, член $a_{13}a_{21}a_{32}$ имеет знак +, ибо переход от (312) к (123) требует двух транспозиций:(312) → (132) → (323)).

Определителем (детерминантом) матрицы A, составленной из столбцов $a^1, a^2, \dots, a^n$, называется число $\det A = V(a^1, a^2, \dots, a^n)$. Сформулируем сказанное еще раз.

Определение 6. Определителем системы векторов $\{a^1, \dots, a^n\}$ из $\mathbb{R}^n$ называется значение на этой системе векторов единственным образом определяемой функции $\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям а) - с) нормировки, антисимметрии и линейности по каждому аргументу. Если матрица A, составлена из столбцов $a^1, a^2, \dots, a^n$, то $\det(a^1, a^2, \dots, a^n)$ называется *определителем матрицы A.*

Теорема 6 (правило Крамера). *Если определитель системы n уравнений с n неизвестными отличен от нуля, тогда система $(1)_n$ лекции 1 однозначно разрешима для любой правой части, и решение определяется формулами Крамера:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \ \det A_i = V(a^1, \dots, a^{i-1}, y, a^{i+1} \dots, a^n), \ 1 \le i \le n. \qquad (i)$$

Доказательство. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда по его столбцы линейно независимы (ибо в противном случае из линейности определителя по столбцам следовало бы, что определитель равен нулю). По теореме 1.1 система $(1)_n$ разрешима. В силу разрешимости системы $Ax = b$, найдутся $x_i, \ 1 \le i \le n$, такие, что $x_1 a^1 + \dots + x_n a^n = b$. Имеем

$$\det A_i = V(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n) =$$
$$V(a^1, \dots, a^{i-1}, x_1 a^1 + \dots + x_n a^n, a^{i+1}, \dots, a^n) = x_i \det A$$

Отсюда вытекают доказываемые равенства.

□

4.2. Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$. Подпространства в $\mathbb{E}^n$.

Евклидовым пространством $\mathbb{E}^n$ называется пространство векторов из $\mathbb{R}^n$, снабженное *скалярным произведением*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Число $|x| = \sqrt{\langle x, y\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^n}$ называется *модулем вектора* $x \in \mathbb{E}^n$.

Замечание. Скалярное произведение позволяет идентифицировать пространство $\mathbb{R}^n$ и пространство линейных функционалов на нем, обозначенное нами в лекции 1 через $\mathbb{R}^{n*}$. Это дает возможность изображать производную функции, определенной в $\mathbb{E}^n$ в том же пространстве $\mathbb{E}^n$. Вектор $f'(\widehat{x}) = (\frac{\partial f(\widehat{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\widehat{x})}{\partial x_n})$ называется *градиентом* f в $\widehat{x}$.

Векторы $x, y \in \mathbb{E}^n$, для которых $\langle x, y\rangle = 0$, называются *ортогональными.* Поясним это определение в плоском случае (рис. 2).

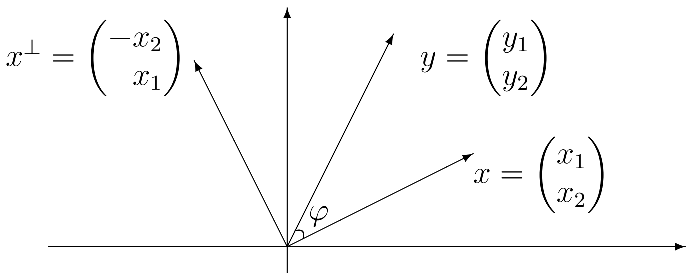

Рис. 2:

Найдем выражение для скалярного произведения векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ через координаты. Для этого надо найти выражение для косинуса угла между векторами x и y или, что то же $\sin(y, x^\perp)$ — синуса угла между векторами y и $x^\perp$. Воспользуемся теперь тем, что площадь $V(y, x^\perp)$ параллелограмма, натянутого на векторы y и $x^\perp$ равна с одной стороны $|x||y|\sin(y, x^\perp) = |x||y|\cos(x, y)$, а с другой — это определитель матрицы $\begin{pmatrix} -x_2\, x_1 \\ y_1\, y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 = \langle x, y\rangle$, откуда $\langle x, y\rangle = |x||y|\cos(x, y)$. Тем самым, ортогональность векторов равносильна тому, что косинус угла между ними равен нулю.

Множество $L \subset \mathbb{E}^n$ называется *подпространством*, если при всех $x, y \in L$ $\alpha x + \beta y \in L$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Множество векторов $\{e^1, \ldots, e^n\}$ называется *ортогональной системой*, если $\langle e^i, e^j\rangle = 0$ при всех $i \neq j$. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если $|e^i| = 1$ при всех $1 \leq i \leq k$. Ортогональная система называется *полной*, если из того, что $\langle x, e^i\rangle = 0$ для всех $1 \leq i \leq k$ следует, что $x = 0$.

Построим в подпространстве $L \subset \mathbb{E}^n$ полную ортонормированную систему. Если L не состоит из одного нуля, в нем имеется ненулевой вектор f^1. Положим $e^1 = \frac{f^1}{|f^1|}$. Если нет векторов из L, не пропорциональных e^1, то построение закончено. Пусть существует вектор f^2, не пропорциональный вектору f^1. Тогда вектор $g^2 = f^2 - \langle f^2, e^1\rangle e^1$ будет ортогонален e^1. Обозначим вектор $\frac{g^2}{|g^2|}$ через e^2. И далее будем поступать аналогично. Через некоторое число шагов, меньшее или равное n, все закончится построением системы $\{e^i\}_{i=1}^m$. Можно доказать, что m — инвариант подпространства: с какого вектора мы бы ни начинали и как бы ни продолжали, процесс закончится за m шагов. Число m называется *размерностью* подпространства L.

Для любого вектора ξ, не принадлежащего L, вектор $\xi - \sum_{i=1}^{m}\langle\xi, e^i\rangle e^i$ ортогонален L, а расстояние от ξ до L равно модулю этого вектора, т. е. числу $\sqrt{|\xi|^2 - \sum_{i=1}^{m}\langle\xi, e^i\rangle^2}$ (проверьте!). Отметим этот важный факт: *для любого подпространства, размерности меньшей n, существует прямая перпендикулярная этому подпространству.* Это дает возможность сформулировать отличное от теоремы Кронекера – Капелли условие разрешимости уравнения $Ax = y$:

Предложение 4.1. *Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ возможно было бы решить, необходимо и достаточно, чтобы вектор y был ортогонален любому решению однородного уравнения с транспонированной матрицей A^T.*

Действительно, если ξ — решение уравнения $Ax = y$, а η — решение уравнения $A^T x = 0$, то $\langle y, \eta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle A\xi, \eta\rangle \stackrel{\text{Id}}{=} \langle\xi,\ A^T\eta\rangle = 0$.

Допустим теперь, что вектор y ортогонален любому решению уравнения $A^T x = 0$, но решения $Ax = y$ не существует. Образ $\mathbb{E}^n$ при отображении A — подпространство и $y \notin A\mathbb{E}^n$. Пусть y' основание перпендикуляра из y на $A\mathbb{E}^n$. Тогда $\langle y - y', Ax\rangle = 0$ для всех x и значит, $\langle A^T(y - y'), A^T(y - y')\rangle = 0$, т. е. $A^T(y - y') = 0$. Тогда по условию $\langle y, y - y'\rangle = 0$, откуда (в силу того, что $y - y'$ ортогонально y') получаем, что $\langle y - y', y - y'\rangle = 0$, т. е. $y \in L$ — противоречие. $\square$

Исторический комментарий. *Аксиоматическое определение детерминанта было предложено во второй половине 19 века К. Вейерштрассом (1815 – 1897) и Л. Кронекером; это определение следовало из коцепции Грассмана, изложенной в его труде «Учение о линейном протяжении»(1847), который долго оставался невостребованным.*

Лекция 3. Приведение квадратичных форм к главным осям.

Если ничто не собьёт нас с пути, то мы уподобимся Зигфриду, перед которым огненный вал раступается сам собою

Д. Гильберт.

Здесь доказываются теоремы Фредгольма и Гильберта — центральные в бесконечномерной теории линейных уравнений и квадратичных форм.

5.1. Теория конечномерных квадрик

Квадрика — это множество уровня квадратичной функции, а квадратичная функция в $\mathbb{E}^n$ — это функция, равная сумме квадратичной формы, линейной функции и константы, т. е. $f(x) = \langle Ax, x\rangle + 2\langle b, x\rangle + c = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$. Здесь A — симметричная матрица, т. е. $A^T = A$ или $a_{ij} = a_{ji}$ для любых i и j. Квадратичную форму назовем *невырожденной*, если матрица A является разрешимой.

У невырожденных квадратичных форм можно избавиться от линейных членов. Для этого сдвинем систему координат параллельно на вектор a, перейдя к координатам $y = x + a$,. Подставив в f вместо x вектор $y - a$ и обозначив $\varphi(y) = f(y - a)$, получим $\varphi(y) = \langle A(y - a), (y - a)\rangle + 2\langle b, (y - a)\rangle + c$. После несложных преобразований будем иметь: $\varphi(y) = \langle Ay, y\rangle + 2\langle b - Aa, y\rangle + c'$, где $c' = c + \langle Aa - 2b, a\rangle$. Если A разрешимая матрица, то можно решить уравнение $Aa = b$, что приведет квадратичную форму к более простому виду $\langle Ay, y\rangle + c'$.

Приведем квадратичную форму $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ к *главным осям* или к *каноническому виду*.

Теорема 7 (теорема о приведении квадратичной формы к главным осям.) *Для любой симметричной матрицы A найдутся $m \le n$ единичных взаимно ортогональных векторов $\{f^i\}_{1\le i\le m}$ и m отличных от нуля чисел λ_i, при которых квадратичная форма Q приобретает вид: $Q(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle f^i, x\rangle^2$,* Прямые, порождаемые векторами f^i, называются *главными осями.*

Доказательство. Метод доказательства теоремы 5.1 и ее обобщения на бесконечномерный случай связан с постановкой и решением некоторых задач на максимум и минимум с помощью правила множителей Лагранжа.

Рассмотрим задачу на максимум при наличии ограничения типа равенства:
$f_0(x) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j \to \max$, $f_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, или, в сокращенной форме:

$$\langle Ax, x\rangle \to \max,\ \langle x, x\rangle = 1. \tag{P_1}$$

Единичная сфера $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ — компакт в $\mathbb{E}^n$, функция f_0 непрерывна всюду в $\mathbb{E}^n$, значит, по теореме Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте решение поставленной задачи существует. Обозначим его e^1. Из правила множителей Лагранжа следует, что найдется число λ_1 для которого $Ae^1 = \lambda_1 e^1$ (вектор e^1 называется *собственным вектором матрицы A*, а число λ^1 называется *собственным значением этой матрицы.* Мы доказали существование первого собственного вектора матрицы A. Допустим, мы доказали существование k ортогональных векторов $\{e^j\}_{1\le j\le k}$, $k < n$. Докажем существование $k+1$-го вектора. Для этого рассмотрим задачу

$$\langle Ax, x\rangle \to \max,\ \langle x, x\rangle = 1,\ \langle x, e^j\rangle = 0,\ 1 \le j \le k. \tag{P_k}$$

Снова из соображений компактности решение существует. Обозначим его e^{k+1}. Из правила множителей Лагранжа следует, что найдутся константы $\lambda_{k+1}, \mu_1, \dots, \mu_k$ такие, что $Ae^{k+1} = \lambda_{k+1}e^{k+1} + \mu_1 e^1 + \ldots + \mu_k e^k$. Умножая это равенство последовательно на $e^1, \dots, e^k$, получаем, что $\mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$. Мы построили $k+1$-й собственный вектор. Так будут построена система из n ортонормированных векторов $\{e^k\}_{1\le k\le n}$. В силу ортонормированности эта система линейно независима (почему?). А тогда в силу альтернативы для решения системы, присоединение любого вектора x его можно выразить через $\{e^k\}_{1\le k\le n}$: $x = \sum_{k=1}^n x_k e^k$. Умножая это равенство на e^k и пользуясь ортонормированностью, приходим к равенству: $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e^k\rangle e^k$, а значит (в силу линейного свойства A) будем иметь $Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, e^k\rangle e^k$ и, наконец, в силу ортонормированности e^k, получаем окончательно: $f_0(x) = \sum_{1\le k\le n} \lambda_k \langle x, e^k\rangle^2$. $\square$

В связи с доказанной теоремой разумно ввести два важных понятия.

Определение 7. Пусть A — матрица размеров $n \times n$. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ называется *собственным вектором* матрицы A, если существует число λ такое, что $Ax = \lambda x$. Если строки матрицы образуют ортонормированную систему в $\mathbb{R}^n$, то такая матрица называется *ортогональной.*

Доказанную теорему можно переформулировать так: *квадратичная форма ортогональной заменой переменных приводится к каноническому виду* или *симметрический оператор ортогональным преобразованием приводится к главным осям.*

Исторический комментарий. *Применение методов теории экстремума для сведения квадратичной формы к сумме квадратов было осуществлено Лагранжем в 1759 г.*

5.2. Бесконечномерное евклидово пространство — пространство l_2. Доказательство теоремы Фредгольма

Пространство l_2 образовано векторами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, обладающими свойством $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_i^2 < \infty$. Выражение $(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_i^2)^{1/2}$ называют *модулем* x и обозначают $|x|$. Пространство l_2 можно снабдить *скалярным произведением* $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n + \ldots$, которое оказывается конечным для любых двух векторов из l_2.

Это вытекает из следующего неравенства (Коши – Буняковского) для двух векторов x и y из l_2: $|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|$. (В конечномерном случае оно вытекает из соотношений $0 \leq \langle x - ty, x - ty\rangle \overset{\mathrm{Id}}{=} |x|^2 - 2t\langle x, y\rangle + |y|^2$, а в бесконечномерном случае надо перейти к пределу).

Из неравенства Коши – Буняковского следует, что линейная комбинация векторов из l_2 не выводит из этого пространства. Определение модуля дает возможность превратить l_2 в метрическое пространство (определение см. в Дополнении), положив расстояние $d(x, y)$ между векторами x и y равным $|x - y|$. Доказывается, что пространство l_2 является полным.

Замечание об определителях в l_2. Некоторое время в 19 веке делалась попытка построить теорию бесконечных систем линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных с помощью определителей, но она оказалась не вполне удачной и была заменена геометрической теорией к изложению которой мы переходим.

Теорема Фредгольма в бесконечномерном случае была нами сформулирована в главе 1 в пространстве l_2^T. Переформулируем ее в пространстве l_2 векторов x, в которых введено скалярное произведение. Переформулировка этой теоремы такова:

Теорема (Фредгольма). *Пусть матрица A представляет собой сумму $I+B$ единичной матрицы и матрицы $B = (b_{ij})_{1\leq i,j<\infty}$, удовлетворяющей условию*
$\|B\| = (\sum_{i,j\in\mathbb{N}} b_{ij}^2)^{1/2} < \infty$. *Тогда:*

a) Имеет место альтернатива: или уравнение $Ax = y$ разрешимо для любого $y \in l_2$, или однородное уравнение $Ax = 0$ имеет ненулевое решение.

b) Для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $\langle y, x\rangle$ вектора y на любое решение однородного уравнения $A^Tx = 0$, было равно нулю (иначе говоря, вектор y долженн быть ортогонален подпространству $\mathrm{Ker}A^T$).

Доказательство. A) Допустим, что нашу систему $Ax = y$ можно решить для любой правой части, а однородное уравнение имеет ненулевое решение, и придем к противоречию. Доказательство в этой части проходит в значительной мере по схеме конечномерных теорем главы 1 и основывается на таком утверждении.

Лемма 5.1. *Не существует бесконечной последовательности единичных векторов $\{f^i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такой, что расстояния между Bf^i и Bf^j при $i \neq j$ превосходят некоторое положительное число.*

Доказательство леммы. Пусть $|Bf^i - Bf^j| \geq \alpha,\ i \neq j$. Выберем N настолько большим, чтобы $\|B - B_N\| \leq \frac{\alpha}{4}$ (i), где $B_N = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$. Тогда будем иметь ((TI) — Triangle Inequality – неравенство треугольника): $|B_Nf^i - B_Nf^j| \overset{\text{Id}}{=} |Bf^i - Bf^j + B_Nf^i - Bf^i - B_Nf^j + Bf^j| \overset{\text{TI}}{\geq} |Bf^i - Bf^j| - |B_Nf^i - Bf^i| - |B_Nf^j - Bf^j|$ (ii). Но из неравенства Коши – Буняковского вытекает, что $|B_Nf^i - Bf^i| \leq \|B_N - B\|\,|f^i| \overset{(i)}{\leq} \alpha/4$, аналогично $|B_Nf^j - Bf^j| \leq \alpha/4$, откуда и из (ii) следует, что $|B_Nf^i - B_Nf^j| \geq \alpha/2$. Мы свели дело к конечномерному случаю и должны доказать, что в N-мерном шаре $\mathrm{Ball}^N(o,R)$ с центром в нуле радиуса $R = \|B_N\|$ нельзя расположить слишком много точек x^i, находящихся друг от друга на расстоянии, большем $\alpha/2$. Пусть нам удалось расположить в шаре $\mathrm{Ball}^N(o,R)$ k точек $\{x^1,\ldots,x^k\}$. Это значит, что внутренности шаров $\mathrm{Ball}^N(x^i,\alpha/4)$ друг с другом не пересекаются. Но все эти шары лежат внутри шара $\mathrm{Ball}^N(o,R')$, где $R' = R + \alpha/4$. Откуда следует оценка $k\mathrm{VolBall}^N(o,\alpha/4) \leq \mathrm{VolBall}^N(o,R')$, где $\mathrm{VolBall}^N(o,\rho)$ — объем шара с центром в нуле радиуса ρ. Мы пришли к оценке $k \leq (\frac{4R'}{\alpha})^N$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. По предположению существует ненулевое решение e^1 уравнения $Ax = 0$, и при этом можно считать, что $|e^1| = 1$. Обозначим через $L_k = \mathrm{KerA^k}$. Доказано, что L_1 нетривиально. Решение уравнения $Ae^2 = e^1$ и далее $Ae^{k+1} = e^k$ показывает, что все L_k нетривиальны. При этом из леммы I вытекает, что все L_k — конечномерны (иначе мы построили бы в L_k ортонормированную систему из любого числа векторов g^k таких, что $|Bg^i - Bg^j| = |g^i - g^j| = \sqrt{2}$. Рассмотри последовательность Be^n. Пусть $m > n$. Легко понять, что $z_n = e^n - Ae^n + Ae^m \in \mathrm{Ker}A^{m-1}$. Значит, $\|Be^m - Be^n\| = \|z_n - e_m\| \geq 1/2$. Пришли к противоречию с компактностью оператора B. Следовательно, $\mathrm{Ker}A = 0$.

B) Пусть $AX \neq X$. Для доказательства, утверждения, что тогда $\mathrm{Ker}A \neq 0$, придется использовать два факта, которые будут доказаны в Дополнении): 1) AX — замкнутое подпространство в l_2, и 2) к замкнутому подпространству l_2 можно провести перпендикуляр. Итак, AX — замкнутое подпространство. Пусть y — перпендикуляр к нему, т. е. $\langle y, Ax\rangle = \langle A^Ty, x\rangle = 0\ \forall x \in X$. Это означает, что $A^Ty = 0$, т. е. $\mathrm{Ker}A^T \neq 0$. По доказанному в A) отсюда следует, что $A^TX \neq X$. А по только что доказанному, отсюда следует, что $\mathrm{Ker}A^{TT} \neq 0$. Но $A^{TT} = A$ (двукратная смена строк и столбцов все возвращает на место). Вот мы и доказали, что хотели: $AX \neq X \Rightarrow \mathrm{Ker}A \neq 0$.

□

5.3. Теория квадрик в l_2. Теорема Гильберта о приведении квадратичной формы к главным осям.

Спектральная теорема Гильберта *Пусть матрица $A = (a_{ij})_{1\leq i,j<\infty}$ такова, что $\sum_{i,j} a_{ij}^2 < \infty$, тогда найдется последовательность единичных взаимно ортогональных векторов $\{f^i\}_{1\leq i\leq n}$ и последовательность чисел λ_i, при которых квадратичная форма $f(x) =$*

$\langle Ax, x\rangle$ *приобретает вид:* $f(x) = \sum_{i=1}^{i} \lambda_i \langle f^i, x\rangle^2$.

Доказательство проходит в точности по схеме доказательства конечномерной теоремы.

Рассмотрим задачу на максимум при наличии ограничения типа равенства: $f_0(x) = \sum_{1 \le i,j < \infty} a_{ij} x_i x_j \to \max$, $f^1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1$, или, в сокращенной форме:

$$\langle Ax, x\rangle \to \max, \ \langle x, x\rangle \le 1. \qquad (P_2)$$

Сразу отметим отличие: раньше у нас было равенство $\langle x, x\rangle = 1$, теперь оно сменилось неравенством $\langle x, x\rangle \le 1$. Именно шар $B_{l_2}(0,1) = \{x \in l_2 \mid \langle x, x\rangle \le 1$ обладает свойством (слабой) компактности, позволяющем утверждать, что решение задачи (P_2) существует. И правило множителей Лагранжа в пространстве l_2 применимо. Эти факта оставим без доказательства. А далее доказатльство в точности повторяет то, что было проделано в конечномерном случае.

Остались не доказанными три утверждения, относящихся, собственно, к общей топологии и одно к математичесому анализу. Это утверждения о замкнутости и перпендикуляре в теореме Фредгольма и существовании максимума в теореме Гильберта.