Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

Неоднородное интегральное уравнение (ИУ) Фредгольма 2-го рода имеет вид:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \qquad x \in [a;\ b].$$

Здесь $y(x)$ — неизвестная функция (непрерывная на $[a;\ b]$), $\lambda = \mathrm{const}$ — комплексный параметр, $K(x,s)$ и $f(s)$ — известные функции, непрерывные при $x, s \in [a;\ b]$. Функция $K(x,s)$ называется *ядром* ИУ. Обычно требуется решить ИУ для каждого значения параметра λ.

Если положить $f \equiv 0$, то получится *однородное* ИУ Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds\,, \qquad x \in [a;\ b].$$

Заметим, что однородное уравнение всегда имеет тривиальное решение: $y(x) \equiv 0$.

Те значения параметра λ, при которых однородное уравнение имеет ещё и нетривиальное решение $y(x) \not\equiv 0$, называются *характеристическими числами* (ХЧ), а соответствующие им нетривиальные решения $y(x)$ — *собственными функциями* (СФ).

Замечание 1. Даже у вещественного ядра $K(x,s)$ могут быть комплексные ХЧ и СФ. Но у вещественного *симметрического* ядра (для которого $K(x,s) \equiv K(s,x)$) все ХЧ вещественные.

Замечание 2. Все ХЧ — ненулевые: $\lambda \neq 0$ (из однородного уравнения Фредгольма 2-го рода видно, что если $\lambda = 0$, то $y(x) \equiv 0$).

Замечание 3. ХЧ может быть бесконечно много.

Вырожденным ядром называется ядро вида:

$$K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s),$$

где функции $a_j(x)$ — ЛНЗ и функции $b_j(s)$ — ЛНЗ (иначе можно выразить одни функции через другие и уменьшить число слагаемых).

У вырожденных ядер количество ХЧ конечно.

Однородное ИУ Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром имеет вид:

$$y(x) = \lambda \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)\right] y(s)\,ds,$$

откуда

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \underbrace{\int_a^b b_j(s) y(s)\,ds}_{C_j}.$$

Таким образом, любое решение однородного ИУ с вырожденным ядром имеет вид:

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(x).$$

Неизвестные константы C_j удовлетворяют ОСЛАУ:

$$C_j = \int\limits_a^b b_j(s) y(s)\, ds = \int\limits_a^b b_j(s) \left[\lambda \sum_{m=1}^{n} C_m a_m(s)\right] ds = \lambda \sum_{m=1}^{n} C_m \int\limits_a^b b_j(s) a_m(s)\, ds\,, \;\; j = 1, \dots, n.$$

Причём нетривиальное решение $y(x) \not\equiv 0$ будет существовать в том и только в том случае, когда не все C_j равны нулю.

Пример 1. Найти ХЧ и СФ ИУ:

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left[\sin(x+s) + \frac{1}{2}\right] y(s)\, ds.$$

Заметим, что ядро — вещественное и симметрическое. Значит, все его ХЧ — вещественные. Убедимся, что ядро является вырожденным:

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sin x \cos s + \cos x \sin s + \frac{1}{2}\right)}_{K(x,s)} y(s)\, ds.$$

$$K(x,s) = \underbrace{\sin x}_{a_1(x)} \underbrace{\cos s}_{b_1(s)} + \underbrace{\cos x}_{a_2(x)} \underbrace{\sin s}_{b_2(s)} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_3(x)} \cdot \underbrace{1}_{b_3(s)}.$$

Тогда

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^{2\pi} \sin x \cos s\, y(s)\, ds + \lambda \int\limits_0^{2\pi} \cos x \sin s\, y(s)\, ds + \lambda \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} y(s)\, ds =$$

$$= \lambda \sin x \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos s\, y(s)\, ds}_{C_1} + \lambda \cos x \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin s\, y(s)\, ds}_{C_2} + \frac{\lambda}{2} \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} y(s)\, ds}_{C_3},$$

$$y(x) = \lambda C_1 \sin x + \lambda C_2 \cos x + \frac{\lambda C_3}{2}.$$

Функции $\{1, \cos s\,, \sin s\,, \cos 2s\,, \sin 2s\,, \dots, \cos ns\,, \sin ns\,, \dots\}$ образуют ортогональную систему на отрезке $[0;\ 2\pi]$, т. е. являются попарно ортогональными, значит, интеграл от произведения любой пары этих функций по отрезку $[0;\ 2\pi]$ равен нулю. Используя этот факт, получим уравнения, которым удовлетворяют неизвестные константы C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos s\, y(s)\, ds = \int\limits_0^{2\pi} \cos s \left(\lambda C_1 \sin s + \lambda C_2 \cos s + \frac{\lambda C_3}{2}\right) ds = \lambda C_1 \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos s \sin s\, ds}_{0} + \\ +\lambda C_2 \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 s\, ds + \frac{\lambda C_3}{2} \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \cos s\, ds}_{0} = \lambda C_2 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2} ds = \frac{\lambda C_2}{2} \int\limits_0^{2\pi} ds + \\ + \frac{\lambda C_2}{2} \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \cos 2s\, ds}_{0} = \lambda \pi C_2, \\ C_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin s\, y(s)\, ds = \int\limits_0^{2\pi} \sin s \left(\lambda C_1 \sin s + \lambda C_2 \cos s + \frac{\lambda C_3}{2}\right) ds = \lambda C_1 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 s\, ds + \\ +\lambda C_2 \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos s \sin s\, ds}_{0} + \frac{\lambda C_3}{2} \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \sin s\, ds}_{0} = \lambda C_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2} ds = \frac{\lambda C_1}{2} \int\limits_0^{2\pi} ds - \\ - \frac{\lambda C_1}{2} \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \cos 2s\, ds}_{0} = \lambda \pi C_1, \\ C_3 = \int\limits_0^{2\pi} y(s)\, ds = \int\limits_0^{2\pi} \left(\lambda C_1 \sin s + \lambda C_2 \cos s + \frac{\lambda C_3}{2}\right) ds = \lambda C_1 \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \sin s\, ds}_{0} + \\ +\lambda C_2 \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \cos s\, ds}_{0} + \frac{\lambda C_3}{2} \int\limits_0^{2\pi} ds = \lambda \pi C_3. \end{cases}$$

Итак, получена система уравнений:

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_2 = 0, \\ C_2 - \lambda\pi C_1 = 0, \\ (1 - \lambda\pi) C_3 = 0. \end{cases}$$

Это ОСЛАУ относительно неизвестных констант C_1, C_2, C_3. Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi & 0 \\ -\lambda\pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda\pi \end{vmatrix} = 0.$$

$$(1 - \lambda\pi)(1 - \lambda^2\pi^2) = 0.$$

$$(1 - \lambda\pi)^2(1 + \lambda\pi) = 0.$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}.$$

При $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ ОСЛАУ принимает вид:

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_2 - C_1 = 0, \\ 0 \cdot C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_2 = C_1$; C_1, C_3 — произвольные константы (не равные нулю одновременно).

$$y(x) = \lambda C_1 \sin x + \lambda C_2 \cos x + \frac{\lambda C_3}{2} = \underbrace{\frac{C_1}{\pi}}_{\tilde{C}_1} \sin x + \underbrace{\frac{C_1}{\pi}}_{\tilde{C}_1} \cos x + \underbrace{\frac{C_3}{2\pi}}_{\tilde{C}_2} = \tilde{C}_1(\sin x + \cos x) + \tilde{C}_2.$$

При $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$ ОСЛАУ принимает вид:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_2 + C_1 = 0, \\ 2C_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_2 = -C_1$, $C_3 = 0$; C_1 — произвольная константа (не равная нулю).

$$y(x) = \lambda C_1 \sin x + \lambda C_2 \cos x + \frac{\lambda C_3}{2} = -\underbrace{\frac{C_1}{\pi}}_{C} \sin x + \frac{C_1}{\pi} \cos x = C(-\sin x + \cos x).$$

Ответ: $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, $y(x) = C_1(\sin x + \cos x) + C_2$, $|C_1| + |C_2| \neq 0$;
$\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$, $y(x) = C(\cos x - \sin x)$, $C \neq 0$.

Рангом ХЧ называется максимальное число отвечающих ему ЛНЗ СФ. В предыдущем примере для $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ имеются две ЛНЗ СФ: $\sin x + \cos x$ и 1 (ранг ХЧ равен 2), для $\lambda_2 = -\frac{1}{\pi}$ имеется одна ЛНЗ СФ: $\cos x - \sin x$ (ранг ХЧ равен 1).

Собственным значением (СЗ) интегрального оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$ называется число Λ, при котором уравнение $Ay = \Lambda$ имеет нетривиальные решения. Число ЛНЗ нетривиальных решений называется *рангом* СЗ.

Поскольку уравнение $Ay = \Lambda y$ имеет вид

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = \Lambda y(x),$$

то либо $\Lambda = 0$, либо можно поделить на Λ, и получится уравнение

$$\frac{1}{\Lambda}\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = y(x),$$

которое должно иметь нетривиальные решения. Тогда $\frac{1}{\Lambda} = \lambda$, т. е. СЗ являются величинами, обратными к ХЧ.

Пример 2. Доказать, что $\Lambda = 0$ является СЗ интегрального оператора Фредгольма $Ay = \int_0^{2\pi}\left(\sin x \cos s + \cos x \sin s + \frac{1}{2}\right) y(s)\,ds$, и определить его ранг.

Итак, надо убедиться в том, что ИУ

$$\int_0^{2\pi}\left(\sin x \cos s + \cos x \sin s + \frac{1}{2}\right) y(s)\,ds = 0 \cdot y(x)$$

имеет нетривиальное решение. Запишем его в виде:

$$\sin x \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos s\, y(s)\, ds}_{(\cos s, y)} + \cos x \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin s\, y(s)\, ds}_{(\sin s, y)} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} y(s)\, ds}_{(1, y)} = 0. \quad (1)$$

Вспомнив об ортогональности системы функций
$\{1, \cos s, \sin s, \cos 2s, \sin 2s, \dots, \cos ns, \sin ns, \dots\}$
на отрезке $[0;\, 2\pi]$, придём к выводу, что функции $y(x) = \cos 2x$, $\sin 2x$, …, $\cos nx$, $\sin nx$, … являются нетривиальными решениями уравнения (1). Поэтому $\Lambda = 0$ — СЗ. А поскольку нетривиальных решений бесконечно много и они ЛНЗ, то ранг СЗ $\Lambda = 0$ равен бесконечности.
Другие СЗ оператора A обратны найденным в примере 1 ХЧ: $\Lambda = \pi$ и $\Lambda = -\pi$.
Ответ: ранг СЗ $\Lambda = 0$ равен ∞.

Пример 3. Решить уравнение $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xs + x^2 s^2) y(s)\, ds + x^2 + x^4$.
Это неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром. Здесь λ — комплексный параметр. Требуется решить уравнение для каждого значения параметра λ. Имеем:

$$y(x) = \lambda x \underbrace{\int_{-1}^{1} s y(s)\, ds}_{C_1} + \lambda x^2 \underbrace{\int_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds}_{C_2} + x^2 + x^4 = \lambda C_1 x + (\lambda C_2 + 1) x^2 + x^4.$$

С учётом того что интеграл от нечётной функции в симметричных относительно нуля пределах равен нулю, получим:

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-1}^{1} s y(s)\, ds = \int_{-1}^{1} s[\lambda C_1 s + (\lambda C_2 + 1) s^2 + s^4]\, ds = \lambda C_1 \int_{-1}^{1} s^2\, ds + (\lambda C_2 + 1) \underbrace{\int_{-1}^{1} s^3\, ds}_{0} + \\ + \underbrace{\int_{-1}^{1} s^5\, ds}_{0} = \frac{2\lambda}{3} C_1, \\ C_2 = \int_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds = \int_{-1}^{1} s^2[\lambda C_1 s + (\lambda C_2 + 1) s^2 + s^4]\, ds = \lambda C_1 \underbrace{\int_{-1}^{1} s^3\, ds}_{0} + (\lambda C_2 + 1) \int_{-1}^{1} s^4\, ds + \\ + \int_{-1}^{1} s^6\, ds = \frac{2\lambda}{5} C_2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{2\lambda}{5} C_2 + \frac{24}{35}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2\lambda}{3}\right) C_1 = 0, \\ \left(1 - \frac{2\lambda}{5}\right) C_2 = \frac{24}{35}. \end{cases}$$

Если $\lambda \neq \frac{3}{2}$, то $C_1 = 0$.

Если $\lambda = \frac{3}{2}$, то C_1 — произвольное.

Если $\lambda \neq \frac{5}{2}$, то $C_2 = \frac{24}{35\left(1-\frac{2\lambda}{5}\right)} = \frac{24}{7(5-2\lambda)}$.

Если $\lambda = \frac{5}{2}$, то решений нет.

Значит, если $\lambda \neq \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, то

$$y(x) = \lambda C_1 x + (\lambda C_2 + 1)x^2 + x^4 = \left[\frac{24\lambda}{7(5-2\lambda)} + 1\right]x^2 + x^4 = \frac{5(2\lambda+7)}{7(5-2\lambda)}x^2 + x^4.$$

Если $\lambda = \frac{3}{2}$, то

$$y(x) = \lambda C_1 x + (\lambda C_2 + 1)x^2 + x^4 = \underbrace{\frac{3}{2}C_1}_{C} x + \frac{25}{7}x^2 + x^4 = Cx + \frac{25}{7}x^2 + x^4.$$

Ответ. При $\lambda \neq \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$: $y(x) = \frac{5(2\lambda+7)}{7(5-2\lambda)}x^2 + x^4$; при $\lambda = \frac{3}{2}$: $y(x) = Cx + \frac{25}{7}x^2 + x^4$, $C \in \mathbb{C}$; при $\lambda = \frac{5}{2}$: решений нет.