Краевые задачи

Рассмотрим линейное ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами:

$$(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

где функции a_0, a_1, a_2, f непрерывны. ОР этого уравнения содержит две произвольные константы. Значит, для выделения единственного решения надо поставить два дополнительных условия. Это могут быть *начальные* условия (НУ, условия Коши):

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1,$$

которые ставятся *в одной и той же точке* x_0. ОДУ+НУ=задача Коши.

Если же условия ставятся *в двух различных точках* (на краях некоторого отрезка), то они называются *краевыми* условиями (КУ). Тогда требуется найти значения функции $y(x)$ на отрезке, заключённом между этими двумя точками. Чаще всего ставятся следующие КУ:

$y(a) = \gamma_1$, $y(b) = \gamma_2$ — условия *Дирихле* (1-го рода),

$y'(a) = \gamma_1$, $y'(b) = \gamma_2$ — условия *Неймана* (2-го рода),

$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1$, $\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2$ — условия 3-го рода.

Условия 3-го рода включают условия Дирихле и Неймана как частный случай.

Если в точках a и b ставятся условия разного рода, то такие КУ называются *смешанными*.

ОДУ+КУ=краевая задача.

Рассмотрим *краевую задачу:*

$$\begin{cases} y'' + \ {}_1 y' + \ {}_2 y = f, & < x < b, \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, & \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

где $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

Чтобы решить краевую задачу, мы можем найти ОР ОДУ и подставить его в КУ, чтобы определить неизвестные константы.

Пример 1 (Филиппов № 754). Решить краевую задачу: $\begin{cases} y'' + y = 1, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ y(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

ОР дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Подставляем его в краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 1 = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = C_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = -1$.

Ответ: $y = -\sin x - \cos x + 1$.

Пример 2 (Филиппов № 755). Решить краевую задачу: $\begin{cases} y'' + y = 1, \ 0 < x < \pi, \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0. \end{cases}$

ОР дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Подставляем его в краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + 1 = 0, \\ y(\pi) = -C_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.

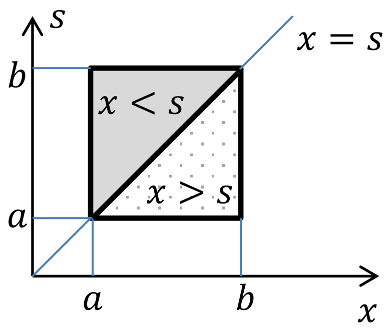
Ответ: решений нет.

Пример 3 (Филиппов № 756). Решить краевую задачу: $\begin{cases} y'' + y = 2x - \pi, \ 0 < x < \pi, \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0. \end{cases}$

ОР дифференциального уравнения:
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x - \pi, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$
Подставляем его в краевые условия:
$\begin{cases} y(0) = C_1 - \pi = 0, \\ y(\pi) = -C_1 + \pi = 0. \end{cases}$
Отсюда $C_1 = \pi$, C_2 — произвольная константа.
Ответ: $y = \pi \cos x + C \sin x + 2x - \pi$, $C \in \mathbb{R}$.

Мы видим, что краевая задача может иметь единственное решение, бесконечно много решений или ни одного решения.
Рассмотрим однородную краевую задачу (с однородным ОДУ и однородными КУ)
$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \qquad a < x < b, \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$
и неоднородную краевую задачу (с неоднородным ОДУ и однородными КУ[1])
$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \qquad a < x < b, \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0. \end{cases} \tag{2}$$
Заметим, что задача (1) всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$.
Т. Если однородная задача (1)
а) имеет только тривиальное решение, то неоднородная задача (2) однозначно разрешима;
б) имеет нетривиальное решение $y_0(x) \not\equiv 0$, то неоднородная задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда $f \perp y_0$ на $[a;\ b]$. В этом случае решение не единственно.

В случае а) единственное решение неоднородной задачи (2) можно записать в виде:
$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\, ds, \tag{3}$$
где $G(x,s)$ — *функция Грина*, определённая в квадрате $\{(x,s)\colon a \le x \le b, a \le s \le b\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:
1) $G(x,s)$ удовлетворяет однородному ОДУ по переменной x (при $x \ne s$),
2) $G(x,s)$ удовлетворяет однородным КУ по переменной x,
3) $G(x,s)$ непрерывна при $x = s$,
4) $G_x(x,s)$ имеет скачок при $x = s$:
$$G_x(x,s)\big|_{x=s+0} - G_x(x,s)\big|_{x=s-0} = \frac{1}{a\ (s)}.$$



[1] Неоднородные КУ
$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$
всегда можно свести к однородным КУ
$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0$
с помощью замены $y(x) = w(x) + z(x)$, где $w(x)$ — некоторая известная функция, удовлетворяющая неоднородным КУ (например, функция вида $w(x) = c_1 x + c_2$, где коэффициенты c_1 и c_2 подбираются так, чтобы $w(x)$ удовлетворяла неоднородным КУ). Тогда для новой функции $z(x) = y(x) - w(x)$ получится краевая задача с однородными КУ.

Замечание: в случае б) функция Грина не существует.

Пример 4 (Филиппов № 769). Решить краевую задачу: $\begin{cases} x^2y'' + 2xy' = f(x), \ 1 < x < 3, \\ y(1) = 0, \ y'(3) = 0. \end{cases}$

Требуется найти функцию $y(x)$ на отрезке $1 \le x \le 3$. Поскольку надо решить задачу для произвольной функции $f(x)$, выпишем её решение в виде интеграла (3). Для этого нужно построить функцию Грина $G(x,s)$. Поскольку по переменной x она должна удовлетворять однородному ОДУ

$x^2y'' + 2xy' = 0,$

найдём его ОР. В левой части стоит полная производная:

$(x^2y')' = 0.$

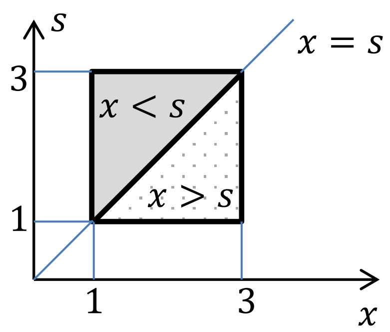
Тогда

$x^2y' = C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$

$y' = \dfrac{C_1}{x^2},$

$y(x) = -\dfrac{C_1}{x} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$

Функция Грина $G(x,s)$ должна быть определена в квадрате $\{(x,s): 1 \le x \le 3, 1 \le s \le 3\}$. Поскольку функция $G(x,s)$ удовлетворяет по переменной x однородному ОДУ (при $x < s$ и при $x > s$) и однородным КУ при $x = 1$ и при $x = 3$, то её можно представить в виде:



$$G(x,s) = \begin{cases} y_1(x), & 1 \le x < s \le 3, \\ y_2(x), & 1 \le s < x \le 3, \end{cases}$$

где $y_1(x)$ — решение однородного ОДУ, удовлетворяющее левому КУ: $y_1(1) = 0$, а $y_2(x)$ — решение однородного ОДУ, удовлетворяющее правому КУ: $y_2'(3) = 0$. Таким образом,

$$y_1(x) = -\frac{C_1}{x} + C_2, \qquad y_1(1) = -C_1 + C_2 = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = C_1.$$

Тогда $y_1(x) = C_1\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

$$y_2(x) = -\frac{C_3}{x} + C_4, \qquad y_2'(3) = \left.\frac{C_3}{x^2}\right|_{x=3} = \frac{C_3}{9} = 0 \ \Rightarrow \ C_3 = 0.$$

Тогда $y_2(x) = C_4$.

Коэффициенты C_1 и C_4 могут зависеть от s и находятся из условия непрерывности функции Грина и скачка её производной при $x = s$:

$$\begin{cases} y_1(x)|_{x=s} = y_2(x)|_{x=s}\,, \\ \left.\dfrac{dy_2}{dx}\right|_{x=s} - \left.\dfrac{dy_1}{dx}\right|_{x=s} = \dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \dfrac{1}{s}\right) = C_4, \\ -\dfrac{C_1}{s^2} = \dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_4 = \frac{1}{s} - 1$. Имеем

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-1, & 1\le x\le s\le 3,\\ \dfrac{1}{s}-1, & 1\le s\le x\le 3.\end{cases}$$

Тогда решение краевой задачи:

$$y(x)=\int\limits_1^3 G(x,s)f(s)\,ds=\int\limits_1^x\left(\frac{1}{s}-1\right)f(s)\,ds+\int\limits_x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)f(s)\,ds.$$

Ответ: $y(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{s}-1\right)f(s)\,ds+\int_x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)f(s)\,ds.$

Задача Штурма—Лиувилля

Рассмотрим однородную краевую задачу:

$$\begin{cases}a\ \ (x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y+\lambda\rho(x)y=0, & a<x<b,\\ \alpha_1y'(a)+\beta_1y'(a)=0, \quad \alpha_2y'(b)+\beta_2y(b)=0.\end{cases}$$

Задача Штурма—Лиувилля: найти все вещественные значения параметра λ (СЗ), при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи $y(x)$ (СФ).

Пример 5 . Найти СЗ и СФ задачи Ш.—Л.:

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0,\ 2<x<4,\\ y(2)=0,\ y(4)=0.\end{cases}$$

Рассмотрим ОДУ $y''+\lambda y=0$. В зависимости от знака λ оно имеет различные вещественные решения.

1) Пусть $\lambda>0$. Тогда $\lambda=\omega^2$, где $\omega=\sqrt{\lambda}$. Запишем ОДУ в виде:
   $y''+\omega^2y=0.$
   Его ОР:
   $y(x)=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$
   Подставляем его в КУ:
   $$\begin{cases}y(2)=C_1\cos 2\omega+C_2\sin 2\omega=0,\\ y(4)=C_1\cos 4\omega+C_2\sin 4\omega=0.\end{cases}$$
   Для того чтобы существовало нетривиальное решение $y(x)\not\equiv 0$, эта ОСЛАУ должна иметь нетривиальное решение C_1, C_2. Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда
   $$\begin{vmatrix}\cos 2\omega & \sin 2\omega\\ \cos 4\omega & \sin 4\omega\end{vmatrix}=0.$$
   Отсюда получаем:
   $\cos 2\omega\sin 4\omega-\sin 2\omega\cos 4\omega=0,$
   $\sin(4\omega-2\omega)=0,$
   $\sin 2\omega=0.$
   Это уравнение имеет следующие решения (с учётом того, что $\omega=\sqrt{\lambda}>0$):
   $2\omega_n=\pi n,\qquad n=1,2,\ldots,$
   откуда
   $$\omega_n=\frac{\pi n}{2}.$$
   Тогда
   $$\lambda_n=\omega_n^2=\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \text{ — СЗ.}$$

Теперь найдём C_1, C_2 при $\omega = \omega_n$:
$\begin{cases} C_1 \cos \pi n + C_2 \sin \pi n = 0, \\ C_1 \cos 2\pi n + C_2 \sin 2\pi n = 0. \end{cases}$
$\begin{cases} (-1)^n C_1 = 0, \\ C_1 = 0. \end{cases}$
Отсюда $C_1 = 0$, C_2 — произвольная константа. Соответствующие СФ:
$$y_n(x) = C_2 \sin \omega_n x = C_2 \sin \frac{\pi n x}{2}, \qquad C_2 \neq 0.$$

2) Рассмотрим случай $\lambda < 0$. Тогда $\lambda = -\omega^2$, где $\omega = \sqrt{-\lambda}$. Запишем ДУ в виде:
$y'' - \omega^2 y = 0.$
Его ОР:
$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$
Подставляем в КУ:
$\begin{cases} y(2) = C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0, \\ y(4) = C_1 e^{4\omega} + C_2 e^{-4\omega} = 0. \end{cases}$
Эта ОСЛАУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда
$\begin{vmatrix} e^{2\omega} & e^{-2\omega} \\ e^{4\omega} & e^{-4\omega} \end{vmatrix} = 0.$
Отсюда получаем:
$e^{-2\omega} - e^{2\omega} = 0,$
$e^{2\omega} = e^{-2\omega},$
$2\omega = -2\omega,$
$\omega = 0.$
Это противоречит нашему предположению, что $\lambda = -\omega^2 < 0$. Значит, отрицательных СЗ нет.

3) Осталось рассмотреть $\lambda = 0$. В этом случае ДУ имеет вид: $y'' = 0$. Его ОР:
$y(x) = C_1 + C_2 x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$
Из КУ:
$\begin{cases} y(2) = C_1 + 2C_2 = 0, \\ y(4) = C_1 + 4C_2 = 0. \end{cases}$
Вычтя из одного уравнения другое, получим $C_2 = 0$. Подставив это в любое из двух уравнений системы, получим $C_1 = 0$. Таким образом, эта система имеет только тривиальное решение, поэтому $\lambda = 0$ — не СЗ.

Ответ: $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2$, $y_n(x) = C \sin \frac{\pi n x}{2}$, $C \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Замечание 1. Случаи $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ можно объединить, записав решение в комплексном виде. В самом деле, ОР ОДУ $y'' + \lambda y = 0$ при $\lambda \neq 0$ можно записать в виде:
$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},$
где $\omega = \sqrt{-\lambda}$ — главное значение квадратного корня (число ω — вещественное положительное, если $\lambda < 0$, и ω — чисто мнимое, $\operatorname{Im} \omega > 0$, если $\lambda > 0$). Подставив функцию $y(x)$ в КУ, получим:
$\begin{cases} y(2) = C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} = 0, \\ y(4) = C_1 e^{4\omega} + C_2 e^{-4\omega} = 0. \end{cases}$
Эта ОСЛАУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда
$\begin{vmatrix} e^{2\omega} & e^{-2\omega} \\ e^{4\omega} & e^{-4\omega} \end{vmatrix} = 0.$
Отсюда получаем:

$e^{-2\omega} - e^{2\omega} = 0,$
$e^{2\omega} = e^{-2\omega},$
$e^{4\omega} = 1.$
Значит (с учётом того, что $\omega = \sqrt{-\lambda}$ — главное значение квадратного корня),
$4\omega_n = 2\pi n i, \qquad n = 1, 2, \ldots,$
откуда получаем
$$\omega_n = \frac{i\pi n}{2}.$$
Тогда $\lambda_n = -\omega_n^2 = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2$ — СЗ. Подставив найденные ω_n в ОСЛАУ, получим:
$$\begin{cases} C_1 e^{i\pi n} + C_2 e^{-i\pi n} = 0, \\ C_1 e^{2i\pi n} + C_2 e^{-2i\pi n} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 e^{2i\pi n} + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0. \end{cases}$$
Отсюда $C_2 = -C_1$, C_1 — произвольное. Тогда СФ:
$$y_n(x) = C_1 \left(e^{i\frac{\pi n x}{2}} - e^{-i\frac{\pi n x}{2}} \right) = C \sin \frac{\pi n x}{2},$$
где $C = 2iC_1 \neq 0$.
Замечание 2. В рассмотренном примере задача Ш.—Л. не имеет отрицательных СЗ. Можно показать, что любая задача Ш.—Л. вида
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad a < x < b, \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \end{cases}$$
где $p > 0$, $\rho > 0$, $q \geq 0$, $\alpha_1\beta_1 \leq 0$, $\alpha_2\beta_2 \geq 0$, $p \in C^{(1)}[a;\, b]$, $q, \rho \in C[a;\, b]$, **не имеет отрицательных СЗ.**

Пример 6. Найти СЗ и СФ задачи Ш.—Л.: $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < l, \\ y(0) = 0, \ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$
В силу сделанного выше замечания отрицательных СЗ нет.
1) При $\lambda = 0$ ОР ОДУ $y'' + \lambda y = 0$ имеет вид:
   $y(x) = C_1 + C_2 x.$
   Из КУ получаем систему уравнений
   $$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y(l) + y'(l) = C_1 + C_2 l + C_2 = 0, \end{cases}$$
   которая имеет только тривиальное решение (поскольку $l > 0$).
2) При $\lambda > 0$ ОР ОДУ $y'' + \lambda y = 0$ имеет вид:
   $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x,$
   где $\omega = \sqrt{\lambda}$.
   Из КУ получаем систему уравнений:
   $$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0, \\ y(l) + y'(l) = C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega l - \\ -C_1 \omega \sin \omega l + C_2 \omega \cos \omega l = 0. \end{cases}$$
   В силу $C_1 = 0$ имеем:
   $C_2(\sin \omega l + \omega \cos \omega l) = 0.$
   Нетривиальные решения будут тогда и только тогда, когда
   $\sin \omega l + \omega \cos \omega l = 0,$

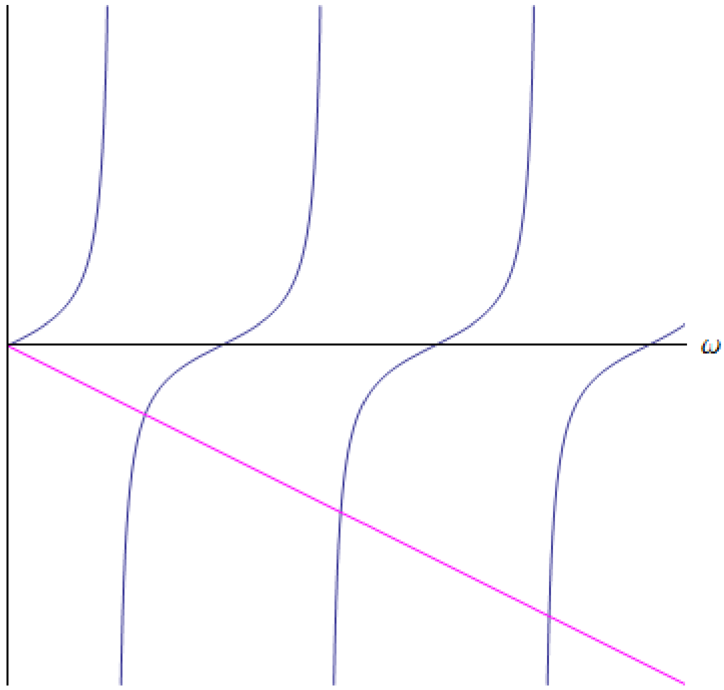
т. е.

$\operatorname{tg}\omega l = -\omega.$

Это трансцендентное уравнение имеет бесконечно много положительных корней ω_n, $n = 1, 2, \dots$ (см. рис.). Им соответствуют СЗ $\lambda_n = \omega_n^2$ и СФ

$y_n(x) = C_2 \sin \omega_n x\,, \qquad C_2 \neq 0$

Ответ: $\lambda_n = \omega_n^2$, где $\omega_n > 0$ — корни уравнения $\operatorname{tg}\omega l = -\omega$, $n = 1, 2, \dots$;
$y_n(x) = C \sin \omega_n x$, $C \neq 0$.



Сведение задачи Ш.—Л. к интегральному уравнению

Рассмотрим задачу Ш.—Л.:

$$\begin{cases} (x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, & < x < b, \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = 0, & \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0. \end{cases}$$

Обозначим $f(x) = -\lambda\rho(x)y$. Тогда краевая задача принимает вид:

$$\begin{cases} (x)y'' + \ {}_1(x)y' + \ {}_2(x)y = f(x), & < x < b, \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y'(a) = 0, & \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0. \end{cases}$$

Если при $f(x) \equiv 0$, т. е. при $\lambda = 0$, нет нетривиальных решений $y(x)$ (это значит, что $\lambda = 0$ не является СЗ задачи Ш.—Л.), то существует функция Грина $G(x,s)$, и тогда

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)\,ds = -\lambda \int_a^b G(x,s)\rho(s)y(s)\,ds.$$

Таким образом, функция $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (ИУ):

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x,s)\rho(s)y(s)\,ds.$$

Требуется определить все λ, при которых существуют нетривиальные решения ИУ. Это задача на ХЧ и СФ для ИУ Фредгольма 2-го рода.