Чеченский государственный университет

Кафедра дифференциальных уравнений ФМКТ

Нелинейные дифференциальные уравнения: конспект лекций

Д. В. Гринёв

Грозный, 2018

Содержание

1 Основные понятия

Рассмотрим автономное ОДУ 1-го порядка (то есть функция $f(y)$ не зависит явно от t):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = f(y)$$

Предположим, что задано некоторое начальное условие для $y(0) = y_0$, а решение ОДУ $y(t)$ является дифференцируемой функцией на замкнутом связном подмножестве $D \in \mathbb{R}$. Пусть y^* - корень уравнения $f(y) = 0$. Тогда $y(t) = y^*$ является решением исходного ОДУ. Такое решение (постоянное) называется *положением равновесия*. Положений равновесия может быть несколько, если уравнение $f(y) = 0$ имеет несколько корней. В задачах бывает важно знать, что происходит при малых отклонениях от положения равновесия, а именно будет ли система возвращаться в положение равновесия или нет. Таким образом нужно исследовать поведение решений задачи Коши при малом возмущении начальных условий. Имеется три варианта действий:

- Найти точное решение
- Использовать «качественные» или геометрические методы анализа уравнений
- Получить чсленное решение

Мы будем рассматривать второй вариант, который позволит изучать поведение решений задачи Коши. Рассмотрим простой пример, чтобы уяснить главные идеи этого курса.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sin(y),\ y(0) = y_0$$

Это уравнение в разделяющихся переменных с решением в виде:

$$t = -\ln|\csc y + \cot y| + C$$

где константа интегрирования C может быть получена из начального условия в виде:

$$C = \ln|y_0 \csc y_0 + \cot y_0|$$

Нахождение решения в явном виде $y = y(t)$ является нетривиальным, поэтому мы попробуем выяснить как ведет себя решение при $t \to \infty$ для произвольного начального условия. Для этого рассмотрим данное ОДУ как *векторное поле*. Мы определим множество векторов $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ в каждой точке $y = y(t)$. Полезно построить график функции $\sin(y)$ и сделать ряд наблюдений:

- При $\sin(y) > 0$ $y = y(t)$ возрастает и вектора $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ имеют положительное направление.
- При $\sin(y) < 0$ $y = y(t)$ убывает и вектора $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ имеют отрицательное направление.
- Точки для который $\sin(y) = 0$ являются точками равновесия (также их называют *фиксированными*). В данном примере точки равновесия имеют значения $y_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

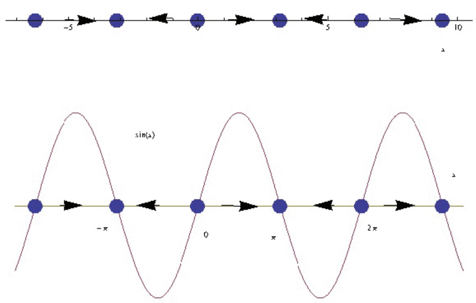

Рис. 1: Векторное поле $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ и график функции $\sin(y)$

Построим решения $y = y(t)$ для различных начальных условий. Отметим, что хотя

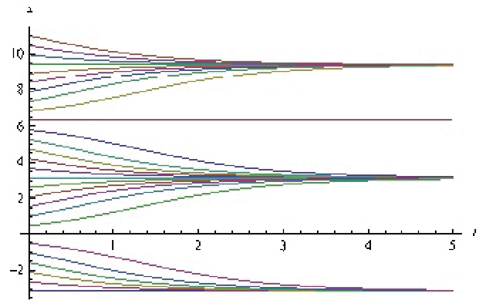

Рис. 2: График решения $y = y(t)$ для различных начальных условий

в самих точках равновесия значения $y = y(t)$ не изменяются, траектории решений могут вести себя по разному вблизи этих точек.

- Точки равновесия называются устойчивыми (или притягивающими) если близко проходящие решения стремятся к ним при $t \to \infty$.

- Точки равновесия называются неустойчивыми (или отталкивающими) если близко проходящие решения уходят от них при $t \to \infty$.

В разобранном примере неустойчивыми являются точки $y = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, а устойчивами будут точки $y = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ Нахождение точек равновесия и исследование их устойчивости является одной из главных тем этого курса, поэтому нам потребуются более точные определения:

- Точка равновесия $y(t) = y^*$ называется устойчивой (по Ляпунову) если $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall y(t)$ - решение уравнения, такого что $|y(0) - y^*| < \delta$ выполняется неравенство $|y(t) - y^*| < \epsilon\ \forall t \geq 0$. Это означает, что малым начальным отклонениям от положения равновесия отвечают малые отклонения от него в любой момент времени.

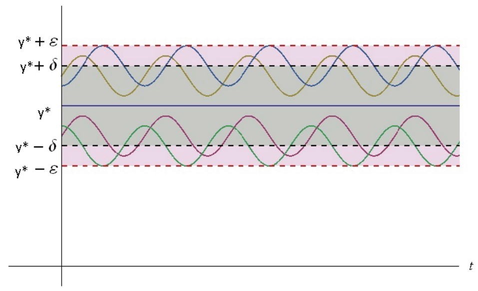

Рис. 3: Точка равновесия $y(t) = y^*$ устойчива по Ляпунову

- Точка равновесия $y(t) = y^*$ называется неустойчивой (по Ляпунову) если $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0\, \exists y(t)$ - решение уравнения, такое что $|y(0) - y^*| < \delta$, но $\exists t \geq 0 : |y(t) - y^*| \geq \epsilon$. Т. е. сколь угодно малым начальным отклонениям могут соответствовать не малые отклонения в последующие моменты времени.

Понятие асимптотически устойчивой точки равновесия будет введено в последующих главах.

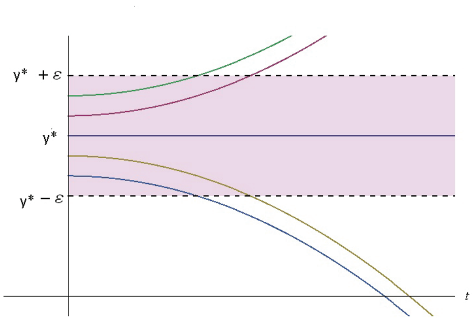

Рис. 4: Точка равновесия $y(t) = y^*$ неустойчива по Ляпунову

2 Исследование устойчивости в линейном приближении

Рассмотрим ОДУ вида $\dot{y} = f(y)$ у которого есть точка равновесия y^*: $f(y^*) = 0$. Попробуем выяснить можно ли определить тип данной точки равновесия при условии того, что нам задано лишь свойство дифференцируемости функции $f(y)$. Для этого рассмотрим случай малых отклонений от точки равновесия y^* представим решение ОДУ вблизи этой точки в виде:

$$y(t) = y^* + \eta(t)\,,\ \eta(t) << 1$$

где $\eta(t)$ является бесконечно малой функцией t, характеризующей отклонение от точки равновесия y^*. Подставляя это выражение в обе части ОДУ получим тогда, что:

$$\frac{\mathrm{d}(y^* + \eta(t))}{\mathrm{d}t} = f(y^* + \eta(t))$$

Продифференцировав в левой части и разложив правую часть в ряд Тэйлора, получим в линейном приближении уравнение в разделяющихся переменных для $\eta(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(y^*)\eta(t)$$

Решив это уравнение мы можем представить решение исходного ОДУ в виде:

$$y(t) = y^* + \exp\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(y^*)t\right\}$$

Легко убедиться, что имеется три случая:

- Точка равновесия будет устойчивой при $\frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}_y}(y^*) < 0$.
- Точка равновесия будет неустойчивой при $\frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}_y}(y^*) > 0$.
- При $\frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}_y}(y^*) = 0$ в использованном линейном приближении вопрос об устойчивости точки равновесия остается открытым. Для его исследования требуются следующие члены разложения ряда Тэйлора.

Пример. Найти положения равновесия ОДУ и исследовать их на устойчивость:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y - y$$

Из графика пересечения функций $\cos y$ и y очевидно, что имеется лишь одна точка равновесия y^*, являющаяся решением уравнения $\cos y = y$. Продифференцировав функцию $f(y) = \cos y - y$ легко убедиться, что $\frac{\mathrm{d}_f}{\mathrm{d}_y}(y^*) < 0$, причем $y^* \neq 0, \pi$, поэтому точка равновесия y^* будет устойчивой.
Теперь рассмотрим автономную систему ОДУ:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(x, y) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(x, y)$$

Каждое её решение $(y(t), x(t))$ задаёт в параметрическом виде некоторую кривую на *фазовой плоскости Oxy*. Если t — это время, то уравнения $y(t), x(t)$ описывают траекторию движения частицы на фазовой плоскости — *фазовую траекторию*. Тогда $(\dot{x}, \dot{y})$ — это вектор скорости движения частицы. Рассмотрим точку M_0 с координатами (x^*, y^*):

$$f(x^*, y^*) = 0 \qquad g(x^*, y^*) = 0$$

Очевидно, что точка M_0 является положением равновесия системы ОДУ, а решение $(x(t) = x^*, y(t) = y^*)$ есть постоянное решение системы. Если частица в начальный момент времени находится в точке равновесия, то она там и останется. Тогда фазовая траектория будет состоять из одной точки. Определения устойчивости точек равновесия системы ОДУ (по Ляпунову) формулируются следующим образом:

- Точка равновесия M_0 называется устойчивой (по Ляпунову) если $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$: любая фазовая траектория, лежащая в δ-окрестности M_0 в момент времени $t = 0$, остается в ϵ-окрестности $M_0 \, \forall t \geq 0$.

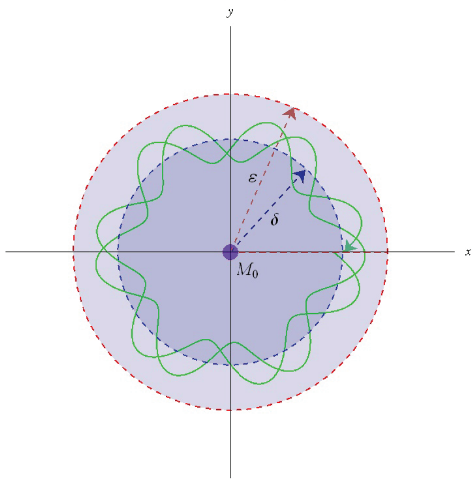

Рис. 5: Точка равновесия M_0 устойчива по Ляпунову

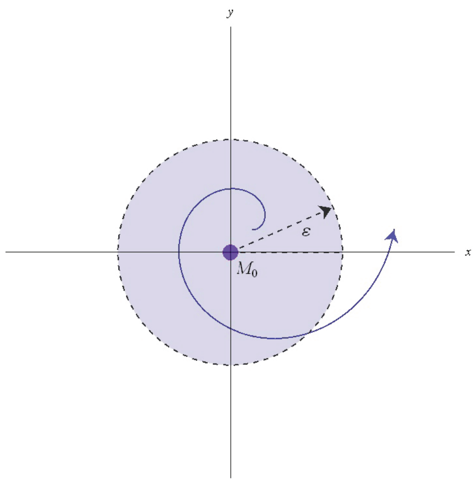

Рис. 6: Точка равновесия M_0 неустойчива по Ляпунову

- Точка равновесия M_0 называется неустойчивой (по Ляпунову) если $\forall \epsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ существует фазовая траектория, лежащая в δ-окрестности M_0 в момент времени $t = 0$, которая выходит за ϵ-окрестности M_0 $\forall t \geq 0$.

  Пусть точка $M_0(x^*, y^*)$ является положением равновесия системы ОДУ, а функции $f(x, y), g(x, y)$ дифференцируемы в этой точке. Тогда мы можем провести линеаризацию системы ОДУ в окрестности точки равновесия способом аналогичным ранее рассмтренному для уравнения с одной переменной. Представим решения системы ОДУ вблизи $M_0(x^*, y^*)$ в виде:

$$x(t) = x^* + \mu(t)\,,\ \mu(t) << 1, \qquad\qquad y(t) = y^* + \eta(t)\,,\ \eta(t) << 1$$

Разложим в ряд Тэйлора функции $f(x,y), g(x,y)$ и ограничимся линейными членами по μ и η:

$$f(x) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*)\mu + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*)\eta$$

$$g(x) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\mu + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\eta$$

Тогда систему ОДУ удобно переписать для вектора $\mathbf{\Psi}$, имеющего вид

$$\mathbf{\Psi}\,(t) = \begin{pmatrix} \mu\,(t) \\ \eta\,(t) \end{pmatrix}$$

в матричном виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{\Psi}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}$ являются значениями частных производных функций $f(x,y), g(x,y)$ в точке равновесия

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) & \frac{\partial g}{\partial x}(x^*) \end{pmatrix}$$

Точка равновесия $M_0(x^*, y^*)$ исходной системы соответствует точке равновесия $(0,0)$ линеаризованной системы. Пусть λ_1, λ_2 являются корнями характеристического уравнения линеаризованной системы

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right) = 0$$

Справедлива следующая **теорема (Ляпунова об устойчивости по первому приближению)**: Если $Re\lambda_1 < 0$, *и* $Re\lambda_2 < 0$, то точка равновесия $M_0(x^*, y^*)$ исходной системы устойчива. Если $Re\lambda_1 > 0$, *или* $Re\lambda_2 > 0$, то точка равновесия $M_0(x^*, y^*)$ исходной системы неустойчива.

Пример: Рассмотрите автономную систему ОДУ. Найдите её положения равновесия и исследуйте их на устойчивость:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \ln\left(-x + y^2\right) \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y - 1$$

Автономное ОДУ 2-го порядка вида

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = h\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

можно свести к автономной системе ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dot{y} = h\left(x, y\right) \\ \dot{x} = y \end{cases}$$

Для этой системы можно найти точки покоя и исследовать их на устойчивость.

Пример: Рассмотрите ОДУ 2-го порядка

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x = 0$$

Сведите его к автономной системе ОДУ первого порядка. Найдите точки покоя и исследуйте их на устойчивость. Найдите интеграл движения и нарисуйте фазовый портрет системы. Подробнее, классификацию точек равновесия и методы построения фазовых портретов мы рассмотрим при изучении теории устойчивости.

3 Теорема существования и единственности решения. Бифуркации

Для того, чтобы подчеркнуть важность этой темы, рассмотрим два примера.

Пример 1: Найти решение задачи Коши и для этого решения получить значение $y(2)$.

$$\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому легко получаем искомое общее решение

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -\frac{1}{y} = t - C \Rightarrow y(t) = \frac{1}{C-t}$$

Используя начальное условие, находим решение задачи Коши

$$y(0) = 1 = \frac{1}{C} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$$

Очевидно, что $y(2) = -1$. Но если присмотреться к полученному значению, то обнаружится противоречие. Производная любого ненулевого решения исходного уравнения $\dot{y} = y^2$ является положительной и следовательно его решение должно быть монотонно возрастающей функцией. Действительно, при $t = 0, y = 1$, а при $t = 0,5, y = 2$. Но при $t = 2, y = -1$! В чем же заключается разрешение этого противоречия? Легко убедиться, что решение данной задачи Коши **не существует** при $t = 2$. Данный пример наглядно иллюстрирует тот факт, что решение некой задачи Коши **не всегда существует**.

Пример 2: Найти решение задачи Коши и для этого решения получить значение $y(2)$.

$$\begin{cases} \dot{y} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому легко получаем искомое общее решение

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} = t - C \Rightarrow y(t) = \frac{(t-C)^2}{4}$$

Используя начальное условие, находим решение задачи Коши

$$y(0) = 1 = \frac{C^2}{4} \Rightarrow y(t) = \frac{t^2}{4}$$

Очевидно, что $y(2) = 1$. Но легко заметить, что функция $y(t) = 0$ также будет решением исходной задачи Коши. Таким образом получаем, что $y(2) = 0$. Более того, можно построить функцию вида

$$y(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t \le T \\ \frac{(t-T)^2}{4},\ t > T \end{cases}$$

которая также будет решением исходной задачи Коши. Данный пример наглядно иллюстрирует тот факт, что решение некой задачи Коши **не всегда единственное**.

Имеет место следующая **теорема (Пикара) о достаточном условии существования и единственности решения дифференциального уравнения:** Пусть $f(y,t)$ является однозначной и непрерывной функцией по y в интервале I

$$\mathrm{I}\colon t \in (t_0, t_0 + h),\ \ h > 0$$

и непрерывной функцией по t в интервале D

$$\mathrm{D}\colon y \in [y_0 - k, y_0 + k],\ \ k > 0$$

Также $f(y,t)$ удовлетворяет условию ограниченности

$$|f(y,t)| < M$$

и условию Липшица

$$|f(y,t) - f(\widetilde{y},t)| < K\,|y - \widetilde{y}|$$

$\forall K, M > 0\ \forall t \in \mathrm{I}, \forall y, \widetilde{y} \in \mathrm{D}$.

Тогда для $h < \frac{k}{M}$ уравнение $\dot{y} = f(y,t)$ имеет единственное решение в интервале $[t_0, t_0 + h]$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$. Её доказательство можно найти в рекомендованных учебниках. Рассмотрим применение этой теоремы к ранее разобранному примеру.

Пример 1: Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{y} = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Проверим условие ограниченности функции $f(y,t)$ на интервале $[1-k, 1+k]$:

$$|f(y,t)| \leq (1+k)^2$$

Таким образом, например, можем взять $M = 1 + (1+k)^2$, чтобы на интервале $[1 - k, 1 + k]$ выполнялось условие

$$|f(y,t)| < M$$

Для проверки условия Липшица рассмотрим

$$|f(y,t) - f(\widetilde{y},t)| = \left|y^2 - \widetilde{y}^2\right| = |y - \widetilde{y}|\,|y + \widetilde{y}| \leq 2(1+k)\,|y - \widetilde{y}|$$

Таким образом, например, можем взять $K = 1 + 2(1+k)$, чтобы на интервале $[1-k, 1+k]$ выполнялось условие

$$|f(y,t) - f(\widetilde{y},t)| < K\,|y - \widetilde{y}|$$

Тогда при выбранных значениях M, K теорема гарантирует существование единственного решения уравнения для $t \in [0,h]$ при $h < \frac{k}{M} = \frac{k}{(1+k)^2} \leq \frac{1}{4}$.

1 Бифуркации

Рассмотрим автономную динамическую систему первого порядка, зависящую от параметра $\mu \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = f(y, \mu)$$

Нам уже известно, что для любого фиксированного значения параметра μ траектории системы $y(t)$ будут стремиться либо к точкам равновесия, либо уходить на бесконечность. Однако такие особенности системы как число точек равновесия и их устойчивость могут меняться вместе со значением μ. Такие изменения называются *бифуркациями.*

Рассмотрим, в качестве примера, автономную динамическую систему первого порядка вида

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu + y^2$$

Построим векторные поля и найдем точки равновесия для разных значений μ.

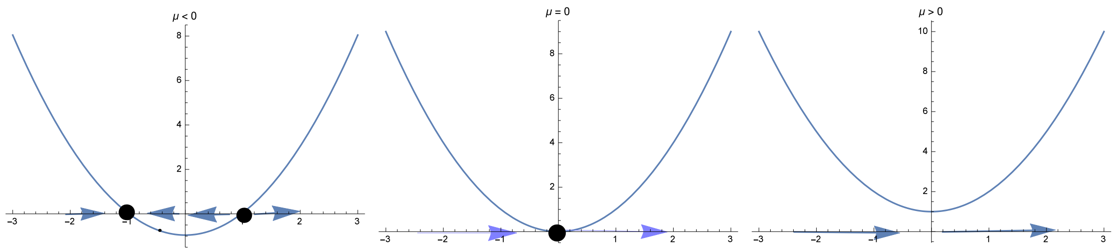

Рис. 7: векторные поля и точки равновесия для разных значений μ

Легко увидеть, что для $\mu < 0$ имеется две точки равновесия, одна из которых устойчивая, а другая - неустойчивая. Бифуркация происходит для $\mu = 0$ и две точки равновесия превращаются в одну. Для положительных значений μ эта точка равновесия исчезает. Очевидно, что динамическое поведение системы является качественно разным для $\mu < 0$ и для $\mu > 0$, поскольку в последнем случае отсутствуют точки равновесия. Для уяснения смысла происходящего с системой в точке бифуркации полезно построить т.н. *бифуркационную диаграмму*.

Рассмотрим функцию $f(y, \mu) = \mu + y^2$ и найдём нули этой функции, соответствуюшие точкам равновесия динамической системы:

$$f(y, \mu) = \mu + y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-\mu} \ (\mu \leq 0)$$

Для определения типа устойчивости этих точек определим знак производной $f(y, \mu)$ в точках равновесия

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = 2y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\sqrt{-\mu}) = 2\sqrt{-\mu} > 0$$
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = 2y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(-\sqrt{-\mu}) = -2\sqrt{-\mu} < 0$$

поэтому точка $y = \sqrt{-\mu}$ является неустойчивой, а точка $y = -\sqrt{-\mu}$ является устойчивой. Построим график функции $y(\mu)$, называющийся *бифуркационной диаграммой системы*. На таких диаграммах значения, соответствующие неустойчивым состояниям обозначаются пунктирной, а устойчивым - сплошной линией.

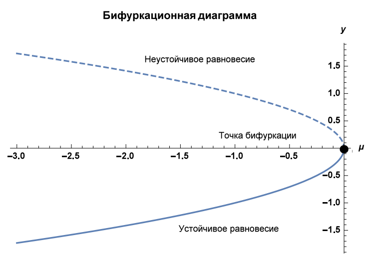

Рис. 8: Бифуркационная диаграмма $\dot{y} = \mu + y^2$ для разных значений параметра μ

Рассмотренный пример относится к т.н. *седлоузловым бифуркациям*, причём смысл этого термина станет яснее при изучении теории устойчивости.

Пример: Рассмотрим автономную динамическую систему первого порядка и построим её бифуркационную диаграмму

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mu - \cosh y$$

Рассмотрим нули функции $f(y,\mu)$ для разных значений параметра μ Очевидно, что

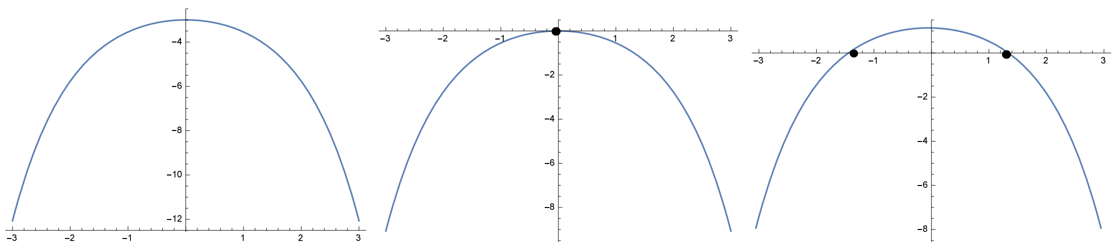

Рис. 9: точки равновесия для разных значений μ

левый график не имеет точек равновесия и соответствует $\mu < 0$, а сотальные два графика - положительным значениям параметра. Точка бифуркации соответствует значению параметра $\mu = 1$ (центральный график) поскольку $1 - \cosh 0 = 0$. Мы видим, что на правом графике есть неустойчивая и устойчивая точки равновесия. Убедитесь в этом, проведя аналитические выкладки. Удостоверьтесь, что бифуркационная диаграмма системы должна иметь вид:

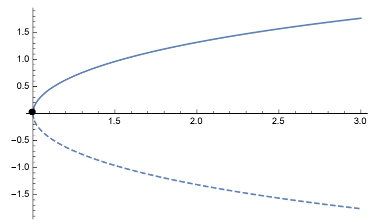

Рис. 10: Бифуркационная диаграмма $\dot{y} = \mu + \cosh y$ для разных значений параметра μ