# Лекция 4. Начала дифференциального исчисления

Поворот в математике [вызванный зарождением математического анализа] произошел в 17 веке одновременно с созданием основ математического естествознания. Значение этого поворота настолько велико, что образовавшиеся в результате него разделы объединяют под названием *высшей* математики в отличие от сложившейся ранее *элементарной* математики".

А. Н. Колмогоров

*В этой лекции мы вначале на короткое время возвращаемся к истокам, к началам дифференциального исчисления. Основная же часть этой лекций посвящена теоремам существования решений дифференциальных уравнений.*

### 6.1. Об истоках математического анализа.

Основоположниками математического анализа были И. Ньютон и Г. Лейбниц (1646 – 1716). Ньютон создавал анализ, как аппарат естествознания, Лейбниц был воодушевлен широчайшей программой развития человеческой мысли, существенной компонентой которой, по его мнению, было создание *исчислений.* Он заложил начала дифференциалного исчисления.

Приведем слова Ньютона, где он объясняет суть математического анализа: *Для пояснения искусства анализа надо привести некоторые примеры задач [...]. 1) Пусть длина пути известна. Нужно узнать скорость в данный момент времени. 2) Пусть известна скорость движения. Надо узнать длину пройденного пути."*

Продумывание первой задачи Ньютона с неизбежностью ведет к понятию производной, как скорости движения. Скорость $v(\tau)$ при малом $\Delta t$ *примерно равна* средней скорости

$\frac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ (где $s(t)$ – длина пути, пройденного объектом к моменту времени $t$), и величина $v(\tau)$ равна *пределу* таких отношений при $\Delta t$ стремящемся к нулю, т. е. $v(\tau) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$. Этот предел стали называть *производной пути по времени* и обозначать $\dot{s}(\tau), s'(\tau)$ или $\frac{ds(\tau)}{d\tau}$. Первое обозначение принадлежит Ньютону, второе Лагранжу, третье Лейбницу.

Вернемся к эйлеровым обозначениям, когда независимое переменное обозначается $x$, а функция $f$. Приведем три известных определения производной $f'(\widehat{x})$ функции $f$, определенной в некоторой окрестности точки $\widehat{x}$:

1) $f'(\widehat{x}) = \lim\limits_{x \to \widehat{x}} \frac{f(x)-f(\widehat{x})}{x-\widehat{x}}$.

2) Производная $f'(\widehat{x})$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику $f$, проведенной в точке $\widehat{x}$.

3) Производная $f'(\widehat{x})$ равна главной линейной части отображения $x \to f(x)$ в точке $\widehat{x}$; это такое число $A$, что $f(\widehat{x}+x) = f(\widehat{x}) + Ax + o(x)$.

Первое определение принадлежит Коши, второе Лейбницу, а третье, собственно говоря, Фреше (который дал определение в бесконечномерном случае, но полагал, что оно неизвестно в конечномерном: описывая производную функции многих переменных он написал “...differentiele à mon sens"(“дифференциал *в моем смысле*”).

И как тут не вспомнить известный рассказ.

... Однажды, войдя в аудиторию, лорд Кельвин спросил студентов:“Что такое $\frac{dx}{dt}$?” В ответ он получил все возможные логические определения. “Оставьте это, — воскликнул он, — $\frac{dx}{dt}$ — это скорость!”

Ньютон, кстати, очень хорошо осознавал смысл предельного перехода. Он писал: “Количества [...], которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приближаются друг к другу ближе, нежели на любую заданную величину, будут в пределе равны”. Полную ясность в этот вопрос внес О. Коши (1789 – 1857). Число $a$ называется *пределом* последовательности $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ при $n$ стремящемся к бесконечности (или функции $f$, определенной на интервале $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ при $x$, стремящемся к $x_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся число $N$ (или положительное число $\delta$), такие что $|x^n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$ ($|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x : |x - x_0| < \delta$).

Из определений легко следуют формулы *исчисления пределов*: предел линейной комбинации, произведения, частного двух последовательностей или функций равен линейной комбинации, произведению, частному пределов этих последовательностей или функций (в последнем случае, если предел знаменателя не равен нулю).

Совершенно аналогично осмысление второй задачи — об определении пути по скорости. Оно неизбежно ведет к понятию римановой суммы. Пусть нам известна скорость $v(t)$ в любой момент $t$ на временном отрезке $[t_0, t_1]$, и мы хотели бы найти длину пути, преодоленного за этот период времени. Естественно тогда разбить отрезок $[t_0, t_1]$ на малые промежутки точками $t_0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_{N+1} = t_1$ и считать, что на участке $\Delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$ скорость *примерно постоянна* и равна $v(\theta_k)$, где $\theta_k$ какая-то точка на отрезке $\Delta_k$. Таким образом, преодоленный путь, равный $s(t_1)-s(t_0)$ *примерно равен* $\sum_{k=0}^{N} v(\theta_k)|\Delta_k|$ (where $|\Delta|$ — это длина отрезка $\Delta$. Эта сумма и называется *римановой суммой* и обозначается $R(v(\cdot), D, S)$, где $D$ (от слова “division” – разбиение) – разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ на малые отрезки $\Delta_k$, а $S$ (от слова “selection” – выбор) – выбор точек $\theta_k$ на $\Delta_k$. Так мы приходим к понятию интеграла, как *предела римановых сумм* (точное определение будет дано впоследствиии). Этот предел обозначают $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$ и называют *определенным интегралом* или *интегралом Римана* от функции $v(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Подведем предварительный итог. Мы пришли к формулам: $s'(t) = v(t)$; $\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = s(t_1) - s(t_0)$ и в первом приближении обосновали фундаментальный результат о связи производной и интеграла, которым является

**Формула Ньютона – Лейбница или основная формула интегрального исчисления**:

$$\int_{t_0}^{t_1} s'(t)dt = s(t_1) - s(t_0). \tag{1}$$

Или еще $s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds$, т. е. интегрирование в некотором отношении – обратная операция по отношению к дифференцированию. Далее будут даны все необходимые уточнения. Ньютон обозначал независимое переменное буквой $t$ (от time – время). Сейчас чаще независимое переменное обозначают буквой $x$, а функцию – $f$. В этих обозначениях формула Ньютона – Лейбница записывается так: $f(x_1) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f'(s)ds$.

### 6.2. Теоремы существования решения задачи Коши в теории дифференциальных уравнений.

Поворот в математике, о котором говорит А. Н. Колмогоров в приведенном выше эпиграфе, на языке математического анализа может быть выражен следующим образом: **законы, выражающие эволюцию процессов, происходящих в природе, описываются дифференциальными уравнениями**. В частности, законы механики описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Решения таких уравнений предопределяются начальными данными. Это создало у человечества иллюзию о том, что все в мире предопределено.

Наиболее остро выразил это Пьер Лаплас. Он сказал: “Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу и относительное положение всех ее составляющих частей, [...] он обнял бы в одной формуле движение величайших тел Вселенной наравне с движениями легчайших атомов, и ничто не осталось бы для него недостоверным. Будущее, равно, как и прошедшее, предстало бы перед его взором.”

Это воззрение оказалось иллюзией, но математическая основа справедлива и состоит в теореме существования и единственности решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения. Переходим к доказательству этой теоремы.

Пусть $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_{\mathbb{R}^n}(x_0, b) \to \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу:

$$\dot{x} = f(t, x), \ \ x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

которую называют *задачей Коши для дифференциального уравнения* $\dot{x} = f(t, x)$.

**Теорема 8 (локальная теорема существования решения задачи Коши).** *Если $f$ непрерывна в $D$ и липшицева с константой $L$ по $x$, то на $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ ($\alpha = \min(a, 1/2L, b/2M)$, где $M = \max_{t\in[t_0-a,t_0+a]} |f(t, x_0|)$ существует и единственно решение* (2.1).

*Доказательство.* Здесь следует применить теорему о (правом) обратном отображении в бесконечномерном случае (из второй лекции) в ситуации, когда $X = Y = C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R}^n)$, $x_0(\cdot) \equiv x_0$, $F(x(\cdot))(t) = x(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$, $\Lambda = \mathrm{Id}$, $\theta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\delta = b$, $\alpha = \frac{b}{2}$.

Проверим выполнимость условий этой теоремы. Имеем: $\|F(x_0(\cdot))(\cdot)\|_{C([t_0-\alpha,t_0+\alpha],\mathbb{R}^n)} \le \delta M \le \frac{b}{2}$ (т. е. функция тождественно равная нулю принадлежит $B_{C([t_0-\alpha,t_0+\alpha])})(F(x_0(\cdot)(\cdot), \alpha)$, и поскольку для любых $\xi(\cdot)$, $x(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\|F(\xi(\cdot))(\cdot) - F(x(\cdot))(\cdot) - (\xi(\cdot) - x(\cdot))\|_{C([t_0-\alpha,t_0+\alpha],\mathbb{R}^n} \le \max_{t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]} |\int_{t_0}^t (f(s,\xi(s)) - f(s,x(s))ds| \le$$

$$|t - t_0| L \|\xi(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([t_0-\alpha,t_0+\alpha],\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{2}\|\xi(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([t_0-\alpha,t_0+\alpha],\mathbb{R}^n)},$$

условия теоремы о правом обратном отображении выполнены. Применение этой теоремы немедленно приводит к локальной теореме существования. □

**Теорема $8'$ (глобальная теорема существования решения задачи Коши для линейной системы).** *Пусть $\Delta = [t_0, t_1]$, функции $A : \Delta \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $b : \Delta \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывны на отрезке $\Delta$, $\tau \in \Delta$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда на $\Delta$ существует единственное решение задачи Коши*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t),\ x(\tau) = \xi. \tag{2.2}$$

*Доказательство.* Здесь следует применить теорему о правом обратном к случаю, когда $X = Y = C(\Delta, \mathbb{R}^n)$, тождественному оператору $\Lambda$ и $F(x(\cdot))(\cdot) = x(\cdot) - G^m(x(\cdot))(\cdot)$, где $G$

$G(x(\cdot))(t) = \xi + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + b(s))ds$ и $G^m$ – $m$-тая степень оператора $G$. По индукции доказывается, что $|F(\xi(\cdot))(t) - F(x(\cdot))(t) - (\xi(t) - x(t))| \le \frac{c^m}{m!}\|\xi(\cdot) - x(\cdot)\|_{C(\Delta,\mathbb{R}^n)}$, где $c = \int_\Delta \|A(t)\|dt$. Подобрав $m$ таким, чтобы $\frac{c^m}{m!} < 1$ и применив теорему о правом обратном, приходим к утверждению теоремы $8'$. □

# Лекция 5. Определенный интеграл

*Здесь будет рассказано об определенных интегралах функций одного переменного, измерении площадей плоских фигур и объемов многомерных тел и об определенном интеграле функций многих. Параллельно речь пойдет о дифференциальных формах в одномерном, двумерном и трехмерном случаях.*

**7.1. Определенный интеграл в одномерном случае.** Фактически это понятие было введено в п. 6.1. Дадим точное определение.

Пусть $f$ — функция, определенная на конечном отрезке $[a, b]$, $-\infty < a < b, \infty$. Раздробим отрезок $[a, b]$ на примыкающие друг к дружке отрезки $\Delta_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $1 \le k \le N$ (иногда вырождающиеся в точку), порожденную системой точек $a = \alpha_0 \le \alpha_1 \ldots \le \alpha_{n+1} = b$. Обозначим это разбиение буквой $D$. Рассмотрим сумму $\sum_{k=1}^N f(x_k)|\Delta_k|$ (где $|\Delta|$ — это длина отрезка

$\Delta$), а $S = \{x_i\}_{i=1}^N$ — некоторая выборка $x_k \in \Delta_k$. Эта сумма называется *римановой суммой* и обозначается $R(f(\cdot), D, S)$. Величину $\rho = \rho(D) = \max_{1 \le k \le N} |\Delta_k|$ назовем *размером* разбиения.

**Определение 8.** Число $I$ называют определенным интегралом функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, что для любого разбиения $D$ отрезка $[a, b]$ размера меньшего $\delta$, для любой выборки $S$ выполнено неравенство $|R(f(\cdot), D, S) - I| < \varepsilon$. Эту величину обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$, а саму функцию $f$ называют *интегрируемой (по Риману)*.

**Теорема 9.** *Функция, непрерывная на конечном отрезке, интегрируема на нем.*

**Доказательство.** Пусть $f$ — непрерывная функция на $[a, b]$. Рассмотрим некоторое разбиение $D = \cup_{i=1}^N \Delta_k$. Нижней выборкой $S_-$ по этому разбиению назовем такую выборку, при которой в каждом отрезке $\Delta_k$ выбирается одна из точек этого отрезка, где $f$ принимает наименьшее значение. Аналогично определяется верхняя выборка $S_+$ (где берется наибольшее значение). Для любой выборки $S$ по разбиению $D$ выполнены очевидные неравенства $R(f, D, S_-) \le R(f, D, S) \le R(f, D, S_+)$. Из теоремы Кантора о равномерной непрерывности по любому $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, для которого из неравенства $\rho(D) < \delta$ следует, что $R(f, D, S_+) - R(f, D, S_-) < \varepsilon$. Отсюда следует, что число $I$, равное верхней грани по $D$ всех сумм $R(f, D, S_-)$ совпадает с нижней гранью по $D$ всех сумм $R(f, D, S_+)$, и что это число удовлетворяет определению 8. $\square$

**7.2. Плоские области и измерение их площадей.** Для того, чтобы найти площадь квадрата, надо измерить длину его стороны, взяв в качестве масштаба, скажем, 1 см, и если длина стороны квадрата равна $a$ см, его площадь по определению равна $a^2$ см$^2$. Пусть теперь мы хотим определить, что такое площадь какой-то фигуры $\Phi$, расположенной на плоскости (скажем, полукруга, радиуса $R$ см) и подсчитать площадь $S(\Phi)$ этой фигуры. Для определенности пусть радиус полукруга 1 см. Разместим основание полукруга на отрезке $[-1, 1]$ на оси $Ox_1$ в плоскости, так что полукруг оказывается расположенным между графиком функции $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$ и основанием.

Вырежем (мысленно) некоторое количество квадратиков размера 1 мм$^2$ и будем выкладывать их друг к дружке, чтобы они целиком поместились в нашей фигуре (в нашем примере — в полукруге). Подсчитаем их общую площадь (которую будем всегда измерять в см$^2$), пусть она равна $a_{12}$ см$^2$ ($a_{12}$ — первая оценка площади двумерной фигуры). При этом, разумеется, останутся непокрытые места. Дальше будем поступать уже "умственно": вырежем (умственно) некоторое количество квадратиков размера 0.1 мм $=10^{-2}$ см и будем их прикладывать к объединению начальных, миллиметровых квадратиков, сколько возможно, и к тому же заполним маленькими квадратиками и миллиметровые квадратики. Пересчитаем полученную площадь снова в см$^2$, получим число $a_{22}$ см$^2$. Ясно, что $a_{12} < a_{22}$. Далее будем поступать аналогично, вкладывая квадратики со сторонами $10^{-n}, n \ge 3$ см, и получая площади $a_{n2}$ см$^2$, удовлетворяющие неравенствам $a_{12} < a_{22} < \ldots < a_{n2} < \ldots$. Согласно известному свойству чисел, монотонно возрастающая ограниченная сверху (в нашем случае двумя квадратными сантиметрами) последовательность чисел имеет предел (этот факт называют иногда аксиомой Вейерштрасса, иногда его теоремой). Этот предел (пусть это будет число $a_{\infty 2}$) назовем *нижней площадью фигуры*. Аналогично поступим с покрытием фигуры. Сначала покроем ее целиком наименьшим числом сантиметровых, потом миллиметровых и т. д. квадратиков. И будем получать числа $b_{12} > b_{22} > \ldots > b_{n2} > \ldots$, очевидно, ограниченные снизу. Предел этой последовательности (снова по аксиоме или теореме Вейерштрасса) обозначим $b_{\infty 2}$ и назовем *верхней площадью фигуры.* Ясно, что $a_{\infty 2} \leq b_{\infty 2}$.

Если числа $a_{\infty 2}$ и $b_{\infty 2}$, определенные выше, совпадают, т. е. $a_{\infty 2} = b_{\infty 2} = S$, плоскую фигуру называют *измеримой по Жордану,* а число $S$ см$^2$ называется *площадью фигуры* Ф: $S = S(\Phi)$.

Можно доказать, что это определение площади фигуры не зависит от того, как расположена фигура на плоскости относительно декартовой системы координат и какие размеры квадратиков мы последовательно выбираем.

Если освоиться с понятием площади фигуры, то становится понятным равносильность определения 8 и следующего определения:

**Определение** $8_1$**.** Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции $f$, определенной на отрезке $[a, b]$, по определению — это площадь фигуры, ограниченной прямыми $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $x_1 = b$ и графиком функции $x_2 = f(x_1)$. Если функция меняет знак, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx + \int_a^b f_(x)dx$, где $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, а $f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$.

**Исторический комментарий.** *Измерять площади, как считается, люди научились очень давно. Полагают, что само название науки геометрия (geõmetria по-гречески "землемерие") происходит от того, что когда-то в древнем Египте люди научились мерить площади земельных участков. Долгое время ограничивались измерением многоугольных участков (их разбивали на треугольники, площади которых равняются половине произведения основания на высоту). Вопрос о том, что такое площадь круга, потребовал больших умственных усилий. В Древней Греции стали определять площадь круга, как число, равное пределу площадей вписанных правильных многоугольников, и равного ему пределу описанных правильных многоугольников. Исходя их этого определения Архимед первый получил оценки для площади единичного круга* $B^2(0,1) = \{\bar{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$: $3\frac{10}{71} < S(B^2(0,1)) < 3\frac{1}{7}$. *Приведенное определение измеримости принидлежит французскому ученому К. Жордану (1838 – 1922).*

**Одномерные дифференциальные формы и их исчисления. Формула Ньютона – Лейбница**

В одномерном случае существуют *дифференциальные формы* двух типов — функции $\omega_0 = f_0$ и выражения вида $\omega_1 = f_1(x)dx$ Формы $\omega_0$ можно дифференцировать, и мы приходим к специальному виду формы $\omega_1$: $df_0(x) = f_0'(x)dx$, вторые можно интегрировать: $\int_a^b f_1(x)dx$. Из формулы Ньютона – Лейбница получаем: $\int_a^b df_0(x) = f_0(b) - f_0(a)$. За этим простым фактом можно уже усмотреть замечательную формулу Пуанкаре $\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$.

### 7.2. Интегральное исчисление функций двух переменных

В этом разделе мы еще остаемся в школе, точнее, в тех школах, где преподают *стереометрию.* В стереометрии учат вычислять объемы. Начнем этот раздел с уточнения понятия объема пространственной фигуры. Будем двигаться по аналогии с тем, что рассказывалось в п.7.2.

**Пространственные фигуры и измерение их объемов.** Для того, чтобы найти объем куба, надо измерить длину его стороны, взяв в качестве масштаба, скажем, 1 см, и если длина стороны куба равна $a$ см, его объем по определению равен $a^3$ см$^3$. Пусть теперь мы хотим определить, что такое объем какой-то фигуры $\Psi$, расположенной в пространстве (скажем, полушара $B^3_+(O,R) = \{(x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2,\ x_3 \geq 0\}$, с центром в нуле радиуса $R$ см) и подсчитать объем $V(B^3_+(0,R))$ этой фигуры. Для определенности пусть опять $R = 1$ см. Расположим этот полушар так, как он нарисован на рис. 5.2, так что полушар $B^3_+ = B^3_+(O,1)$ оказывается расположенным между графиком функции $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ и основанием, являющимся кругом $x_1^2 + x_2^2 = 1$, расположенным в плоскости $x_3 = 0$. Все это можно как бы "материализовать", разрезав пополам, скажем, сантиметровый резиновый мячик и положив половину мячика на стол.

Возьмем набор одинаковых кубиков с миллиметровой длиной стороны и будем (мысленно) укладывать эти кубики в полушар "до упора". В итоге получим первую оценку объема полушара: $V(B^3_+) > a_{13}$ см.$^3$. Затем, заполним полушар "до упора" маленькими кубиками с длиной стороны, равной 0.1 мм , и получится вторая оценка $a_{23}$ объема $V(B^3_+)$ полушара. Продолжая умственно заполнять полушар кубиками все меньших и меньших размеров, будем получать последовательность оценок $0 < a_{23} < \ldots < a_{n3} < \ldots$. Последовательность эта, разумеется, ограничена сверху. Значит, она имеет предел. Обозначим его $a_{\infty 3}$ и назовем *нижним объемом фигуры.*

Аналогично поступим с покрытием фигуры. Сначала покроем полушар наименьшим числом кубиков размера кусочков сахара, потом кубикиков размера кубиков сахарного песку и т. д. И будем получать числа $b_{13} > b_{23} > \ldots > b_{n3} > \ldots$. Предел этой последовательности (снова по аксиоме или теореме Вейерштрасса) обозначим $b_{\infty 3}$ и назовем *верхним объемом фигуры.* Ясно, что $a_{\infty 3} \leq b_{\infty 3}$.

Если числа $a_{\infty 3}$ и $b_{\infty 3}$, определенные выше, для измеряемой фигуры $\Psi$ совпадают, т. е. $a_{\infty 3} = b_{\infty 3} = V$, пространственную фигуру называют *измеримой по Жордану*, а число $V$ см$^3$ называют *объемом фигуры* $\Psi$: $V = V(\Psi)$.

Можно доказать, что это определение не зависит от того, как расположена фигура в пространстве относительно декартовой системы координат и от размеров тех кубиков, которые используются при построении.

Если освоиться с понятием объема фигуры, то становится понятным естественность следующего определения:

**Определение** $8_2$**.** Определенный интеграл $\int_\Omega f(x)dx$ от неотрицательной функции $f$, определенной на плоском множестве, измеримом по Жордану, по определению — это объем фигуры, ограниченной цилиндром над $\Omega$ и графиком функции $x_3 = f(x_1, x_2)$, с естественным дополнением, касающимся функций, меняющих знак.

Аналогичным образом индуктивно вводится определенный интеграл функций в $\mathbb{R}^n$.

**Исторический комментарий.** *Измерять объемы многогранников, как считается, люди научились в Древней Греции. По свидетельству Архимеда Евдоксу (∼ 408 – ∼ 355 до н. э.) принадлежит прием вычисления объема пирамиды известный, как метод исчерпывания. Выдающуюся роль в понимании того, что такое площадь плоской фигуры и объем фигуры пространственной, сыграл сам Архимед (∼ 287 – 212 до н. э.). Шедевром античной матема-*

*тики является вычисление им объема шара.*