Линейные операторы

О. *Линейным оператором* $\hat{A}$, действующим в ЛП L над полем $\mathbb{K}$, называется правило, по которому каждому элементу $x \in L$ ставится в соответствие некоторый элемент $\hat{A}x \in L$, причём

1) $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ выполняется $\hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x$;
2) $\forall x, y \in L$ выполняется $\hat{A}(x+y) = \hat{A}x + \hat{A}y$.

О. *Матрицей линейного оператора* $\hat{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица $A_e = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, составленная из столбцов координат $\left(\hat{A}e_1\right)_e, \left(\hat{A}e_2\right)_e, \ldots, \left(\hat{A}e_n\right)_e$:

$$A_e = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \left(\hat{A}e_1\right)_e \left(\hat{A}e_2\right)_e \ldots \left(\hat{A}e_n\right)_e \end{array}$$

Т. Если A_e — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе e, то $\forall x \in L$ выполняется

$$\boxed{\left(\hat{A}x\right)_e = A_e x_e}$$

(столбец координат элемента $\hat{A}x$ в базисе e равен произведению матрицы оператора $\hat{A}$ в базисе e на столбец координат элемента x в базисе e).

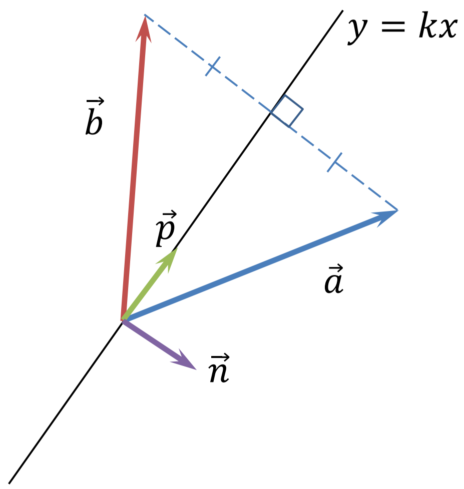
Таким образом, действие оператора однозначно задаётся с помощью его матрицы.

Т. (закон преобразования матрицы ЛОп). Если C — матрица перехода от базиса e к базису f $(f = eC)$ и $\hat{A}$ — ЛОп, то

$$\boxed{A_f = C^{-1} A_e C.}$$

Пример 1. Оператор $\hat{A}$ переводит произвольный вектор $\vec{a} \in B_2$ в вектор $\vec{b} \in B_2$, симметричный вектору $\vec{a}$ относительно прямой $y = kx$. Доказать, что $\hat{A}$ — ЛОп. Найти матрицу ЛОп $\hat{A}$ в ОНБ $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

Докажем линейность оператора $\hat{A}$. Для этого выберем удобный базис. Введём в пространстве B_2 ОНБ, состоящий из вектора $\vec{p}$ — единичного направляющего вектора прямой $y = kx$, и вектора $\vec{n}$ — единичного вектора нормали к этой прямой.

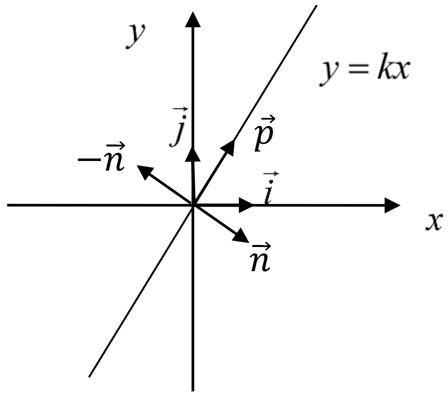


Произвольный вектор $\vec{a}$ можно разложить по базису $\{\vec{p}, \vec{n}\}$:

$\vec{a} = a_p \vec{p} + a_n \vec{n}$.

При симметричном отражении вектора $\vec{a}$ относительно прямой $y = kx$ нормальная составляющая вектора меняет знак, а касательная — не изменяется:

$\vec{b} = \hat{A}\vec{a} = a_p \vec{p} - a_n \vec{n}$.



Тогда имеем:

1) $\hat{A}(\lambda\vec{a}) = \hat{A}\big(\lambda a_p\vec{p} + \lambda a_n\vec{n}\big) = \lambda a_p\vec{p} - \lambda a_n\vec{n} =$
$= \lambda\big(a_p\vec{p} - a_n\vec{n}\big) = \lambda\hat{A}\vec{a};$

2) $\hat{A}(\vec{a} + \vec{c}) = \hat{A}\Big(\big(a_p + c_p\big)\vec{p} + (a_n + c_n)\vec{n}\Big) =$
$= \big(a_p + c_p\big)\vec{p} - (a_n + c_n)\vec{n} =$
$= \big(a_p\vec{p} - a_n\vec{n}\big) + \big(c_p\vec{p} - c_n\vec{n}\big) = \hat{A}\vec{a} + \hat{A}\vec{c}.$

Что и доказывает линейность оператора $\hat{A}$.

Теперь найдём матрицу оператора $\hat{A}$. Проще её построить сначала в базисе $\{\vec{p},\vec{n}\}$, а затем перейти к базису $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

Подействовав оператором $\hat{A}$ на базисные векторы $\vec{p},\vec{n}$, получим:

$\hat{A}\vec{p} = \vec{p}, \qquad \hat{A}\vec{n} = -\vec{n}.$

Значит, матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{p},\vec{n}\}$ имеет вид:

$A_{pn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Теперь найдём матрицу перехода от базиса $\{\vec{i},\vec{j}\}$ к базису $\{\vec{p},\vec{n}\}$. Для этого получим координаты векторов $\vec{p},\vec{n}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

Одним из направляющих векторов прямой $y = kx$ является вектор $\vec{i} + k\vec{j}$. Одним из векторов нормали является вектор $k\vec{i} - \vec{j}$. Отнормировав эти векторы, получим $\vec{p}$ и $\vec{n}$:

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\vec{i} + \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\vec{j}, \qquad \vec{n} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\vec{j}.$$

Тогда матрица перехода от ОНБ $\{\vec{i},\vec{j}\}$ к ОНБ $\{\vec{p},\vec{n}\}$ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} & \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} & -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}.$$

Это ортогональная матрица (как матрица перехода от ОНБ к ОНБ), поэтому

$$C^{-1} = C^T = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом $A_{pn} = C^{-1}A_{ij}C$, где A_{ij} — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$, поэтому

$$A_{ij} = CA_{pn}C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}.$$

Это матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$. Её можно было бы найти и по-другому, вычислив векторы $\hat{A}\vec{i}$, $\hat{A}\vec{j}$ и разложив их по базису $\{\vec{i},\vec{j}\}$.

Ответ: $A_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{k^2+1} & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}.$

Пример 2 (задача к экзамену № 12). В ЕП E есть ОНБ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Даны столбцы координат элементов x_1, x_2:

$$(x_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (x_2)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора ортогонального проектирования $\hat{P}$ на подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе e.

Оператор $\hat{P}$ переводит каждый вектор $x \in E$ в его проекцию на подпространство $L(x_1, x_2)$.

Чтобы найти проекцию произвольного вектора $x \in E$ на $L(x_1, x_2)$, построим ОНБ в $L(x_1, x_2)$. Согласно результату примера 2 из семинара 16, это будет $\{g_1, g_2\}$, где

$$g_1 = \frac{e_1 + e_4}{\sqrt{2}}, \qquad g_2 = \frac{e_1 + 2e_2 - e_4}{\sqrt{6}}.$$

Тогда проекция произвольного вектора $x \in E$ на $L(x_1, x_2)$ даётся формулой

$\hat{P}x = (x, g_1)g_1 + (x, g_2)g_2$.

Найдём проекции базисных векторов e_1, e_2, e_3, e_4 на $L(x_1, x_2)$:

$$\hat{P}e_1 = (e_1, g_1)g_1 + (e_1, g_2)g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e_1 + e_4}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e_1 + 2e_2 - e_4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_4,$$

$$\hat{P}e_2 = (e_2, g_1)g_1 + (e_2, g_2)g_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e_1 + 2e_2 - e_4}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_4,$$

$$\hat{P}e_3 = (e_3, g_1)g_1 + (e_3, g_2)g_2 = \theta,$$

$$\hat{P}e_4 = (e_4, g_1)g_1 + (e_4, g_2)g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{e_1 + e_4}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{e_1 + 2e_2 - e_4}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_4.$$

Значит, матрица оператора $\hat{P}$ в базисе e имеет вид:

$$P_e = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $P_e = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$

О. *Ядром* $\ker \hat{A}$ ЛОп $\hat{A}$ называется множество всех элементов $x \in L$, для которых $\hat{A}x = \theta$.

О. *Образом* $\operatorname{im} \hat{A}$ ЛОп $\hat{A}$ называется множество всех элементов вида $y = \hat{A}x$, где x — произвольный элемент пространства L.

Т. $\ker \hat{A}$ и $\operatorname{im} \hat{A}$ — ЛПП пространства L, $\dim(\ker \hat{A}) + \dim(\operatorname{im} \hat{A}) = \dim L$.

Пример 3. Найти базис и размерность $\ker\hat{A}$ и $\operatorname{im}\hat{A}$, если в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрица оператора $\hat{A}$ имеет вид $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. $x \in \ker\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A}x = \theta$. Пусть $x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Тогда $\left(\hat{A}x\right)_e = A_e x_e = \theta_e$, т.е.
   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Получилась ОСЛАУ. Преобразуем её матрицу к упрощённому виду:
   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Базисные переменные: x_1, x_2. Свободная переменная: x_3. Эквивалентная ОСЛАУ:
   $\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$
   её ОР:
   $$x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ -C \\ C \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   ФСР ОСЛАУ состоит из одного столбца. Следовательно, $\dim\left(\ker\hat{A}\right) = 1$, базис $\ker\hat{A}$ состоит из одного элемента: $-e_1 - e_2 + e_3$.
2. $\operatorname{im}\hat{A}$ состоит из всех элементов вида $y = \hat{A}x$, где x — произвольный элемент ЛП L. Тогда
   $$y_e = A_e x_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$
   т.е. y_e является ЛК столбцов матрицы A_e, а все возможные y_e образуют линейную оболочку столбцов матрицы A_e. Но у матрицы A_e, как мы выяснили в п. 1, базисные столбцы — первый и второй. Значит, базис $\operatorname{im}\hat{A}$ образуют элементы $\{y_1, y_2\}$, где $(y_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(y_2)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда $\dim\left(\operatorname{im}\hat{A}\right) = 2$.

Проверим: $\dim\left(\ker\hat{A}\right) + \dim\left(\operatorname{im}\hat{A}\right) = 1 + 2 = 3 = \dim L$ — всё верно.
Ответ: $\dim\left(\ker\hat{A}\right) = 1$, базис $\ker\hat{A}$: $\{-e_1 - e_2 + e_3\}$;
$\dim\left(\operatorname{im}\hat{A}\right) = 2$, базис $\operatorname{im}\hat{A}$: $\{e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 3e_2 + 2e_3\}$.

Арифметические действия с операторами

О. *Суммой (разностью)* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в ЛП L, называется оператор $\hat{C}$, действующий в ЛП L по правилу
$\hat{C}x = \hat{A}x + \hat{B}x. \quad \left(\hat{C}x = \hat{A}x - \hat{B}x.\right)$

О. *Произведением* линейного оператора $\hat{A}$, действующего в ЛП L над полем $\mathbb{K}$, на число $\alpha \in \mathbb{K}$, называется оператор $\hat{C}$, действующий в ЛП L по правилу
$\hat{C}x = \alpha\hat{A}x$.

О. *Произведением* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в ЛП L, называется оператор $\hat{C}$, действующий в ЛП L по правилу
$\hat{C}x = \hat{A}(\hat{B}x)$.

О. *Единичным (тождественным)* оператором, действующим в ЛП L, называется оператор $\hat{I}$, действующий по правилу
$\hat{I}x = x$.

О. *Нулевым* оператором, действующим в ЛП L, называется оператор $\hat{0}$, действующий по правилу
$\hat{0}x = x$.

О. Оператором, обратным к линейному оператору $\hat{A}$, действующему к ЛП L, называется оператор $\hat{A}^{-1}$, действующий в ЛП L, такой что
$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}, \qquad \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$.
Не всякий ЛОп имеет обратный оператор.

О. *Коммутатором* линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в ЛП L, называется оператор
$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.
Если $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \hat{0}$, то операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *коммутирующими*. Коммутирующие операторы можно переставлять:
$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.

Т. Сумма, разность, произведение, коммутатор ЛОп, оператор, обратный к ЛОп, произведение ЛОп на число, единичный и нулевой операторы являются ЛОп, причём для любых ЛОп, действующих в ЛП L над полем $\mathbb{K}$, и для любого $\alpha \in \mathbb{K}$ выполняется

1°) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$,
2°) $\hat{A}(\alpha\hat{B}) = (\alpha\hat{A})\hat{B} = \alpha(\hat{A}\hat{B})$,
3°) $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$,
4°) $(\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}$.

Т. Арифметическим действиям над ЛОп соответствуют одноимённые арифметические действия над матрицами этих ЛОп в фиксированном базисе e.

Т. Все ЛОп, действующие в ЛП L размерности n над полем $\mathbb{K}$, тоже образуют ЛП над полем $\mathbb{K}$, причём размерность этого ЛП равна n^2.

ДЗ 17. ЛАВЗ гл. V № 1–4, 6, 7, 9, 14.
(*) Найти базис и размерность $\ker\hat{A}$ и $\operatorname{im}\hat{A}$, если в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрица оператора $\hat{A}$ имеет вид $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: гл. V § 2, 3.

Решение некоторых задач из ДЗ

ЛАВЗ гл. V №3. Оператор $\hat{A}$ действует в ЛП трёхмерных геометрических векторов V_3 по правилу $\hat{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, где $\vec{a}$ — фиксированный вектор. Доказать, что $\hat{A}$ — ЛОп, и найти его матрицу в правом ОНБ $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, если $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$.
Докажем линейность оператора $\hat{A}$:

1) $\forall \vec{x} \in V_3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $\hat{A}(\lambda\vec{x}) = [\lambda\vec{x}, \vec{a}] = \lambda[\vec{x}, \vec{a}] = \lambda\hat{A}\vec{x}$;
2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_3$ выполняется $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}] = [\vec{x}, \vec{a}] + [\vec{y}, \vec{a}] = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$, ч.т.д.

Найдём матрицу ЛОп $\hat{A}$:

$$\hat{A}\vec{\imath} = [\vec{\imath}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{\imath} - a_3\vec{\jmath} + a_2\vec{k},$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = [\vec{\jmath}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath} - a_1\vec{k},$$

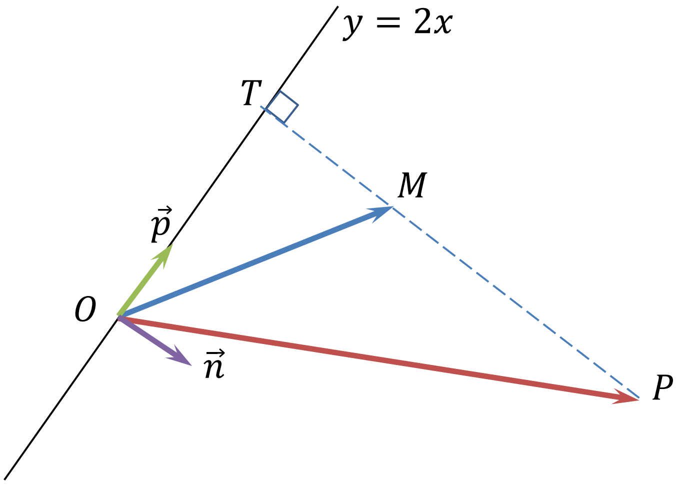
$$\hat{A}\vec{k} = \left[\vec{k}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a_2\vec{\imath} + a_1\vec{\jmath} + 0 \cdot \vec{k},$$

поэтому

$$A_{ijk} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A_{ijk} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$

ЛАВЗ гл. V №6. Оператор $\hat{A}$ переводит произвольный радиус-вектор $\overrightarrow{OM} \in B_2$ в вектор $\overrightarrow{OP} \in B_2$, где точка P находится по следующему правилу: через точку M проводится прямая, перпендикулярная к прямой $y = 2x$; если точка T пересечения прямых не совпадает с точкой M, то точка P берётся на луче TM так, что $TP = 3TM$; если же точки T и M совпадают, то в качестве точки P берётся точка M. Доказать, что $\hat{A}$ — ЛОп. Найти матрицу ЛОп $\hat{A}$ в ОНБ $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.
Докажем линейность оператора $\hat{A}$. Для этого выберем удобный базис. Введём в пространстве B_2 ОНБ, состоящий из вектора $\vec{p}$ — единичного направляющего вектора прямой $y = 2x$, и вектора $\vec{n}$ — единичного вектора нормали к этой прямой.



Произвольный вектор $\overrightarrow{OM}$ можно разложить по базису $\{\vec{p}, \vec{n}\}$:
$\overrightarrow{OM} = m_p\vec{p} + m_n\vec{n}$.
Под действием оператора $\hat{A}$ на вектор $\overrightarrow{OM}$ нормальная составляющая вектора увеличивается в три раза, а касательная — не изменяется:
$\overrightarrow{OP} = \hat{A}\left(\overrightarrow{OM}\right) = m_p\vec{p} + 3m_n\vec{n}$.

Тогда имеем:

1) $\hat{A}\left(\lambda\overrightarrow{OM}\right) = \hat{A}\left(\lambda m_p\vec{p} + \lambda m_n\vec{n}\right) = \lambda m_p\vec{p} + 3\lambda m_n\vec{n} = \lambda\left(m_p\vec{p} + 3m_n\vec{n}\right) = \lambda\hat{A}\overrightarrow{OM}$;

2) $\hat{A}\left(\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2\right) = \hat{A}\left(\left(m_p^{(1)} + m_p^{(2)}\right)\vec{p} + \left(m_n^{(1)} + m_n^{(2)}\right)\vec{n}\right) = \left(m_p^{(1)} + m_p^{(2)}\right)\vec{p} + 3\left(m_n^{(1)} + m_n^{(2)}\right)\vec{n} = \left(m_p^{(1)}\vec{p} + 3m_n^{(1)}\vec{n}\right) + \left(m_p^{(2)}\vec{p} + 3m_n^{(2)}\vec{n}\right) = \hat{A}\overrightarrow{OM}_1 + \hat{A}\overrightarrow{OM}_2$.

Что и доказывает линейность оператора $\hat{A}$.
Теперь найдём матрицу оператора $\hat{A}$. Проще её построить сначала в базисе $\{\vec{p}, \vec{n}\}$, а затем перейти к базису $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.
Подействовав оператором $\hat{A}$ на базисные векторы $\vec{p}, \vec{n}$, получим:
$\hat{A}\vec{p} = \vec{p}, \qquad \hat{A}\vec{n} = 3\vec{n}$.
Значит, матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{p}, \vec{n}\}$ имеет вид:
$A_{pn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Теперь найдём матрицу перехода от базиса $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ к базису $\{\vec{p}, \vec{n}\}$. Для этого получим координаты векторов $\vec{p}, \vec{n}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.
Одним из направляющих векторов прямой $y = 2x$ является вектор $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Одним из векторов нормали является вектор $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Отнормировав эти векторы, получим $\vec{p}$ и $\vec{n}$:

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}, \qquad \vec{n} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}.$$

Тогда матрица перехода от ОНБ $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ к ОНБ $\{\vec{p}, \vec{n}\}$ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Это ортогональная матрица (как матрица перехода от ОНБ к ОНБ), поэтому

$$C^{-1} = C^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом $A_{pn} = C^{-1}A_{ij}C$, где A_{ij} — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, поэтому

$$A_{ij} = CA_{pn}C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}13 & -4\\ -4 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{13}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{7}{5}\end{pmatrix}.$$

Это матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Её можно было бы найти и по-другому, вычислив векторы $\hat{A}\vec{i}$, $\hat{A}\vec{j}$ и разложив их по базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Ответ: $A_{ij} = \begin{pmatrix}\frac{13}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{7}{5}\end{pmatrix}$.