Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

С. Д. Глызин, А. О. Толбей

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Прикладная математика и информатика и
Прикладная математика в экономике

Ярославль 2011

УДК 517.91
ББК В 161.61я73
Г 55

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года

Рецензенты:

Цыганков М. П., доктор физико-математических наук, профессор;

кафедра теории и методики обучения информатике Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Г 55 **Глызин, С. Д.** Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие / С. Д. Глызин, А. О. Толбей; Яросл. гос. ун-т, им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 68 с.

ISBN 978-5-8397-0816-7

В книге содержатся материалы для упражнений по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения», она включает в себя краткое изложение методов решения, проиллюстрированное подробным разбором, ряда задач, а также подборку заданий для контрольных работ по курсу.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 010200.65 Прикладная математика и информатика и 080801.65 Прикладная математика в экономике, дисциплина «Дифференциальные уравнения» (блок ЕН), очной формы обучения.

Рис. 10. Библиогр.: 11 назв.

УДК 517.91
ББК В 161.61я73

ISBN 978-5-8397-0816-7

Оглавление

Введение

Пособие для практических занятий по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» содержит подборку задач с решениями и кратким изложением необходимых теоретических сведений. Материал разделен на четыре главы.

В первой из них обсуждаются уравнения первого порядка. Подробно рассматриваются уравнения с разделяющимися переменными, линейные дифференциальные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, а также некоторые сводящиеся к ним. Глава завершается вариантами контрольной работы по уравнениям первого порядка.

Вторая глава посвящена линейным уравнениям старших порядков и системам обыкновенных дифференциальных уравнений. В первую очередь и достаточно подробно рассмотрены уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Для неоднородных уравнений и систем изложен метод неопределенных коэффициентов и метод вариации произвольных постоянных. Для линейных уравнений с непостоянными коэффициентами рассмотрены способы понижения порядка уравнения с помощью теоремы Остроградского–Лиувилля в случае, когда известно какое-либо нетривиальное решение. В главе также обсуждаются методы построения матричной экспоненты. В силу важности данной темы по линейным уравнениям и системам запланировано две контрольные работы, в конце второй главы содержится подборка соответствующих задач.

Задачи по теории устойчивости и некоторые связанные с ними вопросы рассмотрены в третьей главе. В частности, обсуждаются практические аспекты применения первого и второго методов Ляпунова, приведены примеры использования критериев устойчивости многочленов. В главе также содержится сводка правил построения и результатов решения задач по определению фазового портрета линейной системы с постоянными коэффициентами на плоскости. Как и предыдущие главы, данная глава завершается вариантами контрольной работы по этой теме.

В последней главе пособия собраны задачи на построение методом последовательных приближений и методом малого параметра приближенных решений начальной задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений. В третьей части главы обсуждаются способы и приводится пример решения краевых задач и построения функции Грина. Как обычно, глава завершается вариантами контрольной работы.

Наша книга не ставит целью дать свод задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям, для этого имеются ряд специализированных сборников задач [1–6], среди которых в первую очередь следует отметить книгу А. Ф. Филипова, пережившую большое количество переизданий (см., например, [1, 2]) и сборник коллектива авторов (М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко) [3]. Пособие в большей степени предназначено для того, чтобы проиллюстрировать ряд ключевых проблем, изучаемых в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, и способствовать лучшему пониманию и усвоению соответствующего материала.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Значительная часть практических занятий по обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) посвящена уравнениям первого порядка. Ниже будет рассматриваться начальная задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Здесь x — независимая переменная, $y(x)$ — искомая функция, $f(x, y)$ — непрерывная по совокупности переменных вместе с частной производной по y функция, $(x, y) \in \in D \subset \mathbb{R}^2$, D — замкнутое ограниченное множество, содержащее (x_0, y_0).
Решением задачи (1.1) *будем называть непрерывно дифференцируемую функцию* $y(x)$*, которая удовлетворяет начальному условию и на некотором интервале, содержащем* x_0*, обращает* (1.1) *в тождество.*

Иногда вместо уравнения (1.1) удобно рассматривать уравнение в форме дифференциалов

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{1.3}$$

где $M(x, y)$, $N(x, y)$ — гладкие функции своих аргументов и не выделены зависимая и независимая переменные.

Довольно часто не удается найти непосредственный вид решения уравнения (1.1) или (1.3), поскольку оно записывается в виде какой-либо неявной функции. Если, тем не менее, от производных и дифференциалов удалось избавиться, будем использовать понятие общего интеграла уравнений (1.1) или (1.3). *Дифференцируемая по совокупности переменных, не равная тождественно константе функция* $F(x, y)$ *называется общим интегралом* (1.1)*, если после подстановки в нее любого решения* $y(x)$ *уравнения* (1.1) *получается тождественная константа.*

Данное определение не конструктивно и не позволяет эффективно проверить, является ли некоторое полученное нами выражение интегралом. В связи с этим приведем следующее рассуждение.

Пусть $F(x, y)$ — общий интеграл, тогда по определению $F(x, y(x)) \equiv C$, где $y(x)$ — решение (1.1) или (1.3). Продифференцируем данное тождество по x, имеем $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} \equiv 0$. Поскольку $y(x)$ — решение (1.1), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f(x, y) \equiv 0. \tag{1.4}$$

Для уравнения (1.3) соотношение (1.4) трансформируется в $\dfrac{\partial F}{\partial x} N(x, y) - \dfrac{\partial F}{\partial y} M(x, y) \equiv \equiv 0$. Полученные равенства дают легко проверяемый признак того, что $F(x, y)$ является общим интегралом.

Уравнение (1.1) даже при условии, что функция $f(x, y)$ представляет собой суперпозицию элементарных функций, может оказаться не интегрируемым в квадратурах. В связи с этим особую ценность приобретают такие классы уравнений, для которых удается получить аналитическое решение или общий интеграл. В первой главе разобраны три таких класса ОДУ:

— уравнения с разделяющимися переменными,

— линейные дифференциальные уравнения,

— уравнения в полных дифференциалах,

а также приведены задачи для самостоятельного решения.

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

В этом разделе рассмотрим ОДУ первого порядка следующего специального вида:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y), \tag{1.5}$$

где $g(x)$ и $h(y)$ — достаточно гладкие функции, с начальным условием (1.2).

Для решения данной задачи в уравнении (1.5) обычно переходят к дифференциалам

$$dy = g(x)h(y)\,dx,$$

а затем разделяют переменные

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx, \quad h(y) \neq 0. \tag{1.6}$$

Отметим, что на этом шаге для дальнейших преобразований нужно предполагать, что $h(y) \neq 0$, а следовательно, необходимо рассмотреть и случай $h(y) = 0$, поскольку все корни этого алгебраического уравнения являются решениями (1.5). Обозначим независимую переменную в (1.6) x_1 и проинтегрируем по ней данное равенство от x_0 до x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy(x_1)}{h(y(x_1))} = \int_{x_0}^{x} g(x_1)\,dx_1. \tag{1.7}$$

Выполним теперь в левой части (1.7) замену $y(x_1) \to y_1$, тогда, учитывая, что $y(x_0) = y_0$ и $y(x) = y$, получаем

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy_1}{h(y_1)} = \int_{x_0}^{x} g(x_1)\,dx_1. \tag{1.8}$$

Выражение (1.8) представляет собой интеграл уравнения (1.5), удовлетворяющий начальному условию (1.2). Учитывая, что числа x_0, y_0 пока не фиксированы, выражение (1.8) совместно с корнями уравнения $h(y) = 0$ дает общий интеграл (1.5). Общее решение может быть получено, если интегралы в (1.8) вычисляются в классе элементарных функций, а затем удается выразить функцию $y(x)$ из полученного соотношения.

Проиллюстрируем описанную схему действий на следующем примере.

Пример 1.1. *Найти общее решение уравнения*

$$y' = y(y^2 - 1) \tag{1.9}$$

и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y(0) = 2$.

Решение. Это уравнение является, очевидно, уравнением с разделяющимися переменными, поскольку его правая часть не зависит от x. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y(y^2-1)} = dx. \tag{1.10}$$

Вычислим в (1.10) интегралы от левой и правой частей. С учетом начальных условий имеем

$$\int_2^y \frac{dy_1}{y_1(y_1^2-1)} = \int_0^x dx_1. \tag{1.11}$$

Для подсчета интеграла в левой части (1.11) представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{y_1(y_1^2-1)} = \frac{A}{y_1} + \frac{B}{y_1-1} + \frac{C}{y_1+1}. \tag{1.12}$$

Приводя выражение в правой части к общему знаменателю, получаем

$$1 = A(y_1^2-1) + By_1(y_1+1) + Cy_1(y_1-1), \tag{1.13}$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y_1, имеем

$$A+B+C=0, \quad B-C=0, \quad -A=1.$$

Тем самым,

$$A=-1, \quad B=C=\frac{1}{2}. \tag{1.14}$$

Заметим, что для определения A, B, C в данной ситуации можно было просто подставить в равенство (1.13) значения $y=0$, $y=\pm1$ и сразу получить (1.14).

Теперь, учитывая в уравнении (1.11) представление (1.12), после интегрирования получаем

$$\left(-\ln|y_1| + \frac{1}{2}\ln|y_1-1| + \frac{1}{2}\ln|y_1+1|\right)\Big|_2^y = x,$$

или после некоторых упрощений

$$\ln\left|\frac{y^2-1}{y^2}\right| - \ln\frac{3}{4} = 2x. \tag{1.15}$$

Следует отметить, что полученная формула содержит «лишние» решения и не все функции, удовлетворяющие (1.15), являются решениями нашей начальной задачи. Потенцируя выражение (1.15) и раскрывая модуль, получаем

$$\frac{y^2-1}{y^2} = \pm\frac{3}{4}e^{2x}. \tag{1.16}$$

Если в правой части выражения (1.16) взять знак минус, то соответствующая функция не будет удовлетворять в нуле начальному условию, а значит, подходит только выражение с плюсом, однако и это еще не все. Выразим из (1.16) функцию $y(x)$

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{4-3e^{2x}}}. \tag{1.17}$$

Выражение (1.17) также дает две функции, из которых начальному условию удовлетворяет только имеющая знак плюс перед корнем. На рис. 1 изображен график этого решения. Его вид определяется следующими обстоятельствами: во-первых, из формулы (1.9) следует, что $y' > 0$ при $y > 1$, то есть функция решения в данном диапазоне — монотонно растущая, во-вторых, $y(x) \to 1$ при $x \to -\infty$, что дает горизонтальную асимптоту $y = 1$, наконец, в-третьих, $y(x) \to \infty$ при $x \to (\ln 4 - \ln 3)/2$, что определяет вертикальную асимптоту $x = (\ln 4 - \ln 3)/2$.

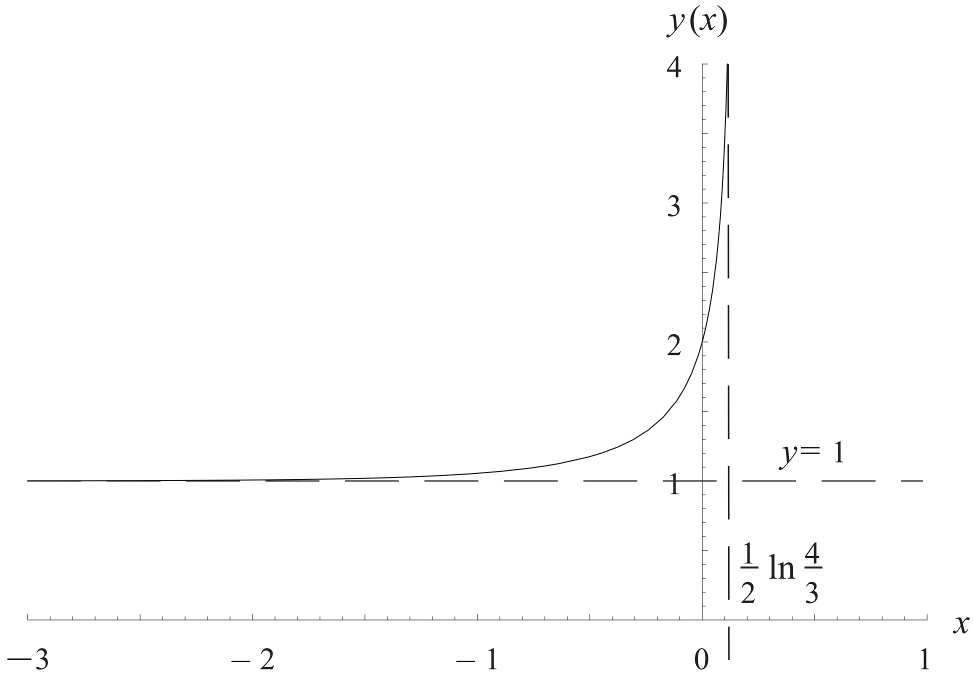

Рис. 1. График интегральной кривой

Отметим, что решение данной задачи определено не для всей числовой оси и уходит на бесконечность при конечном изменении x. $\square$

Перейдем теперь к задачам, сводящимся к уравнению с разделяющимися переменными. К таким относится, в первую очередь, однородные уравнения.

Под однородными будем понимать уравнения, для которых функция правой части может быть представлена в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \equiv f_* \left(\frac{y}{x} \right). \tag{1.18}$$

В случае, если рассматривается уравнение (1.3), определение несколько модифицируется. Определим сначала понятие однородной функции. *Функция $M(x, y)$ называется однородной степени k, если для некоторого вещественного k и всех $\alpha > 0$ выполнено соотношение $M(\alpha x, \alpha y) \equiv \alpha^k M(x, y)$ для всех (x, y) и $(\alpha x, \alpha y)$ из области определения функции $M(x, y)$.*

В свою очередь, *уравнение* (1.3) *будем называть однородным, если $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однородные функции одной степени.*

Для однородного уравнения сведение к уравнению с разделяющимися переменными осуществляется путем замены

$$y = zx. \tag{1.19}$$

Так, уравнение (1.18) в результате замены (1.19) приводится к виду

$$\frac{dz}{dx} + z = f_*(z), \tag{1.20}$$

которое уже, очевидно, с разделяющимися переменными. Для уравнения (1.3) замена (1.19) дает

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(xdz + zdx) = 0,$$

откуда с учетом однородности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$ имеем уравнение

$$x^k M(1, z)dx + x^k N(1, z)(xdz + zdx) = 0,$$

которое также является уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.2. *Найти общее решение*

$$(xy - x^2)dy - (2xy - y^2)dx = 0. \tag{1.21}$$

Решение. Это уравнение однородное, поскольку функции $M(x, y) = -2xy + y^2$, $N(x, y) = xy - x^2$ являются однородными функциями одной степени

$$M(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 M(x, y), N(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 N(x, y).$$

Сведем однородное уравнение (1.21) к уравнению с разделяющимися переменными. Подставляя в уравнение замену $y = zx$ и учитывая, что $dy = zdx + xdz$, получаем

$$(x^2 z - x^2)(zdx + xdz) - (2x^2 z - x^2 z^2)dx = 0. \tag{1.22}$$

Разделим в (1.22) переменные

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - z}{z(2z - 3)} dz. \tag{1.23}$$

Вычислим интегралы от левой и правой частей (1.23). Для подсчета интеграла в правой части подынтегральное выражение представляется в виде

$$\frac{1 - z}{z(2z - 3)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{2z - 3}. \tag{1.24}$$

Приводя выражение в правой части к общему знаменателю, получаем

$$1 - z = A(2z - 3) + Bz,$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, имеем

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}.$$

Подставляя найденные значения в (1.24), после интегрирования (1.23) находим

$$\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{z^{1/3}|2z - 3|^{1/6}}\right| + \ln C,$$

Потенцируя последнее равенство получаем $xz^{1/3}|2z-3|^{1/6}=C$. Заменяя теперь z на $\dfrac{y}{x}$ и возводя левую и правую части в шестую степень, будем иметь

$$x^3y^2(2y-3x)=C.$$

При разделении переменных мы делили обе части уравнения (1.22) на $x^3(2z^2-3z)$, поэтому могли потерять решения, которые обращают в ноль это произведение. Полагаем $x=0$, $z=0$, $z=3/2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=0$, $y=0$, $y=\dfrac{3}{2}x$ — решения (1.21). Следует, впрочем, отметить, что все они входят в полученное выше множество решений. □

Приведем решение еще одной задачи, сводящейся, в свою очередь, к однородному уравнению.

Уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{1.25}$$

сводится к однородному (1.18) с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Пример 1.3. *Найти общее решение*

$$(2y-x-4)dx-(2x-y+5)dy=0.$$

Решение. В данном случае точка пересечения прямых

$$2y-x-4=0,$$
$$2x-y+5=0,$$

$x_*=-2$, $y_*=1$. Полагая $x=u-2, y=v+1$, будем иметь однородное уравнение

$$(2v-u)du-(2u-v)dv=0,$$

которое заменой переменных $v=tu$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $\dfrac{du}{u}=\dfrac{2-t}{t^2-1}dt$, откуда $\ln|u|=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{(t+1)^3}\right|+\dfrac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, имеем $u^2=C\dfrac{t-1}{(t+1)^3}$. Возвращаясь к старым переменным x и y, получим

$$\frac{y-x-3}{(y+x+1)^3}=C.$$

Кроме того, имеется решение $x=-y-1$, которое было потеряно при делении на $t+1$. Решение $x=y-3$, получающееся при $t=1$, входит в общее решение уравнения при $C=0$. □

Рассмотренный выше метод нельзя применить в случае параллельности прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$. Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}=k$ и уравнение (1.25) может быть записано в виде

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)=F(a_1x+b_1y),$$

и следовательно, замена переменных $z=a_1x+b_1y$ преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.4. *Найти общее решение*

$$(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0.$$

Решение. Полагая $z = x + y$, будем иметь

$$(2z - 1)(dz - dy) + (z - 2)dy.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{2z-1}{z+1}dz = dy, \quad 2z - 3\ln|z+1| = y + C,$$

$$3\ln|x + y + 1| = 2x + y + C.$$

Остается проверить, что $z = -1$, то есть $y = -x - 1$ также является решением исходного уравнения. □

1.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

В данном разделе рассматриваются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1.26}$$

где $a(x), b(x)$ — непрерывные на некотором промежутке, содержащем x_0, функции. В правой части уравнения (1.26) выражение $a(x)y$ называется *однородной частью*, а $b(x)$ — *неоднородностью*.

Данную задачу будем решать в два этапа. На первом из них рассмотрим (1.26) с однородной правой частью (не путать с однородными дифференциальными уравнениями, рассмотренными в предыдущем пункте)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y, \quad y(x_0) = y_0. \tag{1.27}$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. уравнение (1.5)), после разделения в нем переменных x и y и интегрирования имеем

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy_1}{y_1} = \int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau,$$

откуда после вычисления интеграла в левой части и потенцирования имеем

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right). \tag{1.28}$$

Формула (1.28) дает решение линейного однородного уравнения (1.27).

Второй этап решения линейного уравнения (1.26) связан с построением на основе формулы (1.28) такой замены переменных, чтобы уравнение (1.26) свелось к уравнению, способ решения которого нам известен. Выполним в (1.26) замену

$$y(x) = z(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right). \tag{1.29}$$

После дифференцирования получаем

$$z'(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right) + z(x)a(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right) =$$
$$= a(x)z(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right) + b(x). \quad (1.30)$$

Выразим в (1.30)

$$z'(x) = b(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right)$$

и, полагая, что $z(x_0) = z_0$, найдем $z(x)$

$$z(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} b(x_1)\exp\left(-\int_{x_0}^{x_1} a(\tau)d\tau\right)\, dx_1.$$

Вернемся с помощью формулы (1.29) к исходным переменным, при этом учтем, что $y(x_0) = y_0$, то есть $z_0 = y_0$ и, значит,

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(x_1)\exp\left(-\int_{x_0}^{x_1} a(\tau)d\tau\right)\, dx_1\right).$$

Задача, тем самым, полностью решена. Изложенный способ построения решения уравнения (1.26) обычно называют *методом вариации произвольных постоянных*.

Пример 1.5. *Найти общее решение*

$$y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x.$$

Решение. Для интегрирования неоднородного уравнения применим метод вариации постоянной. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее однородное уравнение

$$y' - y\operatorname{ctg} x = 0,$$
$$\frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x dx, \int \frac{dy}{y} = \int \frac{d\sin x}{\sin x},$$
$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C, \quad y_{\text{од}} = C\sin x.$$

Считаем C функцией x, тогда $y = C(x)\sin x$ и $y' = C'(x)\sin x + C(x)\cos x$. Подставляя замену в исходное уравнение, после упрощений получаем

$$\frac{dC}{dx} = 2x, \quad dC = 2xdx, \quad C(x) = x^2 + C_1.$$

Тем самым, общее решение имеет вид

$$y = (x^2 + C_1)\sin x.$$

□

Пример 1.6. *Найти общее решение*

$$y' = \frac{y}{x + 2y^3}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Решение. Для решения данной задачи перейдем к уравнению в дифференциалах

$$(x+2y^3)dy = ydx$$

и заметим, что если в этом уравнении считать независимой переменной y, а x – функцией от y, то для $x(y)$ имеем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + 2y^2, \quad x(y_0) = x_0. \tag{1.31}$$

Воспользуемся изложенным выше методом для решения задачи (1.31). Интегрирование однородного уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad x(y_0) = x_0$$

дает $x_{\text{од}} = \dfrac{x_0}{y_0}y$. Замена метода вариации произвольных постоянных $x = zy$ приводит к соотношению

$$z'y + z = z + 2y^2,$$

откуда $z(y) = z_0 + y^2$, тем самым, $x = (z_0 + y^2)y$. Учитывая начальное условие $x(y_0) = x_0$, имеем $z_0 = \dfrac{x_0}{y_0} - y_0^2$. Решение начальной задачи Коши для уравнения (1.31) имеет вид

$$x = \left(\frac{x_0}{y_0} + y^2 - y_0^2\right) y. \tag{1.32}$$

Вместе с тем формула (1.32) представляет неявно заданное решение исходного уравнения. Выражение (1.32) не определено при $y_0 = 0$, однако нетрудно видеть, что $y \equiv 0$ удовлетворяет исходному уравнению и было потеряно при переходе к уравнению (1.31). □

Далее рассмотрим уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям. Уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1), \tag{1.33}$$

после деления обоих частей на y^n, заменой $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ сводится к линейному уравнению и интегрируется как линейное.

Пример 1.7. *Найти общее решение*

$$3xy^2y' + y^3 - 2x = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$y' + \frac{y}{3x} = \frac{2}{3}y^{-2}$$

— это уравнение Бернулли вида (1.33), где $n = -2$. После замены

$$z = y^3, \quad z' = 3y^2y',$$

получаем линейное уравнение

$$z' + \frac{z}{x} = 2.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = 0, \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}, \quad z_{\text{од}} = \frac{C}{x}.$$

Полагаем $C = C(x),\ z' = \dfrac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$, тогда $C'(x) = 2x,\ C(x) = x^2 + C_1$.

Получаем общее решение $z = x + \dfrac{C_1}{x}$, а следовательно, $y^3 = x + \dfrac{C_1}{x}$. □

Уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x), \tag{1.34}$$

в общем виде не интегрируется в квадратурах, но если известно хотя бы одно частное решение этого уравнения $y_*(x)$, то заменой переменных $y = y_* + z$ его можно свести к уравнению Бернулли

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_*(x)]z + q(x)z^2 = 0.$$

Пример 1.8. *Найти общее решение*

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, \quad y_* = \frac{1}{x}. \tag{1.35}$$

Решение. Данное уравнение является уравнением Риккати (1.34). Полагаем

$$y = z + \frac{1}{x}, \quad y' = z' - \frac{1}{x^2},$$

подставляя замену в исходное уравнение (1.35), получим

$z' - \dfrac{1}{x^2} = \left(z + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{2}{x^2}$, или $z' - \dfrac{2z}{x} = z^2$, которое является уравнением Бернулли.

Полученное уравнение Бернулли приводим к линейному

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1, \quad u = \frac{1}{z}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{z'}{z^2}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} - 1.$$

Решаем однородное уравнение

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}, \quad \ln|u| = -2\ln|x| + \ln C, \quad u = \frac{C}{x^2},$$

далее варьируем постоянную $C = C(x)$

$$u = \frac{C(x)}{x^2}, \quad \frac{C'(x)}{x^2} = -1, \quad C(x) = -\frac{x^3}{3} + C_1, \quad u = \frac{C_1}{x^2} - \frac{x}{3},$$

и возвращаемся к исходным переменным

$$\frac{1}{z} = \frac{C_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{y - \dfrac{1}{x}} = \frac{C_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C_2 - x^3}.$$

Учитывая, что еще на этапе решения уравнения Бернулли выполнялось деление на z и оказалось потеряно решение $z = 0$, добавим к полученному общему решению еще и решение $y = 1/x$, оно, впрочем, было известно нам по условию задачи (1.35). □

1.3. Уравнения в полных дифференциалах

В этом разделе будем рассматривать уравнение (1.3) в форме дифференциалов, воспроизведем его еще раз

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.36}$$

Предположим, что $F(x, y)$ представляет собой общий интеграл (1.36), т. е. на решениях уравнения (1.36) $F(x, y(x)) \equiv C$. Вычисляя дифференциал от левой и правой частей данного тождества, имеем

$$dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy. \tag{1.37}$$

Структура равенств (1.36) и (1.37), очевидным образом, одинакова, и *если по известным функциям $M(x, y)$ и $N(x, y)$ удается найти такую $F(x, y)$, что*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y), \tag{1.38}$$

то $F(x, y) = C$ как раз и будет искомым общим интегралом уравнения (1.36). *Уравнения, обладающие таким свойством, будем называть уравнениями в полных дифференциалах.*

Выясним условия на $M(x, y)$ и $N(x, y)$, при которых уравнение (1.36) является уравнением в полных дифференциалах.

Предположим, что $F(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных функция. Продифференцируем первое из равенств (1.38) по y, а второе по x, тогда

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Учитывая, что значение второй частной производной дважды непрерывно дифференцируемой функции $F(x, y)$ не зависит от направления дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.39}$$

Выражение (1.39) представляет собой признак того, что уравнение (1.36) является уравнением в полных дифференциалах.

Построение общего интеграла для уравнения в полных дифференциалах опишем на примере.

Пример 1.9. *Найти общее решение*

$$(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах (1.36), если имеет место равенство $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Так как

$$\frac{\partial (x + y - 1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial (x - y^2 + 3)}{\partial x},$$

левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$. Равенство $\dfrac{\partial F}{\partial x} = x + y - 1$ интегрируем по x, при фиксированном y

$$F = \int (x + y - 1)dx = x^2 + xy - x + \varphi(y),$$

поэтому в качестве постоянной интегрирования ставим неизвестную функцию $\varphi(y)$. Подставляем выражение для F во второе равенство $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x - y^2 + 3$. Имеем $\dfrac{\partial}{\partial y}\big(x^2 + xy - x + \varphi(y)\big) = x - y^2 + 3$, или $\varphi(y)' = -y^2 + 3$, откуда $\varphi(y) = -\dfrac{y^3}{3} + 3y + C$ и $F(x, y) = x^2 + xy - x - \dfrac{y^3}{3} + 3y$, тогда общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$x^2 + xy - x - \frac{y^3}{3} + 3y = C.$$

□

Учитывая, что уравнения в полных дифференциалах довольно легко интегрируются, представляют интерес способы сведения (1.36) к уравнению в полных дифференциалах. Как оказывается (см., например, [7]), всегда существует такая ненулевая гладкая функция $\gamma(x, y)$, что для функций $N_*(x, y) = \gamma(x, y)N(x, y)$ и $M_*(x, y) = \gamma(x, y)M(x, y)$ выполнены равенства (1.39). *Функцию $\gamma(x, y)$ называют интегрирующим множителем.* Естественно, регулярного метода получения интегрирующего множителя не существует.

Пример 1.10. *Найти интегрирующий множитель для уравнения*

$$-ydx + (x + 2y^3)dy = 0. \tag{1.40}$$

Решение. Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах (не выполнено условие (1.39)). Однако в примере 1.6 для него, тем не менее, найден общий интеграл (см. формулу (1.32)) $x = \left(\dfrac{x_0}{y_0} + y^2 - y_0^2\right)y$. Обозначим $C = \dfrac{x_0}{y_0} - y_0^2$ и выразим эту величину через x и y, получаем $C = \dfrac{x}{y} - y^2$, тем самым, функция $F(x, y) = \dfrac{x}{y} - y^2$ представляет собой общий интеграл. Построим дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, соответствующее этому интегралу

$$\frac{1}{y}dx + \left(-\frac{x}{y^2} - 2y\right)dy = 0. \tag{1.41}$$

Сравнивая уравнения (1.40) и (1.41), замечаем, что для превращения (1.40) в (1.41) его необходимо разделить на $-y^2$. Таким образом, в данном случае интегрирующий множитель имеет вид $\gamma(x, y) = -\dfrac{1}{y^2}$. □

В некоторых случаях, когда уравнение (1.31) не является уравнением в полных дифференциалах, для нахождения подходящих замен можно попытаться выделить в уравнении полные дифференциалы. При этом используются следующие простейшие формулы:

$$d(xy) = xdy + ydx, \quad d(y^2) = 2ydy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right), \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y}.$$

Пример 1.11. *Найти общее решение*

$$(1 + (x^2 + y^2)x)xdx + ydy = 0.$$

Решение. Сведем исходное уравнение к уравнению в полных дифференциалах

$$xdx + ydy + x^2(x^2 + y^2)dx = 0, \ \frac{d(x^2 + y^2)}{2} + x^2(x^2 + y^2)dx = 0,$$

делим уравнение на $x^2 + y^2$, имеем

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} + d\left(\frac{x^3}{3}\right) = 0.$$

Интегрируя, получаем решение

$$\frac{1}{2}\ln|x^2 + y^2| + \frac{x^3}{3} = C.$$

□

1.4. Варианты контрольной работы № 1

Вариант № 1

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dot{x} = 2(x-2)(x+1)^2, \quad x(0) = 1.$
2. Найти общее решение $(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0.$
3. Найти общее решение $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x.$
4. Найти общее решение $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}, \quad y_* = \dfrac{1}{x}.$
5. Найти общее решение $(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$

Вариант № 2

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dot{x} = x(x-2)(x+1), \quad x(0) = 1.$
2. Найти общее решение $(2y - x - 4)dx - (2x - y + 5)dy = 0.$
3. Найти общее решение $y'\cos x + y\sin x = 1.$
4. Найти общее решение $3xy^2y' + y^3 - 2x = 0.$
5. Найти общее решение $(1 + (x^2 + y^2)x)xdx + ydy = 0.$

Вариант № 3

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = y^2(y-2), \quad y(0) = 1.$
2. Найти общее решение $(2x + 4y + 3)y' - x - 2y - 1 = 0.$
3. Найти общее решение $\dot{x} - x\operatorname{ctg} t = 4\sin t.$
4. Найти общее решение $(x - y)ydx - x^2dy = 0.$
5. Найти общее решение $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$

Вариант № 4

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y^2-1)(y-2), \quad y(0)=0.$

2. Найти общее решение $y' = \dfrac{x+y-3}{y-x+1}.$

3. Найти общее решение $(x^2-1)y' + 2xy - \cos x = 0.$

4. Найти общее решение $xy' - y^2 \ln x + y = 0.$

5. Найти общее решение $xdx + ydy + xdy - ydx = 0.$

Вариант № 5

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y^2-4)y, \quad y(1)=1.$

2. Найти общее решение $(3x-4y-3)y' - 3x + 4y + 2 = 0.$

3. Найти общее решение $\dot{x} - 2x = t\exp(2t)\sin t.$

4. Найти общее решение $y' + 2y\exp(x) - y^2 = \exp(2x) + \exp(x)$ при условии, что имеется решение $y_* = \exp(x).$

5. Найти общее решение $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0.$

Вариант № 6

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = y(y-1)(y-2), \quad y(0)=-1.$

2. Найти общее решение $y' = \dfrac{x-y+1}{x+y-3}.$

3. Найти общее решение $y' + y = (x+1)\exp(-x)\cos x.$

4. Найти общее решение $y' = \dfrac{y^2}{(y-x)x}.$

5. Найти общее решение $(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y})dy = 0.$

Вариант № 7

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y+1)(y^2-4), \quad y(0)=3.$

2. Найти общее решение $x + y - 2 + (1-x)y' = 0.$

3. Найти общее решение $y' - y = \sin x.$

4. Найти общее решение $(y^2+x^2+1)y' + xy = 0.$

5. Найти общее решение $(x^2+y^2+y)dx - xdy = 0.$

Вариант № 8

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dfrac{x'}{x+1} = x(x-2), \quad x(0)=-2.$

2. Найти общее решение $(3y-7x+7)dx - (3x-7y-3)dy = 0.$

3. Найти общее решение $xy' - 2y = x^3\cos x.$

4. Найти общее решение $2y'x\ln x + y = xy^{-1}\cos x.$

5. Найти общее решение $x(2x^2+y^2) + y(x^2+2y^2)y' = 0.$

Вариант № 9

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = (y-1)(y-2)(y-3), \quad y(0)=0.$

2. Найти общее решение $(4x+2y+1)y' + 8x + 4y + 1 = 0.$

3. Найти общее решение $\dot{x} - x\,\mathrm{tg}\,t = \dfrac{1}{\cos^3 t}.$

4. Найти общее решение $(y^2-2xy)dx + x^2dy = 0.$

5. Найти общее решение $ydx - (y^2+x)dy = 0.$

Вариант № 10

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dfrac{y'}{y+1} = y(y+2), \quad y(0) = 2.$

2. Найти общее решение $y' = \dfrac{x+y}{1-y-x}.$

3. Найти общее решение $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x.$

4. Найти общее решение $2y'\sin x + y\cos x = y^3\sin^2 x.$

5. Найти общее решение $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0.$

Вариант № 11

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $\dfrac{y'}{y-1} = y^2, \quad y(0) = -1.$

2. Найти общее решение $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0.$

3. Найти общее решение $\dot{x} + t\exp(t)x = \exp[(1-t)\exp(t)].$

4. Найти общее решение $2x(x^2 + y)dx = dy.$

5. Найти общее решение $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0.$

Вариант № 12

1. Найти общее решение и построить график интегральной кривой, соответствующей начальным условиям $y' = y(y+1)(y+2), \quad y(0) = -1.$

2. Найти общее решение $y' = -\dfrac{2x+3y-5}{3x+2y-5}.$

3. Найти общее решение $y' + 2y = x\exp(-2x)\cos x.$

4. Найти общее решение $(x - t)tdx - x^2dt = 0.$

5. Найти общее решение $\dfrac{y + \sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)dy = 0.$

2. Линейные дифференциальные уравнения и системы

В этой главе рассматриваются методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. При решении используется главное свойство линейных однородных систем и уравнений, состоящее в том, что их общее решение строится как сумма из n линейно независимых решений, где n — порядок соответствующего уравнения или системы.

2.1. Линейные дифференциальные уравнения старших порядков с постоянными коэффициентами

Объектом изучения данного раздела является уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x), \tag{2.1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, $a_0 \neq 0$, $f(x)$ — непрерывная функция. При решении линейных дифференциальных уравнений будем выделять три этапа:

1) Решается однородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{2.2}$$

и определяется его общее решение $y_{\text{од}} = C_1\varphi_1(x) + ... + C_n\varphi_n(x)$, где $\varphi_i(x)$, $j = 1, ..., n$ — линейно независимые решения.

2) Каким-либо способом находится частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (2.1).

3) Общее решение (2.1) записывается как сумма

$$y_{\text{общ}} = y_{\text{од}} + \tilde{y}.$$

Начнем применение указанной программы с рассмотрения однородного уравнения (2.2). Выполнение в (2.2) эйлеровой замены $y = ce^{\lambda x}$ приводит к равенству

$$a_0 c\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 c\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_n c e^{\lambda x} = 0,$$

из которого получаем характеристическое уравнение

$$l(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{2.3}$$

Многочлен $l(\lambda)$ будем далее *называть характеристическим.* Как оказывается, если известны корни характеристического многочлена, то решение однородного уравнения записывается в соответствии со следующими тремя правилами:

1) пусть корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вещественны и различны, тогда решение уравнения (2.2) записывается в виде

$$y_{\text{од}} = c_1 \exp(\lambda_1 x) + c_2 \exp(\lambda_2 x) + \cdots + c_n \exp(\lambda_n x);$$

2) пусть корни $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ имеют кратности $k_1, \dots, k_s$ $(k_1 + \dots + k_s = n)$ соответственно, тогда решение уравнения (2.2) представляется в виде

$$y_{\text{од}} = \left(c_{11} + c_{12}x + \dots c_{1k_1}x^{k_1-1}\right)\exp\left(\lambda_1 x\right) + \dots \\ + \left(c_{s1} + c_{s2}x + \dots c_{sk_s}x^{k_s-1}\right)\exp\left(\lambda_s x\right);$$

3) пусть $z(x) = u(x) + iv(x)$ — комплексное решение однородного уравнения (2.2) с вещественными коэффициентами, тогда $u(x)$ и $v(x)$ по отдельности также являются решениями уравнения (2.2).

Последнее из приведенных правил позволяет построить решения, соответствующие комплексно сопряженным корням характеристического многочлена. Пусть, например, корни $\lambda_{1,2} = \tau \pm i\omega$ имеют кратность k, тогда из правила 2) для этих корней имеем $2k$ комплексных решений вида $\exp((\tau \pm i\omega)x)$, $x\exp((\tau \pm i\omega)x)$, $\dots$, $x^{k-1}\exp((\tau \pm i\omega)x)$. Учитывая теперь правило 3), получаем $2k$ линейно независимых решений. Отметим, что комплексно сопряженным корням характеристического многочлена соответствуют и комплексно сопряженные решения однородного уравнения. Тем самым решение, соответствующее обсуждаемым корням, имеет вид

$$y_{\text{од}} = \exp\left(\tau x\right)\cos(\omega x)\left(c_{11} + c_{12}x + \dots c_{1k}x^{k-1}\right) + \\ + \exp\left(\tau x\right)\sin(\omega x)\left(c_{21} + c_{22}x + \dots c_{2k}x^{k-1}\right) + \dots$$

Перейдем ко второму этапу решения уравнения (2.1) и рассмотрим способы построения каких-либо решений неоднородного уравнения. Наилучшим из способов является, очевидно, метод «внезапного озарения», но, в силу плохой алгоритмизуемости, мы вынуждены пропустить его обсуждение. Остальные методы делятся на две группы: одна из них — методы, работающие для специфических правых частей и дающие ответы в каком-либо специальном классе функций (эти методы обычно позволяют свести решаемую задачу к какой-либо алгебраической); методы другого класса годятся для любой правой части, однако приводят к вычислению интегралов, которое может быть весьма трудоемким.

Метод неопределенных коэффициентов

Пусть функция правой части уравнения (2.1) представляется в виде суммы произведений многочленов и экспонент вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j(x)\exp(\alpha_j x), \tag{2.4}$$

где $p_j(x) = p_{0j}x^{m_j} + p_{1j}x^{m_j-1} + \dots + p_{m_j j}$, $j = 1, \dots k$. *Функцию в правой части* (2.4) *будем называть квазимногочленом.* Нетрудно показать, что частное решение задачи (2.1) с функцией $f(x)$, представленной в виде (2.4), может быть записано как сумма

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \dots + \tilde{y}_k,$$

где $\tilde{y}_j$ удовлетворяет уравнению

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = p_j(x)\exp(\alpha_j x). \tag{2.5}$$

Рассмотрим задачу построения частного решения уравнения (2.5). Как оказывается, $\tilde{y}_j$ можно искать в той же форме, что и неоднородность этого уравнения. Сформулируем общие правила построения решения (2.5).

- Пусть сначала $l(\alpha_j) \neq 0$, то есть α_j не является корнем характеристического уравнения (2.3), тогда частное решение уравнения (2.5) представляется в виде

$$\tilde{y}_j = q(x)\exp(\alpha_j x). \tag{2.6}$$

- Пусть теперь α_j — корень кратности s характеристического многочлена $l(\lambda)$, тогда частное решение может быть представлено как

$$\tilde{y}_j = x^s q(x)\exp(\alpha_j x). \tag{2.7}$$

Первый из этих двух случаев называют обычно нерезонансным, а второй — резонансным.

В обеих формулах (2.6) и (2.7) $q(x)$ — многочлен с не определенными пока коэффициентами той же степени, что и степень многочлена $p_j(x)$. Подстановка выражений (2.6) или (2.7) в уравнение (2.5) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x позволяет найти коэффициенты многочлена $q(x)$.

С методом неопределенных коэффициентов тесно связан метод нахождения частных решений уравнения (2.1) в ситуации, когда в формуле (2.4) содержатся в качестве сомножителей еще синусы и косинусы. Уравнение (2.5) в этом случае приобретает вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = p(x)\exp(\tau x)\left\{\begin{array}{c}\cos\omega x\\ \sin\omega x\end{array}\right\}. \tag{2.8}$$

Для сведения данной задачи к изложенному выше методу неопределенных коэффициентов заменим в (2.8) $\cos\omega x$ или $\sin\omega x$ на $\exp i\omega x$.

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_n z \;=\; p(x)\exp(\tau x)\exp(i\omega x) \;\equiv\; p(x)\exp\big((\tau + i\omega)x\big). \tag{2.9}$$

Полученное уравнение (2.9) имеет вид, аналогичный (2.5), с той лишь разницей, что в (2.9) показатель экспоненты — комплексное число $\tau + i\omega$. Учитывая, что при решении (2.5) нигде не использовалась вещественность показателя экспоненты, задачу (2.9) можно решать методом неопределенных коэффициентов и найти частное решение $\tilde{z}$ уравнения (2.9). Предположим, что $\tilde{z} = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Подставим это выражение в (2.9) и выделим вещественную и мнимую части, тогда нетрудно видеть

$$\begin{gathered} a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_n u = p(x)\exp(\tau x)\cos(\omega x),\\ a_0 v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + \cdots + a_n v = p(x)\exp(\tau x)\sin(\omega x). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Таким образом, для решения задачи (2.8) необходимо сначала перейти к задаче (2.9), а затем взять от полученного частного решения $\tilde{z}$ вещественную часть, если в уравнении (2.8) был $\cos(\omega x)$, и мнимую часть — в случае $\sin(\omega x)$. Для иллюстрации описанного метода рассмотрим следующую задачу.

Пример 2.1. *Для уравнения*

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos\omega t, \tag{2.11}$$

где α, ω, ω_0 — положительные числа, найти амплитуду периодического решения.

Решение. Найдем корни характеристического многочлена $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega_0^2$ уравнения (2.11), которые в зависимости от знака дискриминанта $D = \alpha^2 - 4\omega_0^2$ имеют вид $\lambda_{1,2} = \big(-\alpha \pm \sqrt{D}\big)/2$ при $D > 0$ и $\lambda_{1,2} = \alpha/2 \pm i\Omega$, $\Omega = \sqrt{-D}/2$ при $D < 0$. Общее решение однородной части уравнения (2.11) получается равным $x_{\text{од}} = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$ в первом, и $x_{\text{од}} = \exp(-t\alpha/2)\big(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t\big)$ — во втором случае. Следует отметить, что при $\alpha > 0$ и $t \to +\infty$, $x_{\text{од}}(t) \to 0$ для любых C_1, C_2.

Прейдем к определению частного решения неоднородного уравнения. Заменим в правой части (2.11) $\cos \omega t$ на $\exp i\omega t$ и рассмотрим уравнение

$$\ddot{z} + \alpha \dot{z} + \omega_0^2 z = \exp i\omega t.$$

Найдем частное решение этого уравнения. Учитывая, что $i\omega$ не является корнем характеристического многочлена, решение будем искать в виде $\tilde{z} = A \exp i\omega t$. Подстановка дает $A \exp i\omega t(-\omega^2 + \alpha i\omega + \omega_0^2) = \exp i\omega t$, отсюда $A = \big(\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i\omega\big)^{-1}$. Для удобства дальнейших преобразований представим A в виде $A = \rho \exp i\varphi$, где $\rho = \big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2\big)^{-1/2}$, а $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Учитывая, что $\tilde{x} = \operatorname{Re} \tilde{z}$, получаем $\tilde{x} = \operatorname{Re} \rho \exp(i(\varphi + \omega t)) = \rho \cos(\varphi + \omega t)$. Общее решение задачи (2.11) имеет вид $x_{\text{общ}} = x_{\text{од}} + \tilde{x}$, причем, как нетрудно видеть, $x_{\text{од}}$ при ненулевых C_1, C_2 и $\alpha > 0$ — непериодическое, тем самым, уравнение (2.11) имеет единственное периодическое решение $x = \rho \cos(\varphi + \omega t)$ с амплитудой ρ. При фиксированных ω_0 и α определим максимум полученной функции при $\omega > 0$. Для этого найдем производную амплитуды $\rho'(\omega) = -\big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2\big)^{-3/2}\big(\alpha^2\omega - 2(\omega_0^2 - \omega^2)\omega\big)$ и приравняем ее к нулю с тем, чтобы найти точку возможного экстремума. Из равенства $\alpha^2\omega - 2(\omega_0^2 - \omega^2)\omega = 0$, учитывая положительность ω, имеем $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2/2$. При $\alpha^2 < 2\omega_0^2$ в точке $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2/2}$ реализуется максимальное значение амплитуды периодического решения

$$\rho_{max} = \rho(\omega^*) = 2\alpha^{-1}\big(\alpha^2 + (2\omega_0^2 - \alpha^2)^2\big)^{-1/2}. \tag{2.12}$$

□

Пример 2.2. *Найти общее решение*

$$y'' + 2y' + 17y = \exp(-x) + \sin 4x. \tag{2.13}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 2y' + 17y = 0, \tag{2.14}$$

для этого выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0,$$

корни которого равны $\lambda_{1,2} = 1 \pm 4i$. Общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (2.14) имеет вид

$$y_{\text{од}} = (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) \exp(x).$$

Правая часть исходного уравнения (2.13) состоит из двух слагаемых, поэтому ищем частные решения двух уравнений

$$1)\ y'' + 2y' + 17y = \exp(-x), \tag{2.15}$$

здесь $\alpha = -1 \neq \lambda_{1,2}$, следовательно, $\tilde{y}_1 = A\exp(-x)$. Подставляя данное выражение в уравнение (2.15), находим $\tilde{y}_1 = \dfrac{1}{16}\exp(-x)$.

$$2)\ y'' + 2y' + 17y = \sin 4x. \tag{2.16}$$

В данной ситуации удобно воспользоваться методом комплексных амплитуд, для этого перейдем к уравнению

$$z'' + 2z' + 17z = \exp(4ix), \tag{2.17}$$

мнимая часть решений которого является решением уравнения (2.16), то есть $\tilde{y}_2 = \operatorname{Im}\tilde{z}$, где $\tilde{z}$ — частное решение (2.17). Поскольку $4i$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение (2.17) ищем в виде $\tilde{z} = A\exp(4ix)$. После подстановки в (2.17) получаем $A = \dfrac{1-8i}{65}$, а, значит, $\tilde{z} = \dfrac{1-8i}{65}\exp(4ix)$. Выделим мнимую часть $\tilde{z}$, имеем

$$\tilde{y}_2 = -\frac{8}{65}\cos 4x + \frac{1}{65}\sin 4x.$$

Общее решение исходного уравнения (2.13) складывается из общего решения однородного уравнения и двух частных решений неоднородного $y_{\text{общ}} = y_{\text{од}} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, то есть

$$y_{\text{общ}} = (C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)\exp(x) + \frac{1}{16}\exp(-x) - \frac{8}{65}\cos 4x + \frac{1}{65}\sin 4x.$$

$\square$

Пример 2.3. *Найти общее решение*

$$y''' + 2y'' = (x+1)\exp(-2x). \tag{2.18}$$

Решение. Характеристическое уравнение однородного уравнения

$$y''' + 2y'' = 0 \tag{2.19}$$

записывается в виде $\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$ и имеет корень $\lambda_1 = 0$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -2$. Решение однородного уравнения (2.19) имеет, следовательно, вид

$$y_{\text{од}} = C_1 + C_2 x + C_3\exp(-2x). \tag{2.20}$$

Правая часть уравнения (2.18)

$$p(x)\exp(\alpha x) = (x+1)\exp(-2x),$$

где степень многочлена p равна единице, а $\alpha = -2$, совпадает с корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение (2.18) отыскивается в виде

$$\tilde{y} = (Ax+B)x\exp(-2x).$$

Подставляя $\tilde{y}$ в дифференциальное уравнение (2.18) и приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения, находим

$$A = \frac{1}{8},\ B = \frac{1}{2}.$$

Запишем общее решение уравнения (2.18) $y_{\text{общ}} = y_{\text{од}} + \tilde{y}$ или

$$y_{\text{общ}} = C_1 + C_2 x + C_3 \exp(-2x) + \left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right) x \exp(-2x).$$

$\square$

Метод вариации произвольной постоянной

Рассмотрим теперь ситуацию, когда функция $f(x)$ в правой части уравнения (2.1) не представляется в виде (2.4). Опишем метод вариации произвольной постоянной. В данной ситуации частное решение (2.1) отыскивается на основе решения однородного уравнения

$$y_{\text{од}} = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

где $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \dots n)$ — линейно независимые функции, полученные на предыдущем этапе решения задачи. Введем вместо констант c_j, $j = 1, \dots n$ новые переменные $c_j(x)$ так, что

$$\tilde{y} = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x), \tag{2.21}$$

тогда их можно выбрать из следующей системы:

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1(x) & + & \dots & + & c_n'\varphi_n(x) & = & 0, \\ c_1'\varphi_1'(x) & + & \dots & + & c_n'\varphi_n'(x) & = & 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\big(c_1'\varphi_1^{(n-1)}(x) & & + \dots + & & c_n'\varphi_n^{(n-1)}(x)\big) & = & f(x). \end{cases} \tag{2.22}$$

Полученная система, алгебраическая относительно $c_j'(x)$, $j = 1, \dots n$, имеет отличный от нуля определитель. Это определитель Вронского системы линейно независимых функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots n$.

Учитывая, что система (2.22) не вырождена, нетрудно вычислить значения $c_j'(x)$. Интегрируя полученные выражения, с помощью формулы (2.21) находим частное решение $\tilde{y}(x)$.

Пример 2.4. *Найти общее решение*

$$\ddot{x} - x = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}. \tag{2.23}$$

Решение. Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$$

и выпишем общее решение однородного уравнения

$$x_{\text{од}} = C_1 \exp(t) + C_2 \exp(-t).$$

Линейное неоднородное уравнение (2.23) будем решать методом вариации постоянных. Для этого полагаем $C_1 = C_1(t), C_2 = C_2(t)$ и решение (2.23) ищем в виде

$$\tilde{x} = C_1(t)\exp(t) + C_2(t)\exp(-t).$$

Функции $C_1(t), C_2(t)$ определяются из системы

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t)\exp(t) + \dot{C}_2(t)\exp(-t) = 0, \\ \dot{C}_1(t)\exp(t) - \dot{C}_2(t)\exp(-t) = \dfrac{t^2\ln t + 1}{2t^2}. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$\dot{C}_1(t) = \frac{t^2\ln t + 1}{4t^2}\exp(-t), \quad \dot{C}_2(t) = \frac{-t^2\ln t - 1}{4t^2}\exp(t),$$
$$C_1(t) = \frac{1}{4}\int \frac{t^2\ln t + 1}{t^2\exp(t)}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\ln t}{\exp(t)}dt + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2\exp(t)},$$
$$\int \frac{\ln t}{\exp(t)}dt = \begin{vmatrix} u = \ln t, \quad dv = \dfrac{dt}{\exp(t)}, \\ du = \dfrac{dt}{t}, v = -\exp(-t) \end{vmatrix} = -\frac{\ln t}{\exp(t)} + \int \frac{dt}{t\exp(t)},$$
$$\int \frac{dt}{t^2\exp(t)} = \begin{vmatrix} u = \exp(-t), \quad dv = \dfrac{dt}{t^2}dt, \\ du = -\exp(-t)dt, v = -\dfrac{1}{t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t\exp(t)} - \int \frac{dt}{t\exp(t)}.$$

Итак, $C_1(t) = -\dfrac{\ln t}{4\exp(t)} - \dfrac{1}{4t\exp(t)} + C_3$. Аналогично,

$$C_2(t) = \frac{\exp(t)}{4t} - \frac{\exp(t)\ln t}{4} + C_4.$$

Выписываем общее решение уравнения

$$x_{\text{общ}} = C_3\exp(t) + C_4\exp(-t) - \frac{\ln t}{2}.$$

□

2.2. Формула Остроградского–Лиувилля

Рассмотрим линейно независимую на отрезке $[a, b]$ систему функций

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x),$$

имеющих все производные до порядка n включительно. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система линейного однородного уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0. \tag{2.24}$$

Тогда имеет место формула Остроградского–Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau\right),$$

где

$$W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

— определитель Вронского, $x_0 \in [a, b]$ — любое значение, на котором непрерывны коэффициенты $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ уравнения (2.24).

На примере линейного однородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{2.25}$$

покажем, что при известном частном решении y_1, это уравнение может быть сведено к уравнению первого порядка. Пользуясь формулой Остроградского–Лиувилля имеем

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \exp\left(-\int p(x)dx\right), \quad p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \tag{2.26}$$

где y_2 — неизвестное пока решение уравнения (2.25). Формула (2.26) при известном y_1, очевидным образом, приводит к линейному уравнению первого порядка относительно y_2

$$y_2'y_1 - y_2y_1' = C \exp\left(-\int p(x)dx\right) \text{ или } \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C\exp(-\int p(x)dx)}{y_1^2}. \tag{2.27}$$

В общем случае, использование формулы Остроградского–Лиувилля позволяет при известном решении y_1 понизить порядок решаемого уравнения на единицу.

Пример 2.5. *Найти общее решение уравнения*

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \tag{2.28}$$

отыскивая одно из его решений в виде $y_1 = \exp(mx)$.

Решение. Подставляя $y_1 = \exp(mx)$ в уравнение (2.28), получаем решение $y_1 = \exp(-2x)$. Далее воспользуемся формулой Остроградского—Лиувилля (2.27), в которой $p(x) = \dfrac{4x}{2x+1}$, а y_2 — линейно независимое с y_1 решение уравнения (2.28). Из (2.27) имеем

$$\left(\frac{y_2}{\exp(-2x)}\right)' = \frac{C\exp(-\int \frac{4x}{2x+1})dx}{\exp(-4x)} = C(2x+1)\exp(2x),$$

$$\frac{y_2}{\exp(-2x)} = C\int (2x+1)\exp(2x)dx,$$

откуда y_2 можно выбрать равным $y_2 = x$. Тем самым, общее решение исходного уравнения (2.28) имеет вид

$$y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\exp(-2x) + C_2x.$$

□

2.3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

В этом разделе рассмотрим линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\dot{x} = Ax + f(t). \tag{2.29}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, A — постоянная матрица размера $n \times n$, $f(t)$ — непрерывная вектор-функция. Решение данной задачи можно получить в соответствии с той же схемой, что и для уравнения n-го порядка (2.1). Для системы (2.29), как и ранее, сделаем следующие три шага:

1) Решается линейная однородная система
$$\dot{x} = Ax, \tag{2.30}$$
и определяется ее общее решение
$$x_{\text{од}}(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \tag{2.31}$$
где $\varphi_j(t) \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимые решения (2.30), $c_j(t)$ — произвольные константы, $j = 1, \dots, n$.

2) Каким-либо образом определяется любое частное решение неоднородной системы (2.29) $\tilde{x}(t)$.

3) Общее решение неоднородной системы записывается в виде
$$x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{од}}(t) + \tilde{x}(t).$$

Начнем с решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений (2.30).

Если выполнить в ней эйлерову замену $x = \exp(\lambda t)h$, где λ — некоторое число действительное или комплексное, $h \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор, то получится алгебраическое равенство $\lambda \exp(\lambda t)h = A\exp(\lambda t)h$. Избавляясь от $\exp(\lambda t)$, получаем стандартную задачу на собственные числа и собственные векторы
$$\lambda h = Ah.$$

Не обсуждая здесь способы вычисления собственных чисел матрицы A и соответствующих им цепочек собственных и присоединенных векторов, будем считать, что нами уже найдены все такие цепочки, то есть имеется полный набор линейно независимых собственных и присоединенных векторов
$$\begin{array}{l} h_1 \to p_{11} \to \ldots \to p_{1k_1-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_s \to p_{s1} \to \ldots \to p_{sk_s-1}, \end{array} \tag{2.32}$$
где $k_1 + \dots + k_s = n$, между которыми в каждой цепочке выполнены соотношения
$$(A - \lambda E)h_j = 0, \quad (A - \lambda E)p_{j1} = h_j, \quad \ldots, \quad (A - \lambda E)p_{jk_j-1} = p_{jk_j-2}.$$

Выпишем методику построения решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Выделим, как и выше для уравнений, три ситуации.

1) Считаем, что собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — вещественны и различны, тогда каждому собственному числу соответствует единственный с точностью до умножения на константу собственный вектор, будем обозначать их $h_1, \dots, h_n$, тогда общее решение системы (2.30) имеет вид
$$x_{\text{од}}(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t)h_1 + \dots + c_n \exp(\lambda_n t)h_n. \tag{2.33}$$

2) Пусть имеется полный набор линейно независимых собственных и присоединенных векторов (2.32). Отметим, что каждому из собственных значений может соответствовать несколько цепочек. Решение системы (2.30) в этом случае записывается как

$$x_{\text{од}}(t) = \exp(\lambda_1 t)\Big(c_{11}h_1 + c_{12}(th_1 + p_{11}) + c_{13}\Big(\frac{t^2}{2}h_1 + tp_{11} + p_{12}\Big) + \ldots$$
$$+ c_{1k_1}\Big(\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}h_1 + \frac{t^{k_1-2}}{(k_1-2)!}p_{11} + \cdots + p_{1k_1-1}\Big)\Big) + \ldots$$
$$+ \exp(\lambda_s t)\Big(c_{s1}h_s + \cdots + c_{sk_s}\Big(\frac{t^{k_s-1}}{(k_s-1)!}h_s + \cdots + p_{1k_s-1}\Big)\Big).$$

3) Случай комплексных собственных чисел разбирается, как и выше, на основе следующего простого утверждения: *пусть $z(t) = u(t) + iv(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные вектор-функции, является решением системы* (2.30) *с вещественными коэффициентами, тогда вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ являются вещественными решениями системы* (2.30). Данное утверждение позволяет действовать следующим образом: сначала на основе методов двух предыдущих пунктов строится набор линейно независимых решений (2.30) в комплексной форме, а затем из них выделяются вещественные и мнимые части.

В связи с последним пунктом стоит упомянуть только о том, что комплексно сопряженным собственным числам матрицы A соответствуют комплексно сопряженные друг другу цепочки собственных и присоединенных векторов, а, следовательно, множество линейно независимых решений, получаемое на основе сопряженных собственных чисел, одно и то же. Тем самым, и вычислять цепочки, по ним решения, а потом вещественные и мнимые части от решений нужно только для одного из пары комплексно сопряженных собственных чисел.

Пример 2.6. *Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет трехкратное собственное число $\lambda = 2$, которому отвечает собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 2, следовательно, число линейно независимых собственных векторов $m = n - r = 1$, где $n = 3$ — порядок системы. Присоединенный вектор определяется из системы $(A - \lambda E)h_2 = h_1$,

$$\begin{cases} 2h_{21} - h_{22} = 1, \\ 3h_{21} - h_{22} - h_{23} = 2, \\ h_{21} - h_{23} = 1. \end{cases} \quad \text{возьмем} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определим вектор, присоединенный к h_2,

$$(A - \lambda E)h_3 = h_2, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной цепочки выпишем общее решение

$$x(t) = C_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(2t) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ C_3 \exp(2t) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

□

Пример 2.7. *Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda - 3)^3 = 0,$$

$\lambda = 3$ кратности 3. Определим число линейно независимых собственных векторов. Решается система

$$(A - \lambda E)h = 0, \tag{2.34}$$

матрица которой

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix},$$

имеет порядок три, ее ранг равен единице, следовательно, число линейно независимых собственных векторов равно двум. Выбираем их из условия

$$h_1 + h_2 - h_3 = 0,$$

поскольку остальные уравнения системы (2.34) линейно зависимы с данным. Число линейно независимых собственных векторов определяет количество цепочек, соответствующих данному собственному числу, то есть цепочек — две, и, учитывая, что кратность собственного числа три, необходимо найти один присоединенный вектор. Отметим, однако, что нужно одновременно определить, какому из собственных векторов он соответствует. Тем самым, необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (A - \lambda E)h^{(1)} = 0 \\ (A - \lambda E)p^{(1)} = h^{(1)} \end{cases}.$$

В данном случае конкретный вид системы следующий:

$$\begin{cases} h_1^{(1)} + h_2^{(1)} - h_3^{(1)} = 0 \\ 2p_1^{(1)} + 2p_2^{(1)} - 2p_3^{(1)} = h_1^{(1)} \\ p_1^{(1)} + p_2^{(1)} - p_3^{(1)} = h_2^{(1)} \\ 3p_1^{(1)} + 3p_2^{(1)} - 3p_3^{(1)} = h_3^{(1)} \end{cases}.$$

Левые части уравнений со второго по четвертое пропорциональны друг другу, следовательно, для правых частей выполнены равенства

$$\begin{cases} 2h_2^{(1)} = h_1^{(1)} \\ 3h_2^{(1)} = h_3^{(1)} \end{cases},$$

учитывая их, находим собственный вектор $h^{(1)} = (2, 1, 3)^T$. Для вычисления присоединенного вектора получаем одно уравнение

$$p_1^{(1)} + p_2^{(1)} - p_3^{(1)} = 1,$$

в соответствии с которым присоединенный вектор можно выбрать, например, следующим: $p^{(1)} = (0, 1, 0)^T$. Таким образом, найдена цепочка $h^{(1)} \to p^{(1)}$ длины два, остается найти вторую цепочку длины один. На ее роль подходит любой собственный вектор линейно независимый с вектором из найденной выше цепочки. Выбирая $h^{(2)} = (1, 0, 1)$, запишем общее решение системы

$$x(t) = C_1 \exp(3t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \exp(3t) \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

□

Пример 2.8. *Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3-\lambda)((1-\lambda)^2 + 9) = 0,$$

и найдем ﬀ собственные числа матрицы $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 3i$. По ним определим собственные векторы, нетрудно видеть, что $\lambda_1 = 3$ соответствует собственный вектор $h_1 = (1, 0, 0)^T$, а комплексному собственному числу $\lambda_2 = 1 + 3i$ соответствует собственный вектор $h_2 = (2 - 2i, 3 + 2i, 2 - 3i)^T$. Вещественному собственному числу соответствует решение $e^{3t}h_1$, а комплексному — решение $e^{(1+3i)t}h_2$. У комплексного решения выделим вещественную и мнимую части

$$e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 2-2i \\ 3+2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2\cos 3t + 2\sin 3t \\ 3\cos 3t - 2\sin 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 2\sin 3t - 2\cos 3t \\ 3\sin 3t + 2\cos 3t \\ 2\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix},$$

полученное разложение позволяет выписать общее решение задачи

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 2\cos 3t + 2\sin 3t \\ 3\cos 3t - 2\sin 3t \\ 2\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 2\sin 3t - 2\cos 3t \\ 3\sin 3t + 2\cos 3t \\ 2\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}.$$

$\square$

Перейдем к следующему этапу решения исходной системы (2.29) — описанию способов построения частных решений. Как и в предыдущем пункте, выделяются два способа нахождения таких решений. Первый из них — метод неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородных линейных систем

Данный метод работает только для неоднородностей вида

$$f(t) = \exp(\alpha t) P(t),$$

где $P(t) = t^m P_0 + \cdots + P_m$, $P_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 0, \ldots m)$ — векторный многочлен порядка m, считаем $P_0 \neq 0$. Как и ранее, выделим два случая — резонансный и нерезонансный.

В первом из них число α не является собственным числом. Частное решение системы (2.29) при этом отыскивается в виде

$$\tilde{x}(t) = \exp(\alpha t) Q(t),$$

где $Q(t) = t^m Q_0 + \cdots + Q_m$, $Q_j \in \mathbb{R}^n$ $(j = 0, \ldots m)$ — векторный многочлен с пока еще не определенными коэффициентами той же степени, что и $P(t)$.

В резонансном случае число α совпадает с некоторым собственным числом матрицы A, кратность которого будем считать равной k. В этой ситуации общий вид функции, в котором отыскивается решение, не меняется, меняется лишь степень векторного многочлена $Q(t) = t^{m+k} Q_0 + \cdots + Q_{m+k}$, которая оказывается равной сумме степени многочлена $P(t)$ и кратности собственного числа α. Отметим, что в данной ситуации, в отличие от линейных уравнений n-го порядка, нельзя просто умножить многочлен $Q(t)$ степени m на t^k.

Вычисление коэффициентов многочлена $Q(t)$ выполняется, как и для уравнений, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t.

Следует обратить внимание на возникающую в резонансном случае дополнительную трудность, которая состоит в том, что алгебраическая система относительно коэффициентов многочлена $Q(t)$ будет вырожденной. Рассмотрим пример, иллюстрирующий это.

Пример 2.9. *Найти общее решение линейной неоднородной системы*

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{2.35}$$

если $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \exp(t).$

Решение. Решим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая к нулю определитель

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2+\lambda-2=0,$$

найдем собственные числа матрицы A. Они оказываются равными $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$, и им соответствуют собственные векторы $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Это позволяет выписать общее решение однородной системы

$$x_{\text{од}}(t) = C_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения частного решения $\tilde{x}(t)$ неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.35) воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. В задаче (2.35) неоднородность $f(t)$ имеет вид $f(t) = \exp(\alpha t)P(t)$, где $P(t)$ – векторный многочлен нулевого порядка, а $\alpha = 1$ совпадает с собственным числом матрицы A $\lambda_2 = 1$, то есть имеем резонансный случай. В этой ситуации отыскиваем решение в виде $\tilde{x}(t) = \exp(t)Q(t)$, при этом степень векторного многочлена $Q(t)$ равна сумме степени многочлена $P(t)$ и кратности корня λ_2. Таким образом, частное решение $x_1(t)$ представляется в виде

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} \exp(t),$$

а величины a, b, c, d находятся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях t. После подстановки $\tilde{x}(t)$ в исходную систему уравнений (2.35) имеем

$$\begin{cases} a + at + b = 2at + 2b - 4ct - 4d, \\ c + ct + d = at + b - 3ct - 3d + 3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a = b - 4d, \\ a = 4c, \\ c = b - 4d + 3, \end{cases}$$

откуда $a = -4,\ c = -1$ определяются однозначно, а для нахождения b и d остается одно уравнение

$$b - 4d = -4,$$

решение которого можно выбрать, например, следующим образом:

$$b = 0,\ d = 1.$$

Общее решение задачи (2.35) в этой ситуации имеет вид

$$x_{\text{общ}}(t) = C_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(t) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \exp(t) \begin{pmatrix} -4t \\ -t+1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Пример 2.10. *Найти общее решение линейной неоднородной системы*

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{2.36}$$

если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5\sin t \end{pmatrix} \exp(t).$

Решение. Собственные числа $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ матрицы A определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

им соответствуют собственные векторы $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тем самым, общее решение однородной системы имеет вид

$$x_{\text{од}}(t) = C_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Остается найти частное решение $\tilde{x}(t)$ неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.36). Перейдем от исходной системы к системе вида

$$\dot{z} = Az + F(t), \quad \text{где} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \exp[(1+i)t], \tag{2.37}$$

для которой частное решение ищем в виде

$$z_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \exp[(1+i)t], \text{ причем } \tilde{x} = Im(z_1).$$

Подставляя z_1 в систему (2.37), определяем $a = -1+2i, b = 1+3i$,

$$z_1 = \begin{pmatrix} -1+2i \\ 1+3i \end{pmatrix} \exp[(1+i)t], \quad z_1 = \exp(t) \left\{ \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix} \right\},$$

отсюда частное решение системы (2.36) оказывается равным

$$\tilde{x}(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Поскольку общее решение системы (2.36) имеет вид $x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{од}}(t) + \tilde{x}$, имеем

$$x_{\text{общ}}(t) = C_1 \exp(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \exp(t) \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

□

Метод вариации произвольной постоянной

Второй способ получения частного решения неоднородной системы (2.29) называется метод вариации произвольной постоянной и состоит, как и для линейных уравнений первого порядка, в замене

$$x(t) = \Phi(t) z(t), \tag{2.38}$$

где $\Phi(t)$ — *матрица-функция, столбцы которой представляют собой линейно независимые решения* $\varphi_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ *однородной системы* (2.30). *Матрица* $\Phi(t)$ *называется фундаментальной матрицей системы* (2.30) и удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\Phi} = A \cdot \Phi. \tag{2.39}$$

После подстановки замены (2.38) в (2.29) имеем

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi(t)z(t)\big) = A\Phi(t)z(t) + f(t).$$

Дифференцируя выражение в левой части и учитывая соотношение (2.39), получаем

$$\Phi(t)\dot{z}(t) = f(t). \tag{2.40}$$

Учитывая, что матрица $\Phi(t)$ невырождена, нетрудно найти

$$\dot{z}(t) = \Phi(t)^{-1} f(t),$$

а затем определить

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1} f(\tau)\, d\tau,$$

что позволяет получить формулу для решения системы (2.29) с начальным условием $x(t_0) = x_0$

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau)^{-1} f(\tau)\, d\tau\right).$$

Важно отметить, что описанный способ получения решения неоднородной системы (2.29) сохраняется и в случае, если матрица A зависит от t. Требование только одно: необходимо найти набор из n линейно независимых решений $\varphi_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ однородной системы (2.30) или, иначе говоря, найти фундаментальную матрицу $\Phi(t)$.

Пример 2.11. *Найти общее решение линейной неоднородной системы*

$$\dot{x} = Ax + f(t),$$

если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^{-1/2} \\ t^{-1/2} \end{pmatrix}.$

Решение. Решим сначала однородную систему. Характеристическое уравнение ее матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ откуда } \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3.$$

Нетрудно видеть, что нулевому собственному числу соответствует собственный вектор $h_1 = (1,1)^T$, а $\lambda_2 = 3$ — собственный вектор $h_1 = (1,-2)^T$, откуда следует, что общее решение однородной системы имеет вид

$$x_{\text{од}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что неоднородность не является квазимногочленом, применим метод вариации произвольной постоянной и будем искать частное решение в виде

$$\tilde{x}(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (2.40) имеем

$$\dot{c}_1(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\dot{c}_2(t)\exp(3t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^{-1/2}\\t^{-1/2}\end{pmatrix},$$

откуда вычисляем

$$\dot{c}_1(t)=t^{-1/2},\quad \dot{c}_2(t)=0.$$

Интегрируя последние равенства, имеем

$$c_1(t)=\sqrt{t}+c_1,\quad c_2(t)=c_2.$$

Тем самым, общее решение задачи приобретает вид

$$x_{\text{общ}}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+c_2\exp(3t)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sqrt{t}\\\sqrt{t}\end{pmatrix}.$$

□

2.4. Матричная экспонента и способы ее вычисления

Определение матричной экспоненты квадратной $n\times n$ матрицы A дается обычно в виде ряда

$$e^{tA}\overset{def}{\equiv}E+tA+\frac{t^2}{2}A^2+\dots+\frac{t^n}{n!}A+\dots \tag{2.41}$$

Отметим несколько ее свойств, следующих из определения

1) $\left(e^{tA}\right)^{-1}=e^{-tA}$.

2) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)=Ae^{tA}=e^{tA}A$, т. е. e^{tA} есть решение линейной однородной системы (2.30).

3) $e^A\cdot e^B=e^{A+B}$ тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют. Следствием этого свойства является соотношение $e^{t_1A}\cdot e^{t_2A}=e^{(t_1+t_2)A}$ для любых действительных t_1, t_2.

4) Пусть T — неособая $n\times n$ матрица, тогда $e^{T^{-1}AT}=T^{-1}e^AT$.

Для вычисления матричной экспоненты матрицы A обычно находят неособое преобразование T, приводящее матрицу A к жордановой форме, и в соответствии со свойством 4 вычисление матричной экспоненты сводят к нахождению матричной экспоненты жордановой формы матрицы.

Предположим, что $T^{-1}AT=J$, где $J=\operatorname{diag}\{J_1,J_2,\dots,J_s\}$, а жорданов блок имеет вид

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_k & 1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix},\quad k=1,\dots,s.$$

Учитывая, что $e^{tJ} = \operatorname{diag}\{e^{tJ_1}, e^{tJ_2}, \ldots, e^{tJ_s}\}$, остается лишь найти матричную экспоненту от единичного блока Жордана. Соответствующая формула имеет вид

$$e^{tJ_k} = e^{\lambda_k t} \begin{pmatrix} 1 & t & \ldots\ldots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t \quad \ldots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 1 & t \\ 0 & \ldots & \ldots \; 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{2.42}$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в книге [7]. Окончательный вид матричной экспоненты оказывается следующим:

$$e^{tA} = T \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{tJ_s} \end{pmatrix} T^{-1},$$

где e^{tJ_k} $(k = 1, \ldots, s)$ определяются по формулам (2.42).

Опишем несколько иной способ нахождения матричной экспоненты, основанный на свойстве 2. Найдем общее решение системы (2.30) и составим из полученных n линейно независимых решений фундаментальную матрицу $\Phi(t)$. Учитывая, что для любой невырожденной матрицы B выражение $\Phi(t)B$ также является фундаментальной матрицей, выберем B так, чтобы эта матрица обращалась в единичную при $t = 0$. Из условия $\Phi(0)B = E$ имеем $B = \Phi(0)^{-1}$. Тем самым, матрица $\Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}$ является фундаментальной и обращается в единичную матрицу в нуле. Тогда, в силу непосредственно следующего из определения матричной экспоненты условия $e^{0 \cdot A} = E$ и теоремы существования и единственности, имеем в случае постоянной матрицы A

$$e^{tA} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}.$$

Данный способ нахождения матричной экспоненты позволяет немного упростить процесс ее вычисления, особенно в случае комплексных собственных чисел матрицы A.

Пример 2.12. *Построить матричную экспоненту матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.43}$$

Определим собственные числа и собственные векторы матрицы A. Характеристический многочлен $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поскольку они комплексно сопряженные, достаточно будет определить один собственный вектор (второй будет комплексно сопряженным). Для $\lambda = i$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2-i & 1 \\ -5 & -2-i \end{pmatrix} h = 0, \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix}.$$

Так как $\exp(it)\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\cos t - \sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$,
то общее решение системы (2.43)

$$x(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -2\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

Возьмем $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -2\cos t - \sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$, тогда $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,
$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и из равенства $e^{tA} = X(t)X^{-1}(0)$, имеем

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & \sin t \\ -5\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

□

Пример 2.13. *Построить матричную экспоненту матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матричная экспонента для матрицы tA определяется разложением вида (2.41). Поскольку $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, имеем

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!}A = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}.$$

□

2.5. Варианты контрольной работы № 2

Вариант № 1

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + y = \exp(-x) + 1$.
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' + y' = x + \exp(-x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} + x = \dfrac{4t^2 - 1}{2t\sqrt{t}}$.
4. Найти общее решение $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ при условии, что $y_1 = \exp(mx)$.

Вариант № 2

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 17y = \exp(-x)(1 + \sin 4x)$.
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' = x + x\exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $y'' - y = \dfrac{4x^2 + 1}{2x\sqrt{x}}$.
4. Найти общее решение $(2x^2 + 3x)y'' - 6(x+1)y' + 6y = 6$ при условии, что y_1 — многочлен.

Вариант № 3

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 10y = x\exp(-x)\sin 3x$.
2. Найти общее решение $y''' + 8y = x + x\exp(-2x)$.

3. Найти общее решение $y'' + y = \dfrac{x^2 \ln x - 1}{x^2}$.

4. Найти общее решение $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$ при условии, что $y_1 = \sin x$.

Вариант № 4

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 5y = (x+1)\exp(-2x)\sin x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} + 4y'' = x + \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} - x = \dfrac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}$.
4. Найти общее решение $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ при условии, что $y_1 = x$.

Вариант № 5

1. Найти общее решение $y'' + 4y' + 13y = \exp(-2x) + \sin 3x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} - 4y'' = x + \exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \dfrac{t^2 - 2t + 2}{t^3}$.
4. Найти общее решение $(x^2+1)y'' + xy' - y + 1 = 0$ при условии, что $y_1 = x$.

Вариант № 6

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 17y = \exp(-x) + \sin 4x$.
2. Найти общее решение $y''' + 2y'' = (x+1)\exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \dfrac{t^2 - 2t + 2}{t^3}$.
4. Найти общее решение $y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0$ при условии, что $y_1 = \cos(\sin x)$.

Вариант № 7

1. Найти общее решение $\ddot{x} + 4\dot{x} + 13x = t\exp(-2t)\sin 3t$.
2. Найти общее решение $y''' - 8y = x + (x+1)\exp(2x)$.
3. Найти общее решение $y'' - 2y' + y = \dfrac{\exp(x)}{x}$.
4. Найти общее решение $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2\exp(x)$ при условии, что $y_1 = \exp(x)$.

Вариант № 8

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 5y = (x+1)\exp(-x)\sin x$.
2. Найти общее решение $y^{IV} - 4y'' = x + \exp(2x)$.
3. Найти общее решение $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \dfrac{4t^2 - 4t - 1}{4t\sqrt{t}}$.
4. Найти общее решение $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$ при условии, что $y_1 = 1/x$.

Вариант № 9

1. Найти общее решение $y'' - 2y' + y = (x+2)\exp(x) + 1$.
2. Найти общее решение $y''' + y' = x\sin x$.
3. Найти общее решение $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.
4. Найти общее решение $y'' - y'\operatorname{tg} x + 2y = 0$ при условии, что $y_1 = \sin x$.

Вариант № 10

1. Найти общее решение $y'' + 2y' - 3y = (x+1)(\exp(x)+1)$.
2. Найти общее решение $y''' + 4y'' = x + x\exp(-2x)$.
3. Найти общее решение $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$.
4. Найти общее решение $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0$ при условии, что $y_1 = \exp(mx^2)$.

Вариант № 11

1. Найти общее решение $y'' + 2y' + 10y = \exp(x)\sin 3x$.
2. Найти общее решение $y''' - 8y = x(1 + \exp(-2x))$.

3. Найти общее решение $y'' + y = \dfrac{2 + x^2}{x^3}$.

4. Найти общее решение $y'' + y' + \exp(-2x)y = \exp(-3x)$ при условии, что $y_1 = \cos(\exp(-x))$.

Вариант № 12

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 5y = (x + 1)\sin x$.

2. Найти общее решение $y^{IV} + 4y'' = (x + 1)\exp(-2x)$.

3. Найти общее решение $x^2y'' - xy' - 3y = \dfrac{1}{x}$.

4. Найти общее решение $2x(x + 2)y'' + (2 - x)y' + y = 0$ при условии, что y_1 — многочлен.

2.6. Варианты контрольной работы № 3

Вариант № 1

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \exp(-t)$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 2

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 3

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \exp(-t)$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант № 4

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 5

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\begin{cases} x' = 2x - 2y + \exp(t), \\ y' = -x + y. \end{cases}$

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Вариант № 6

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{t+1}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Вариант № 7

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2\exp(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант № 8

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант № 9

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \exp(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Вариант № 10

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Вариант № 11

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8t \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Вариант № 12

1. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найти общее решение системы $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(2t)$.

4. Построить матричную экспоненту матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений

В этом разделе рассмотрим методы исследования устойчивости решений системы

$$\dot{x} = F(t,x), \tag{3.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, F(t,x) = \begin{pmatrix} F_1(t,x_1,...,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_n(t,x_1,...,x_n) \end{pmatrix}$ — *непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция векторного аргумента, для которой в некоторой области начальных условий выполнена теорема существования и единственности так, что решение единственным образом продолжается по t до бесконечности.*

Будем называть выделенное предложение условием 1. Оно позволяет ввести понятие устойчивости решения $\varphi^*(t)$ системы (3.1).

Определение 3.1. *Решение* $\varphi^*(t)$ *системы* (3.1) *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для любых решений* (3.1) *с начальными условиями* $||x(t_0) - \varphi^*(t_0)|| < \delta$ *выполнено* $||x(t) - \varphi^*(t)|| < \varepsilon$ *для всех* $t > t_0$.

Определение 3.2. *Решение* $\varphi^*(t)$ *системы* (3.1) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует* $r > 0$ *такое, что для всех решений системы* (3.1) *с начальными условиями* $||x(t_0) - \varphi^*(t_0)|| < \delta$ *выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty} ||x(t) - \varphi^*(t)|| = 0.$$

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения линейной системы.

Пример 3.1. *Исходя из определений 3.1, 3.2 доказать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x. \tag{3.2}$$

Решение. Способы нахождения общего решения задачи (3.2) описаны в предыдущей главе. В соответствии с ними найдем сначала собственные числа и собственные векторы матрицы системы. Характеристическое уравнение этой матрицы имеет вид $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, откуда $\lambda = -2$ кратности 2. Для определения собственных векторов имеем $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$, что дает $h_1 = -h_2 = 1$, то есть $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найдем теперь присоединенный вектор $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, откуда $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Зная собственный и присоединенный векторы, легко выписать общее решение

$$x(t) = C_1 \exp(-2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \exp(-2t) \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

В нулевой момент времени имеем $x(0) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix}$. Для определенности будем считать норму в определении 3.1 евклидовой, тогда $||x(0)|| = \sqrt{(C_1 + C_2)^2 + C_1^2}$. Учитывая, что $||x(0)|| < \delta$, имеем

$$|C_1| < \delta \text{ и } |C_2| = |C_2 + C_1 - C_1| < |C_1 + C_2| + |C_1| < 2\delta. \tag{3.4}$$

Оценим теперь норму решения для $t > 0$

$$||x(t)|| = \exp(-2t)\sqrt{(C_1 + C_2(t+1))^2 + (C_1 + C_2 t)^2}.$$

Оценка подкоренного выражения с помощью неравенств (3.4) дает

$$(C_1 + C_2(t+1))^2 + (C_1 + C_2 t)^2 = (C_1 + C_2)^2 + C_1^2 + (4C_1C_2 + C_2^2)t + C_2^2 t^2 <$$

$$< (C_1 + C_2)^2 + 2|C_1 + C_2|C_2 t + C_1^2 + 2|C_1||C_2|t + C_2^2 t^2 < \delta^2(2 + 8t + 4t^2).$$

Дадим еще более грубую оценку, чтобы извлечь корень, получаем

$$||x(t)|| < \exp(-2t)\delta(2t+1).$$

Выделим в правой части неравенства функцию $\varphi(t) = \exp(-t)(2t+1)$, которая в нуле равна единице, а при $t \to +\infty$ стремится к нулю. Вычисляя производную этой функции $\dot{\varphi}(t) = (-2t+1)\exp(-t)$, находим точку локального максимума $t = 0.5$. Значение в этой точке $\varphi(0.5) = 2e^{-1/2}$ ограничивает функцию $\varphi(t)$ сверху при $t > 0$. Заведомо огрубляя оценку, считаем $\varphi(t) < 2$, отсюда

$$||x(t)|| < \delta\exp(-t)\varphi(t) < 2\delta\exp(-t).$$

Выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$, тогда из получившегося неравенства для всех $t > 0$ $||x(t)|| < \varepsilon$, что позволяет завершить обоснование устойчивости.

Для доказательства асимптотической устойчивости в предыдущих рассуждениях заменим δ на r, тогда при $||x(0)|| < r$, получаем неравенство $||x(t)|| < 2r\exp(-t)$, из которого при $t \to +\infty$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} ||x(t)|| = 0$. □

Приведенный пример показывает, что доказательство устойчивости непосредственно по определению — дело достаточно хлопотное. В то же время из вида решения (3.3) вполне понятно, что оно должно стремиться к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, весьма насущной и активно применяемой является следующая теорема, лежащая в основе так называемого первого метода Ляпунова.

3.1. Первый метод Ляпунова

Вернемся к системе (3.1), будем считать, что она имеет решение $\varphi^*(t)$ и выполнено сформулированное в начале раздела условие 1 о существовании и единственности решений и их продолжимости по t до $+\infty$. Выполним в (3.1) замену $x = \varphi^*(t) + u$ и выделим в функции правой части нулевой и первый по u члены в разложении в ряд Тейлора в нуле

$$\dot{\varphi}^*(t) + \dot{u} = F(t, \varphi^* + u) \equiv F(t, \varphi^*) + \left.\frac{DF}{Dx}\right|_{x=\varphi^*} \cdot u + F_2(t, u).$$

Здесь

$$\left.\frac{DF}{Dx}\right|_{x=\varphi^*} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=\varphi^*}$$

— матрица Якоби вектор-функции F, а $F_2(t,u)$ — остаток. Поскольку $\varphi^*(t)$ — решение системы (3.1), имеем

$$\dot{u} = \left.\frac{DF}{Dx}\right|_{x=\varphi^*} \cdot u + F_2(t,u). \tag{3.5}$$

Учитывая, что устойчивость нулевого решения (3.5) эквивалентна устойчивости решения $\varphi^*(t)$ системы (3.4), сформулируем теорему Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Теорема 3.1 (Об устойчивости по первому приближению). *Предположим, что*

1) *матрица* $A = \left.\dfrac{DF}{Dx}\right|_{x=\varphi^*}$ *— постоянная;*

2) *для нелинейности равномерно по* $t > 0$ *выполнена оценка* $||F_2(t,u)|| \leqslant C||u||^2$, *где* C *— некоторая константа.*

Тогда нулевое решение системы (3.5) *асимптотически устойчиво (неустойчиво), если собственные числа матрицы* A *лежат в левой комплексной полуплоскости (хотя бы одно справа).*

Замечание 3.1. *Условия 1, 2 теоремы 3.1 автоматически выполнены для автономных систем (правая часть* (3.5) *не зависит от* t *).*

Пример 3.2. *При каких значениях параметра* a *асимптотически устойчиво нулевое решение системы:*

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2, \\ y' = x + y + xy. \end{cases}$$

Решение. Поскольку для нелинейных членов $\psi_1(t,x,y) = x^2, \psi_2(t,x,y) = xy$ справедливы оценки $\|\psi_1\| \leqslant ||z||^2, \|\psi_2\| \leqslant ||z||^2$, где $||z|| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$, то будем исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы

$$\begin{cases} x' = ax - 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Запишем характеристический многочлен соответствующей матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 + (-a-1)\lambda + a + 2 = 0.$$

Для асимптотической устойчивости квадратного трехчлена необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты были положительны. Отсюда получаем $-a-1 > 0$ и $a + 2 > 0$ или окончательно $-2 < a < -1$. □

Устойчивость многочленов

Применение первого метода Ляпунова так или иначе приводит к анализу расположения корней некоторых многочленов. Вычисление корней представляет собой достаточно сложную задачу, поэтому появилась необходимость в критериях устойчивости, с помощью которых о расположении корней можно судить по коэффициентам многочлена. *Многочлен*

$$l(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n, \tag{3.6}$$

будем называть устойчивым, если все его корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

Критерий Рауса–Гурвица ставит устойчивость многочлена в зависимость от положительной определенности некоторой матрицы. Введем в рассмотрение матрицу Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{k+1} & a_k & a_{k-1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Матрица Гурвица составляется по следующему правилу. По главной диагонали выписываются коэффициенты многочлена (3.6), начиная с a_1 и заканчивая a_n. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент a_0. Все остальные элементы матрицы a_i, отвечающие коэффициентам с индексами $i > n$ или $i < 0$, полагаются равными нулю.

Теорема 3.2 (Критерий Рауса–Гурвица). *Пусть $a_0 > 0$, многочлен $l(\lambda)$ устойчив тогда и только тогда, когда матрица Гурвица положительно определена.*

Отметим, что положительную определенность матрицы удобно проверять с помощью критерия Сильвестра, согласно которому необходимым и достаточным является условие положительности всех ее главных диагональных миноров.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид

$$\triangle_1 = a_1 > 0,\ \triangle_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ \ldots,\ \triangle_n = a_n \cdot \triangle_{n-1} > 0. \tag{3.8}$$

В случае, если дополнительно известно, что все $a_j > 0$ (это условие является необходимым, но не достаточным), можно воспользоваться критерием Льенара–Шипара.

Критерий Льенара–Шипара. *Для устойчивости многочлена $l(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и чтобы $\triangle_{n-1} > 0,\ \triangle_{n-3} > 0,\ \triangle_{n-5} > 0, ...,$ где $\triangle_i$ те же, что в* (3.8).

Данные условия равносильны условиям Рауса–Гурвица.

Пример 3.3. *При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + a\lambda + b$?*

Решение.

Многочлен устойчив, если его корни лежат в левой комплексной полуплоскости, то есть $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) < 0$. Запишем условия Льенара–Шипара: $a > 0,\ b > 0$,
$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$, $\triangle_3 = a - b - a^2 > 0$, откуда следует, что $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < a - a^2 \end{cases}$.
Полученная область изображена на рис. 2.

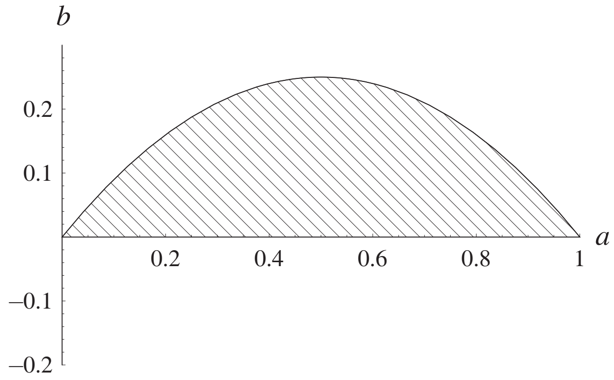

Рис. 2.

□

В некоторых случаях для проверки устойчивости многочленов можно пользоваться частотным критерием Михайлова. Его формулировка выглядит следующим образом.

Критерий Михайлова. *Для устойчивости многочлена $l(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и чтобы корни многочленов*

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - ...,$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - ...$$

были вещественными, положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1, то есть

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < ...$$

Пример 3.4. *Исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь критерием Михайлова*

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0. \tag{3.9}$$

Решение. Составим характеристический многочлен уравнения (3.9) $l(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3$. В нашем случае $a_n = a_3 = 3 > 0$, $a_{n-1} = a_2 = 2 > 0$, многочлены $p(\xi) = 3 - 2\xi$, $q(\eta) = 2 - \eta$ имеют корни $\xi^* = 3/2$, $\eta^* = 2$. Значит, $0 < \xi^* < \eta^*$, по критерию Михайлова все корни многочлена $l(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части и нулевое решение уравнения (3.9) асимптотически устойчиво. □

3.2. Метод функций Ляпунова

Нетрудно видеть, что первый метод Ляпунова не работает, если, с одной стороны, не выполнены условия 1, 2 и, с другой — часть собственных чисел матрицы A лежит на мнимой оси, в то время как все остальные — в левой комплексной полуплоскости. Этих недостатков лишен второй метод Ляпунова. Учитывая, что задачу об устойчивости решения $\varphi^*(t)$ системы (3.1) можно путем сдвига на это решение заменить задачей об устойчивости нуля, будем считать, что в (3.1) $F(t,0) \equiv 0$. И ниже изучим вопрос об устойчивости нулевого решения (3.1).

Для формулировки второго метода введем понятие функции Ляпунова. *Под функцией Ляпунова будем понимать непрерывно дифференцируемую по совокупности переменных в некоторой окрестности точки нуль функцию $V(x)$, которая положительно определена в этой области, то есть $V(x)$ неотрицательна и обращается в ноль тогда и только тогда, когда $x = 0$.* Определим, кроме того, *производную функции $V(x)$ в силу системы* (3.1)

$$W(t,x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot F_k(t,x). \tag{3.10}$$

Выполнены следующие две теоремы об устойчивости, составляющие основу второго метода Ляпунова.

Теорема 3.3 (Об устойчивости). *Пусть $V(x)$ — положительно определенная в нуле непрерывно дифференцируемая функция, пусть ее производная в силу системы* (3.1) *неположительна*

$$W(t,x) \leqslant 0$$

в некоторой окрестности нулевого решения системы (3.1)*. Тогда это решение устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 3.4 (Об асимптотической устойчивости). *Пусть выполнены условия теоремы 3.3 и, кроме того, существует такая положительно определенная функция $W^*(x)$, что*

$$W(t,x) \leqslant -W^*(x) \tag{3.11}$$

в некоторой окрестности точки ноль, тогда нулевое решение системы (3.1) *асимптотически устойчиво.*

Прежде чем перейти к примерам, опишем способ выбора функции Ляпунова для линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \tag{3.12}$$

в случае, когда ее нулевое решение заведомо асимптотически устойчиво, т. е. при условии, что собственные числа матрицы A лежат в левой комплексной полуплоскости.

Будем предполагать, что собственные числа матрицы A простые или им соответствует столько собственных векторов, какова их кратность. Построим неособое преобразование T, состоящее из собственных векторов матрицы A, а в случае комплексно сопряженных собственных чисел – из вещественных и мнимых частей одного из комплексно сопряженных собственных векторов. В этом случае матрица

$J = T^{-1}AT$, либо имеет диагональный вид с вещественными собственными числами на главной диагонали, либо для комплексных собственных чисел $\tau \pm \omega$ имеет блочно-диагональный вид с 2×2 блоками вида

$$\begin{pmatrix} \tau & \omega \\ -\omega & \tau \end{pmatrix}.$$

Выполним в (3.12) замену $x = Tz$, тогда для новых переменных имеем

$$\dot{z} = Jz, \tag{3.13}$$

где J — жорданова форма матрицы A. Построение функции Ляпунова для задачи (3.13) тривиально, поскольку функция

$$V(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2 \equiv (z, z),$$

очевидным образом, подходит для исследования устойчивости этой системы. Производная $V(z)$ в силу системы (3.13) (см. формулу (3.10)) имеет вид

$$W(z) = 2z_1\dot{z}_1 + \cdots + 2z_n\dot{z}_n = 2\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\,(\lambda_j) z_j^2$$

и отрицательно определена в силу отрицательности вещественных частей собственных чисел матрицы A.

Возвращаясь к исходным переменным, нетрудно получить функцию Ляпунова и для системы (3.12)

$$V(x) = \bigl(T^{-1}x, T^{-1}x\bigr). \tag{3.14}$$

Рассмотрим два примера построения функции Ляпунова для линейных систем.

Пример 3.5. *Построить функцию Ляпунова для системы*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x. \tag{3.15}$$

Решение. Для определения собственных чисел матрицы системы выпишем ее характеристический многочлен $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Корни многочлена комплексны и имеют вид $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Собственный вектор матрицы системы, соответствующий собственному числу $\lambda = -1 + 2i$, оказывается равен $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$. Выделяя вещественную и мнимую части полученного вектора, можно сформировать матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, нетрудно видеть, матрица T является обратной к самой себе, то есть $T^{-1} = T$. Это позволяет отыскивать функцию Ляпунова в виде

$$V(x) = \bigl(T^{-1}x, T^{-1}x\bigr) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

Вычислим теперь производную полученной функции Ляпунова в силу системы (3.15)

$$W(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2).$$

Подстановка $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ из правых частей (3.15) и простые преобразования дают

$$W(x) = -2x_1^2 - 2(x_1 + x_2)^2.$$

Условие (3.11) отрицательной определенности функции $W(x)$ выполняется в данном случае очевидным образом, что влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.15). □

Пример 3.6. *Построить функцию Ляпунова для системы*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x. \tag{3.16}$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы системы (3.16) имеет вид $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, его корни оказываются равными $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Собственные векторы, соответствующие этим собственным числам, имеют вид $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ соответственно. Составим матрицу преобразования T из данных векторов $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ и найдем к ней обратную $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Зная T^{-1}, нетрудно найти функцию Ляпунова

$$V(x) = \left(T^{-1}x, T^{-1}x\right) = \left(\begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1+x_2)^2+(3x_1+2x_2)^2.$$

Вычисление производной функции Ляпунова в силу системы (3.16) приводит к равенствам

$$W(x) = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2(3x_1 + 2x_2)(3\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2),$$

или после преобразований

$$W(x) = -2(x_1 + x_2)^2 - 4(3x_1 + 2x_2)^2.$$

Полученная функция $W(x)$ отрицательно определена, что влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (3.16). □

Рассмотрим теперь пример построения функции Ляпунова для нелинейной системы. Естественно, наибольший интерес вызывают задачи, для которых не работает первый метод Ляпунова.

Пример 3.7. *Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - (x + y)^3, \\ \dot{y} = x + y - (x + 2y)^3. \end{cases}$$

Решение. Выделяя в системе линейную часть и вычисляя собственные числа матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем $\lambda_{1,2} = \pm i$, что означает неприменимость теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Выберем функцию Ляпунова так, чтобы избавиться от слагаемых линейной части, возьмем для этого положительно определенную функцию $V(x,y) = (x+y)^2 + y^2$. Ее производная в силу системы оказывается равной

$$W(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2(x+y)\big(-x-2y-(x+y)^3\big) + \\ + 2(x+2y)\big(x+y-(x+2y)^3\big).$$

После преобразований имеем

$$W(x,y) = -2(x+y)^4 - 2(x+2y)^4.$$

Таким образом, $V(x,y)$ положительно, а $W(x,y)$ отрицательно определены, что позволяет говорить об асимптотической устойчивости нулевого решения исследуемой системы. □

Среди критериев неустойчивости выделим теорему Четаева [11] в одном из простейших вариантов (см. книгу [8]). Ниже будем обозначать $\omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \delta\}$ δ-окрестности начала координат.

Теорема 3.5 (Н. Г. Четаев). *Пусть в некоторой окрестности точки ноль имеется непрерывно дифференцируемая функция $v(x)$ такая, что*

1) *в любой δ-окрестности ω_δ нуля существует точка x такая, что $v(x) > 0$, а значит, существует $\alpha > 0$ и подобласть данной окрестности, в которой $v(x) > \alpha$;*

2) *для любого $\alpha > 0$ существует $\beta > 0$ такое, что из условия $x \in \omega_\varepsilon$ и $v(x) > 0$ следует неравенство $w(t,x) \geqslant \alpha$, справедливое для всех $t > 0$.*

Тогда нулевое решение системы (3.1) *неустойчиво.*

В книге [2] предложен вариант теоремы Четаева, проверка условий которой осуществляется чуть проще, чем условия теоремы 3.5.

Теорема 3.6 (Н. Г. Четаев). *Пусть в некоторой области $D \in \mathbb{R}^n$ определена и непрерывно дифференцируема функция $v(x)$ так, что*

1) *точка ноль принадлежит границе области D;*

2) *существует такое ε, что все точки $x \in \omega_\varepsilon$ такие, что $v(x) = 0$ принадлежат границе области D;*

3) *в области D $v(x) > 0$, и производная в силу системы* (3.1) *$w(x) > 0$ для всех $t > 0$.*

Тогда нулевое решение системы (3.1) *неустойчиво.*

Пример 3.8. *Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова*

$$\begin{cases} x' = x^5 + y^3, \\ y' = x^3 + y^5. \end{cases}$$

Решение. Возьмем функцию $v(x,y) = x^4 - y^4$, тогда

$$w(x,y) = 4x^3(x^5 + y^3) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^8 - y^8).$$

Проверим условия теоремы Четаева. Очевидно, что $v(x,y) > 0$ при $|x| > |y|$. Выбирая в качестве области D любой из секторов, в котором $v(x,y) \geqslant 0$, убеждаемся, что в этой области $v(x,y) > 0$ одновременно с $w(x,y) > 0$. Следовательно, нулевое решение задачи неустойчиво.

□

3.3. Построение фазового портрета системы на плоскости

Рассмотрим задачу построения траектории двумерной линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Фазовой плоскостью системы (3.17) *будем называть плоскость* (x_1, x_2), *а траекториями на ней — кривые, параметрически заданные ее решением* $(x_1(t), x_2(t))^T$. Алгоритм получения решения системы (3.17) изложен в предыдущей главе, построение решения в этой ситуации зависит от собственных чисел и собственных векторов матрицы системы. Классификацию фазовых портретов системы (3.17) выполним в зависимости от собственных чисел матрицы A.

I. Пусть λ_1, λ_2 — вещественные, различные, ненулевые собственные числа матрицы A. В этом случае общее решение системы (3.17) имеет вид

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) h_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) h_2,$$

где h_1, h_2 — собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1, λ_2. Величины

$$\xi_1 = C_1 \exp(\lambda_1 t), \text{ и } \xi_2 = C_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{3.18}$$

представляют собой координаты точки траектории в базисе h_1, h_2. С помощью соотношений (3.18) выразим ξ_1 через ξ_2:
$\xi_1^{\lambda_2} = C_1^{\lambda_2} \exp(\lambda_1 \lambda_2 t), \quad \xi_2^{\lambda_1} = C_2^{\lambda_1} \exp(\lambda_1 \lambda_2 t)$

$$|\xi_2| = C|\xi_1|^{\lambda_2/\lambda_1}, \tag{3.19}$$

где $C = \left(\dfrac{|C_2|^{\lambda_1}}{|C_1|^{\lambda_2}}\right)^{1/\lambda_1}$ В зависимости от знака показателя степени, формулы (3.19) дают кривые параболического или гиперболического типа.

1) Пусть $\lambda_2/\lambda_1 > 0$, тогда *фазовый портрет системы* (3.17) *называется узлом.* Будем выделять два подслучая:

1.а) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ — неустойчивый узел;

1.б) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ — устойчивый узел.

Отметим еще, что при $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$ фазовые траектории касаются прямой, соответствующей собственному направлению h_1, а при $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| > 1$ — направлению h_2.

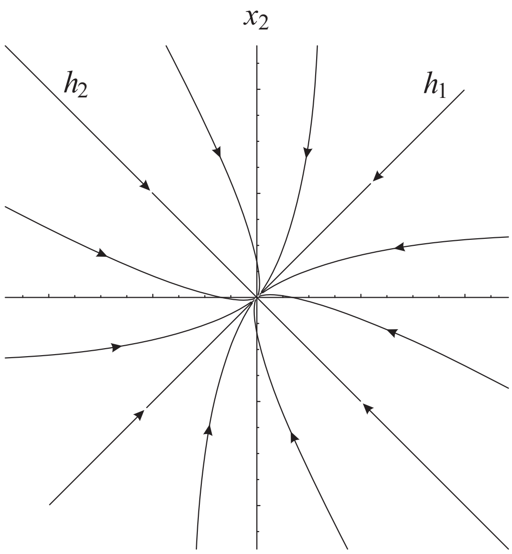

Рис. 3.

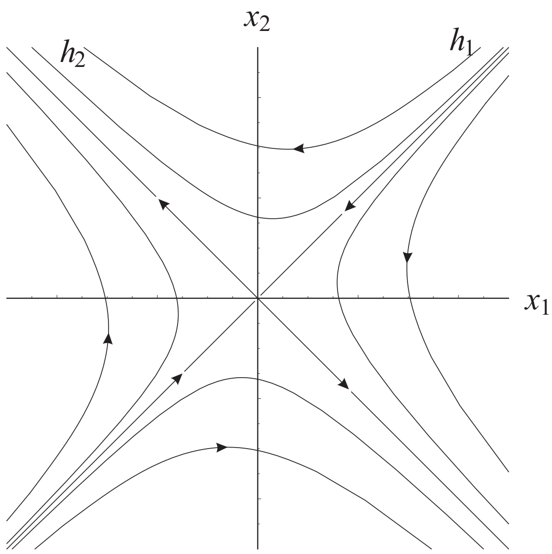

Рис. 4.

На рисунке 3 представлен устойчивый узел в случае $\lambda_2/\lambda_1 > 1$.

2) *Пусть* $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, *тогда формулой* (3.19) *определяются кривые типа гипербол. Фазовый портрет системы* (3.17) *называется в этом случае седло.* На рисунке 4 представлен схематический вид седлового состояния равновесия на плоскости.

II. Пусть теперь собственные числа матрицы A комплексно сопряжены, то есть $\lambda = \tau \pm i\omega$. Решение системы (3.17) строится в этом случае следующим образом: вычисляется собственный вектор $h = u + iv$, соответствующий собственному числу $\tau + i\omega$, затем у комплексного решения $(u+iv)\exp[(\tau+i\omega)t]$ выделяются вещественная и мнимая части и общее решение выписывается в виде

$$x = C_1 \exp(\tau t)(u \cos \omega t - v \sin \omega t) + C_2 \exp(\tau t)(u \sin \omega t + v \cos \omega t). \tag{3.20}$$

Собирая коэффициенты при векторах u и v и заменяя
$\rho = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\gamma = \mathrm{arctg}(C_2/C_1)$ преобразуем (3.20) к виду

$$x = \rho \exp(\tau t)[u \cos(\omega t - \gamma) - v \sin(\omega t - \gamma)]. \tag{3.21}$$

Выделим два подслучая

1. $\tau = 0$. *Фазовый портрет* в этом случае *называется центр.*

Формула (3.21) дает замкнутые кривые в силу $2\pi/\omega$ — периодичности решений. Эти замкнутые кривые представляют собой концентрические эллипсы с главными осями u и v (покажите!). Величина ρ определяет размах колебаний, ее изменение приводит к переходу с одного эллипса на другой, изменение же параметра γ приводит лишь к сдвигу изображаемой точки в пределах одной и той же траектории. На рисунке 5 изображен пример фазового портрета типа центр. Для определения направления вращения выбирается какая-либо точка на фазовой плоскости, например, $(1,0)^T$, тогда направление движения в этой точке вычисляется из (3.17) по формуле

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

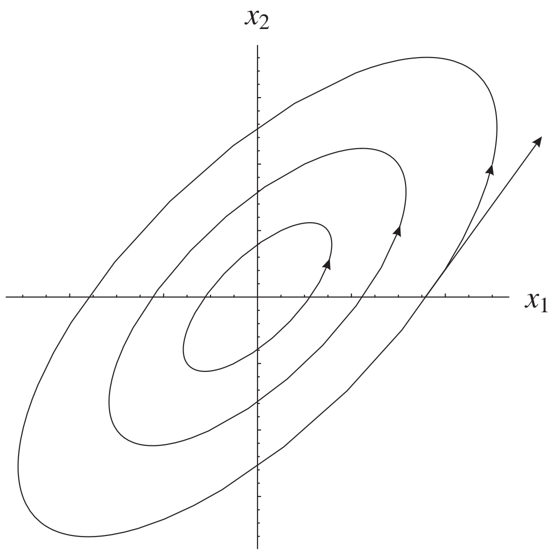

Рис. 5.

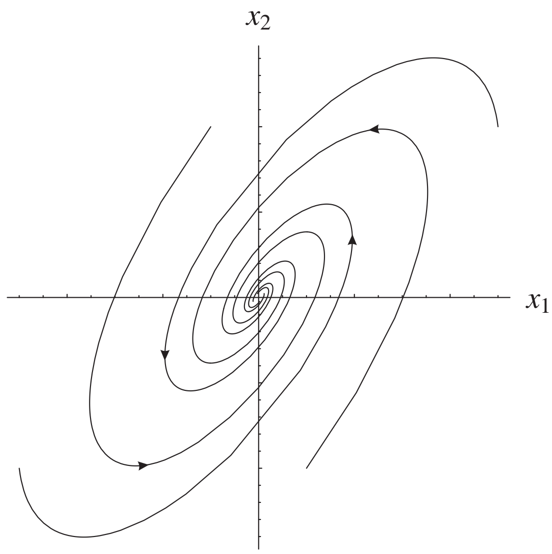

Рис. 6.

2. Перейдем к ситуации, когда $\tau \neq 0$. *Фазовый портрет в этом случае называется фокусом.* Амплитуда колебаний, имеющая вид $\rho \exp(\tau t)$, растет, если $\tau > 0$, и убывает, если $\tau < 0$. В первом из этих случаев фокус называется неустойчивым, а во втором — устойчивым. На рисунке 6 представлен пример устойчивого фокуса. Направление вращения определяется здесь так же, как и для состояния равновесия центр.

Отдельно рассмотрим случай, когда одно из собственных чисел равно нулю (вырожденный узел), и случай вещественных кратных корней.

А) Пусть $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$, тогда решение системы (3.17) имеет, в силу (1.a), вид

$$x(t) = C_1 h_1 + C_2 \exp(\lambda_2 t) h_2.$$

Легко видеть, что при $C_2 = 0 \quad x(t)$ — величина постоянная и вся прямая $C_1 h_1$ заполнена состоянием равновесия. Остальные траектории представляют собой параллельные прямые, движение вдоль которых происходит к некоторой точке на прямой $C_1 h_1$ при $\lambda_2 < 0$ и от этой прямой при $\lambda_2 > 0$. На рисунке 7 изображен этот фазовый портрет при $\lambda_2 < 0$.

Б) Пусть теперь $\lambda_{1,2} = 0$, тогда необходимо рассмотреть два подслучая.

Первый из них возникает, если имеется два линейно независимых собственных вектора, соответствующих собственному числу λ. Данный случай реализуется только при $A = 0$ — это означает, что все точки плоскости являются невырожденными точками для системы (3.17).

Второй подслучай реализуется, если имеется цепочка из собственного вектора h и присоединенного вектора. Решение системы (3.17) при этом имеет вид

$$x(t) = C_1 h + C_2(th + p). \tag{3.22}$$

Из получившегося соотношения видно, что при $C_2 = 0$ имеем однопараметрическое множество неподвижных точек, заполняющее направление $C_1 h$, а при $C_2 \neq 0$ фазовый портрет системы представляет собой множество параллельных прямых, направление движений на которых определяется по тому же правилу, что и направление вращения для фокуса или центра.

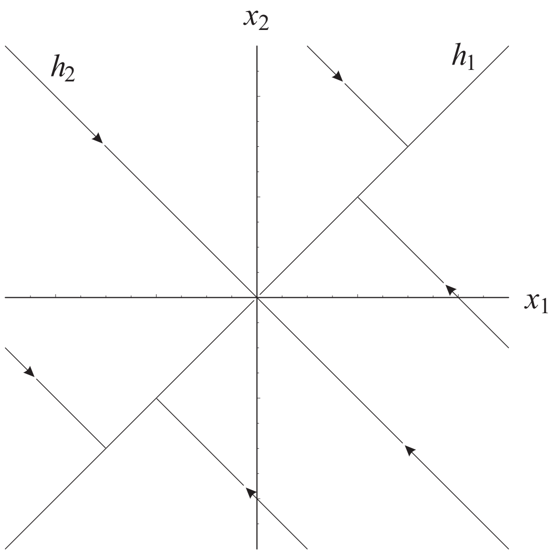

Рис. 7.

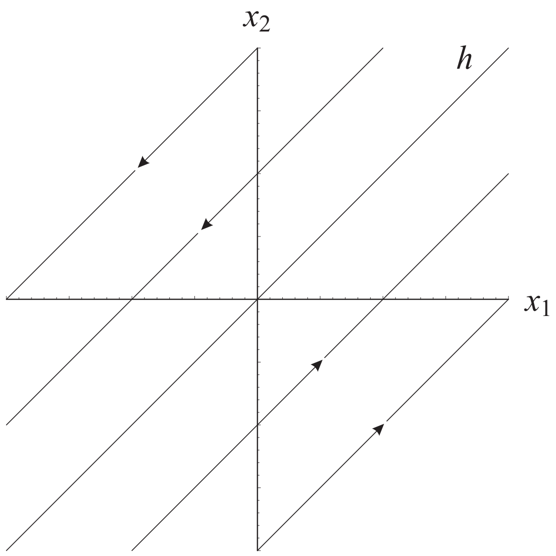

Рис. 8.

Последним рассмотрим случай узла с кратными корнями. Как и для нулевого собственного числа, следует рассмотреть две ситуации. Обозначим λ — корень кратности 2 матрицы A.

Пусть сначала h_1 и h_2 — линейно независимые собственные векторы, тогда $x(t) = (C_1 h_1 + C_2 h_2)\exp(\lambda t)$, то есть любая прямая, проходящая через ноль, является собственным направлением. Схематический вид данного фазового портрета изображен на рисунке 9 при $\lambda < 0$.

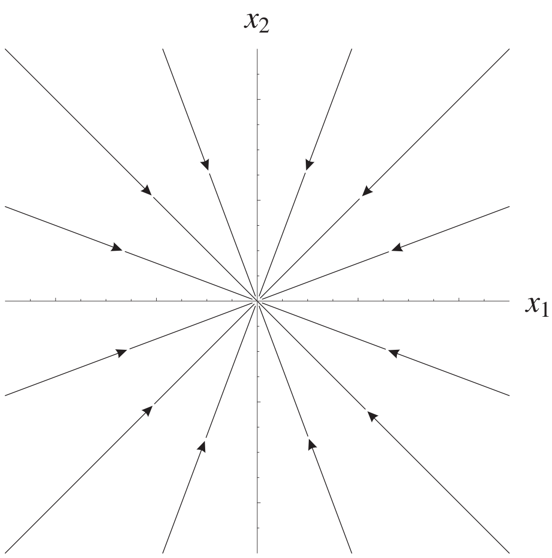

Рис. 9.

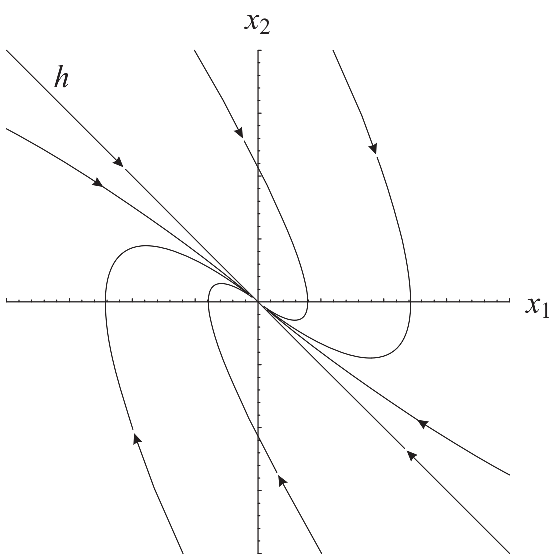

Рис. 10.

Пусть теперь собственному числу λ кратности 2 соответствуют собственный h и присоединенный p векторы, тогда решение линейной системы (3.17) имеет вид

$$x(t) = \exp(\lambda t)(C_1 h + C_2(th + p)).$$

Фазовый портрет в данном случае приведен на рисунке 10 в предположениях, что $\lambda < 0$.

Для того чтобы выяснить, по какую сторону относительно точки ноль траектории касаются собственного направления, удобно найти в какой-либо точке, не лежащей на этой прямой, вектор направления движения.

Пример 3.9. *Определить характер точки покоя системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases} \tag{3.23}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 + 6\lambda + 7 = 0$. Его корни $\lambda_1 = -3 - \sqrt{2} < 0$, $\lambda_2 = -3 + \sqrt{2} < 0$ вещественные, различные и отрицательные (одного знака). Следовательно, точка покоя $(0, 0)$ системы (3.23) — устойчивый узел. □

Пример 3.10. *Найти и исследовать особые точки системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases} \tag{3.24}$$

Решение. Приравнивая к нулю правые части системы (3.24), находим неподвижные точки $(-1, -1)^T; (1, 1)^T$. Рассмотрим первую из них. С помощью замен $x = -1 + \xi$, $y = -1 + \eta$ система (3.24) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi - \eta, \\ \dot{\eta} = -2\xi - 2\eta + \xi^2 + \eta^2. \end{cases} \tag{3.25}$$

Линейная часть полученной системы имеет следующее характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда $\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$. Корни полученного квадратного трехчлена $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ — вещественны и имеют разные знаки. Это позволяет утверждать, что фазовый портрет окрестности нуля системы (3.25) — седло. Нелинейность $(0, \xi^2 + \eta^2)^T$ системы (3.25) не может изменить тип данной неподвижной точки. Отсюда можно сделать вывод, что $(-1, -1)^T$ также является седлом для исходной системы (3.24). Рассмотрим теперь точку $(1, 1)^T$. Выполняя замены $x = 1 + \xi$, $y = 1 + \eta$, получаем систему

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi - \eta, \\ \dot{\eta} = 2\xi + 2\eta + \xi^2 + \eta^2. \end{cases} \tag{3.26}$$

Характеристическое уравнение линейной части полученной системы имеет вид $\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$, его корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$ комплексно сопряжены, при этом их вещественная часть положительна. Отсюда следует, что система, определяемая линейной частью системы (3.26), является неустойчивым фокусом. Учитывая, что, как и в рассмотренном выше случае, нелинейность не может изменить тип данной неподвижной точки, заключаем, что точка $(1, 1)$ также будет неустойчивым фокусом системы (3.24). □

3.4. Варианты контрольной работы № 4

Вариант № 1

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = 2 - \exp(x+y) - \cos x, \\ y' = \ln(1 + \sin(2x - 3y)). \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -x - 2y + x^2y^2, \\ y' = x - 0.5y(1 + x^3). \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + a\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$.

5. При каких значениях параметров a и b ограничены на всей оси решения уравнения $y'' + ay' + by = \cos t$?

Вариант № 2

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-2x + y) + 1 - \cos x, \\ y' = \ln(1 + 2x - 3y). \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -3y - 2x^3, \\ y' = 2x - 3y^3. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + a\lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$.

5. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

Вариант № 3

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = 2 - (8 - 3x + 6y)^{1/3}, \\ y' = -\sin(2x + y). \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -0.5x - y - 0.25x^3, \\ y' = x - 0.5y - 0.25y^3. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 5$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4y - 6x. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \neq 0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$?

Вариант № 4

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = -10x + 4\exp(y) - 4\cos y^2, \\ y' = 2\exp(x) - 2 - y + x^4. \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = y + x^2y^2 - 0.25x^5, \\ y' = -2x - yx^3 - 0.5y^3. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + 5\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = y - 2x, \\ y' = 2y - 4x. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ удовлетворяют соотношению $y = o(\exp(-x))$ при $x \to +\infty$?

Вариант № 5

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = \ln(3\exp(y) - 2\cos x), \\ y' = 2\exp(x) - (8+12y)^{1/3}. \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$
3. При каких значениях a устойчив многочлен $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + a$?

4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x.$

5. При каких k и ω уравнение $y'' + k^2 y = \sin \omega t$ имеет хотя бы одно периодическое решение?

Вариант № 6

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-x + y), \\ y' = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -xy^4 - 2x^3 - y, \\ y' = 2x + 2x^2y^3 - y^7. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + 2\lambda^2 + a\lambda + 2$?

4. Построить фазовый портрет системы $x' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x.$

5. При каких значениях параметров p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены при всех $x \geqslant 0$?

Вариант № 7

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3}, \\ y' = 1 - \exp(2x + y). \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ являются периодическими функциями от x?

Вариант № 8

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\begin{cases} x' = 2.5x\exp(x) - 3y + \sin x^2, \\ y' = 2x + y\exp(-y^2/2) - y^4\cos x. \end{cases}$$
2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$$\begin{cases} x' = xy - x^3 + y, \\ y' = x^4 - x^2y - x^3. \end{cases}$$
3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $a\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + b$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - y - x = 0. \end{cases}$

5. Докажите, что среди всех решений уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + 11x = \cos \omega t$ есть ровно одно периодическое.

Вариант № 9

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y), \\ y' = 1 - \exp(x - y). \end{cases}$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y. \end{cases}$

3. При каких значениях a устойчив многочлен $\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = -2x + \dfrac{5}{7}y, \\ y' = 7x - 3y. \end{cases}$

5. Найти периодическое решение уравнения $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = \exp(i\omega t)$.

Вариант № 10

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$\begin{cases} x' = (1 + x - 2y)^{-1} - 1, \\ y' = \cos x - \exp(2x - y). \end{cases}$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$\begin{cases} x' = -2y - x(x - y)^2, \\ y' = 3x - 1.5y(x - y)^2. \end{cases}$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + 6$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = -5x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b все решения уравнения
$y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \to -\infty$?

Вариант № 11

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$\begin{cases} x' = \operatorname{tg}(-2x + y), \\ y' = 1 - (1 - x + y)^{1/3}. \end{cases}$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$\begin{cases} x' = -4x - y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + 4\lambda^2 + a\lambda + 6$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \neq 0$, стремящееся к нулю при $x \to -\infty$?

Вариант № 12

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$\begin{cases} x' = \sin(-2x + y), \\ y' = 2 - (8 - 6x + 3y)^{1/3}. \end{cases}$

2. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость систему
$\begin{cases} x' = -3x - 2y, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases}$

3. При каких значениях a и b устойчив многочлен $\lambda^4 + b\lambda^3 + a\lambda^2 + 5\lambda + 7$?

4. Построить фазовый портрет системы $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$

5. При каких значениях параметров a и b ограничены на всей оси решения уравнения
$y'' + ay' + by = \sin t$?

4. Последовательные приближения и метод малого параметра

В данной главе собраны задачи на построение методом последовательных приближений и методом малого параметра приближенных решений. Кроме того, в конце главы обсуждаются способы решения краевых задачи построения функции Грина.

4.1. Метод последовательных приближений Пикара

Обоснование теоремы существования и единственности для начальной задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

обычно выполняется с помощью метода последовательных приближений Пикара (см. книги [7–10]). В (4.1) перейдем к эквивалентному ему интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau. \tag{4.2}$$

На основе полученного уравнения (4.2) удобно строить последовательность функций

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0(t) & = & x_0, \\ \varphi_1(t) & = & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_0)\, d\tau, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \varphi_n(t) & = & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{n-1}(\tau))\, d\tau, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array} \tag{4.3}$$

В теореме существования и единственности доказывается равномерная сходимость данной последовательности к решению. Если удается сосчитать интегралы в формулах (4.3), можно получить хорошее приближение решения.

Пример 4.1. *Найти три последовательных приближения задачи Коши*

$$y' = 2x + y^2, \; y(0) = 1.$$

Решение. Для исходного уравнения на плоскости Oxy выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Построим последовательность функций $y_n(x)$, определяемых соотношениями

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(\tau, y_{n-1}(\tau)\right) d\tau, \quad n = 1, 2, ...$$

За нулевое приближение примем $y_0(x) \equiv 1$, тогда

$$\begin{aligned} &y_0(x) \equiv 1, \\ &y_1(x) = 1 + \int_0^x (2\tau + y_0^2(\tau)) d\tau = 1 + x + x^2, \\ &y_2(x) = 1 + \int_0^x (2\tau + y_1^2(\tau)) d\tau = 1 + x + 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}. \end{aligned}$$

□

4.2. Метод малого параметра

Для начальной задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = \psi(\mu) \tag{4.4}$$

при условии, что $f(t, x, \mu)$ и $\psi(\mu)$ — достаточно гладкие функции своих аргументов, удается доказать утверждение, гарантирующее гладкость решения уравнения (4.4) по параметру μ. В этой ситуации можно попытаться построить разложение решения $x(t, \mu)$ в ряд по μ. Для определения коэффициентов этого разложения можно пользоваться следующим алгоритмом. (Не ограничивая общности, будем считать, что разложение выполняется в точке $\mu = 0$.)

Представим $x(t, \mu)$ в виде суммы

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \cdots + \mu^n x_n(t) + o(\mu^n) \tag{4.5}$$

и подставим формулу (4.5) в уравнение (4.4)

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0(t) + \dot{\mu} x_1(t) + \cdots = f\big(t, x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots, \mu\big), \\ &x_0(t_0) + \mu x_1(t_0) + \cdots = \psi_0 + \mu \psi_1 + \ldots, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\psi_0, \psi_1, \ldots$ — коэффициенты разложения в ряд Тейлора в нуле функции $\psi(\mu)$.

Разложим функцию в правой части (4.6) в ряд по μ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Учитывая, что

$$\begin{aligned} f(t, x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) \ldots, \mu) = f(t, x_0(t), 0) + \\ + \mu \left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \big(x_1(t) + 2\mu x_2(t) + \ldots\big) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial \mu} \right) \Bigg|_{\mu=0} + \\ + \frac{\mu^2}{2} \Bigg(\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2} \big(x_1(t) + 2\mu x_2(t) + \ldots\big)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x \partial \mu} \big(x_1(t) + 2\mu x_2(t) + \ldots\big) + \\ + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \big(2x_2(t) + 6\mu x_3(t) + \ldots\big) + \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial \mu^2} \Bigg) \Bigg|_{\mu=0} + \ldots, \end{aligned}$$

где $(\cdot)$ обозначено $(t, x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots, \mu)$, получаем для нулевого шага (коэффициент при μ^0):

$$\dot{x} = f(t, x_0(t), 0), \quad x_0(t_0) = \psi_0. \tag{4.7}$$

На первом шаге (коэффициент при μ^1) имеем

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial \mu}, \quad x_1(t_0) = \psi_1, \tag{4.8}$$

и, наконец, на втором шаге (коэффициент при μ^2) получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \frac{\partial f(t, x_0(t), 0)}{\partial x} x_2 + \frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial x \partial \mu} x_1 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial x^2} x_1^2 + \frac{\partial^2 f(t, x_0(t), 0)}{\partial \mu^2} \right), \quad x_2(t_0) = \psi_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Все выписанные задачи, кроме нулевого шага, представляют собой линейные дифференциальные уравнения первого порядка и могут быть решены стандартным способом, если удается решить задачу (4.7). Далее, подставляя полученные решения в асимптотическое разложение (4.5), получаем приближенное решение задачи (4.1). Важно заметить, что асимптотические формулы (4.5), работают, вообще говоря, лишь на конечном промежутке изменения $t \in [t_0, T]$.

Для бесконечных промежутков следует применять другие асимптотические методы.

Пример 4.2. *Найти методом малого параметра два–три члена разложения*

$$y' - \varepsilon y - \exp(y - x) = 0, \;\; y(0) = -\varepsilon.$$

Решение. Решение ищем в виде

$$y(x, \varepsilon) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + ...$$

Подставим данное разложение в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим последовательность начальных задач Коши

$$\begin{array}{ll}
v_0' = \exp(v_0 - x), & v_0(0) = 0, \\
v_1' = v_0 + \exp(v_0 - x) v_1, & v_1(0) = 1, \\
v_2' = v_1 + \exp(v_0 - x)(v_2 + \dfrac{v_1^2}{2}), & v_2(0) = 0, \\
\multicolumn{2}{l}{\dotfill}
\end{array}$$

Из первого уравнения и начального условия находим $v_0(x) = x$, подставляя это значение во второе уравнение, получаем

$$v_1' = x + v_1, \; v_1(0) = -1.$$

Откуда

$$v_1(x) = -x - 1.$$

Подставляя найденные $v_0(x)$ и $v_1(x)$ в третье уравнение, получаем

$$v_2' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + v_2, \; v_2(0) = 0.$$

Решив уравнение и воспользовавшись начальным условием, найдем

$$v_2(x) = \frac{1}{2}(-x^2 - 2x - 1 + \exp(x)).$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$y(x) = x - \varepsilon(x + 1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\big(\exp(x) - x^2 - 2x - 1\big) + o(\varepsilon^2).$$

□

4.3. Краевые задачи

В данном разделе рассмотрим краевую задачу

$$a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = f(x), \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \\ &\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Здесь $a_j(x)$, $j = 0, 1, 2$, $f(x)$ — непрерывные функции при $x \in [a, b]$, причем $a_0(x) \neq 0$, α_j, β_j, γ_j $(j = 1, 2)$ — действительные числа такие, что $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$ $(j = 1, 2)$.

Краевая задача (4.10), (4.11) может быть приведена к следующему виду

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f^*(x) \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0 \\ &\alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

где $q(x)$ — непрерывная, а $p(x)$ — дифференцируемая функции, $p(x) \neq 0$. Отрезок $[a, b]$ сводится к промежутку $[0, 1]$ с помощью замены $x \to a + (b - a)x$, а от γ_1, γ_2 можно избавиться за счет линейной или квадратичной по x добавки, наконец, само уравнение (4.10) можно свести к виду (4.12) после умножения уравнения (4.10) на

$$\gamma = \frac{1}{a_0} \exp\left(\int_0^x \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau\right)$$

и переобозначений $p = a_0\gamma,\ q = a_2\gamma$.

Будем предполагать, что задача (4.12), (4.13) при $f(x) \equiv 0$ однозначно разрешима, в этом случае неоднородная задача также однозначно разрешима, ее решение имеет вид

$$u(t) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds.$$

Опишем способ получения функции $G(x, s)$, которая называется функцией Грина. Введем определение.

Функция $G(x, s)$ называется функцией Грина, если она определена при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 < s < 1$ и при каждом фиксированном s из интервала $(0, 1)$ обладает свойствами (как функция от x)

1) *При $x \neq s$ $\quad LG(x, s) = 0$, то есть $G(x, s)$ — решение линейного однородного уравнения по переменной x;*

2) *$G(x, s)$ удовлетворяет левому и правому краевым условиям по переменной x;*

3) *$G(x, s)$ непрерывана в точке $x = s$;*

4) *Производная по x функции $G(x, s)$ имеет скачок в точке s, то есть* $G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \dfrac{1}{p(s)}$.

Для определения функции Грина необходимо найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=0, \quad u_{\text{од}}=C_1u_1(x)+C_2u_2(x),$$

а затем отыскать функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, которые удовлетворяют левому и правому краевым условиям соответственно. Учитывая, что однородная задача имеет только нулевое решение, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы.

Функцию Грина будем искать в виде, удовлетворяющем условиям (4.12), (4.13)

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(s)\varphi_1(x), \ 0\leqslant x<s, \\ C_2(s)\varphi_2(x), \ s<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Для определения $C_1(s), C_2(s)$ воспользуемся условиями 3, 4 определения, из которых имеем

$$\begin{cases} C_1(s)\varphi_1(s)-C_2(s)\varphi_2(s)=0, \\ C_1(s)\varphi_1'(s)-C_2(s)\varphi_2'(s)=-\dfrac{1}{p(s)}. \end{cases} \tag{4.14}$$

Определителем системы (4.14) служит определитель Вронского линейно независимых решений $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, это означает, что он отличен от нуля и система (4.14) однозначно разрешима. Тем самым, функция Грина полностью определена.

Пример 4.3. *Найти функцию Грина краевой задачи*

$$\ddot{u}=f(x), \ u(0)=0, \ u(1)=0.$$

Решение. Для определения функции Грина выпишем решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$\ddot{u}=0, \quad u_{\text{од}}=C_1x+C_2.$$

Теперь найдем функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, удовлетворяющие левому и правому краевым условиям соответственно. Функция Грина ищется в виде

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(s)x, & \text{если} \quad 0\leqslant x<s, \\ C_2(s)(x-1), & \text{если} \quad s<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Из условий 3, 4 определения однозначно находятся $C_1(s), C_2(s)$

$$\begin{cases} C_1(s)s-C_2(s)(s-1)=0, \\ C_1(s)-C_2(s)=-1 \end{cases}$$

и выписывается функция Грина исходной краевой задачи

$$G(x,s)=\begin{cases} (s-1)x, & \text{если} \quad 0\leqslant x<s, \\ s(x-1), & \text{если} \quad s<x\leqslant 1. \end{cases}$$

□

4.4. Варианты контрольной работы № 5

Вариант № 1

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = 2x + x^2 + t,\ x(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$y' + \varepsilon y - \exp(y - x) = 0, \quad y(0) = \varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = f(x), \quad u(0) = \dot{u}(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} + u = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 2

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши
$\dot{x} = 2tx + x^3 + t - 1,\ x(0) = 0.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$y' + y^2 - \dfrac{6\varepsilon}{x} = 0, \quad y(1) = 1 + 3\varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + 2y' + (1 + \varepsilon y^2)y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} = f(x), \quad \dot{u}(0) = u(1) + \dot{u}(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} - u = \lambda u, \quad \dot{u}(0) = u(1) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 3

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши
$\dot{x} = 2x + \sin x + 1,\ x(0) = 0.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$xy' - \varepsilon x^2 - \ln(1 + y) = 0, \quad y(1) = 0.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + (4 + \mu(1 + y^2))y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} = f(x), \quad u(0) = 1,\ u(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} = \lambda u, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 4

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши
$\dot{x} = 2(\ln x + x^2) - 1,\ x(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$y' - y^2 + \varepsilon xy^3 = 0, \quad y(0) = 1 - \varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + (4 + \varepsilon t)y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 4u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} = \lambda u, \quad \dot{u}(0) = u(0) + u(1) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 5

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $y' = 2x + y^2,\ y(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$y' + \varepsilon y - 1 + \sin(x - y) = 0, \quad y(0) = \varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + 4xy^3 = 0, \quad y(0) = \mu,\ y'(0) = 0.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} - 3u = f(x), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi), \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi)$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 6

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x^2 - t^2 + 1,\ x(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$\dot{x} = 6\varepsilon\frac{1}{t} - x^2, \quad x(1) = 1 + 3\varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \mu(y')^2 - (1 + \mu y^2)y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} = f(x), \quad u(0) + \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$
5. При каких λ и ω разрешима задача $\ddot{u} + \lambda u = \cos^2(\omega), \quad u(0) = u(1) = 0.$

Вариант № 7

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = 3t^2x + x^2 + 1,\ x(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$x' = 1 - t + (1 - t + \varepsilon)x + \dfrac{x^2 + t^2}{2}, \quad x(0) = -\varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} = f(x), \quad u(0) = \dot{u}(1) = 1.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 8

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x^2 - t, \quad x(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$\dot{x} = \mu t x^3 + x^2, \quad x(0) = 1 + \mu.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \mu(y')^2 - (1 + \mu y^2)y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} = f(x), \quad u(0) + \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda^2 u = 0, \quad \dot{u}(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Вариант № 9

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x + t + x^2,\ x(0) = 1.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$x' = \ln x + \varepsilon t, \quad x(0) = 1 - \varepsilon.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \varepsilon(1 + y')y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + u = f(x), \quad u(0) = \dot{u}(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} + \lambda u = \sin x, \quad u(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ, при которых она разрешима.

Вариант № 10

1. Найти три последовательных приближения задачи Коши $\dot{x} = x + tx^3 - t, \quad x(0) = 0.$
2. Найти методом малого параметра два-три члена разложения
$\dot{x} = 1 - \sqrt{1 + x} + \mu t, \quad x(0) = \mu.$
3. Найти методом малого параметра три члена разложения
$y'' + \mu(y')^2 - (1 + \mu y)y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
4. Найти функцию Грина краевой задачи $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = f(x), \quad u(0) - \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0.$
5. Для краевой задачи $\ddot{u} + \dot{u} + \lambda^2 u = 0, \quad \dot{u}(0) = u(\pi) = 0$ найти те значения λ, при которых она имеет ненулевое решение.

Литература

1. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979. 128 с.

2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 240 с.

3. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высш. школа, 1978. 288 с.

4. *Романко В. К. Агаханов Н. Х., Власов В. В., Коваленко Л. И.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. 256 с.

5. *Матвеев Н. М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск: Выш. шк., 1987. 319 с.

6. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.

7. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1976. 331 с.

8. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 231 с.

9. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС, 2000. 320 с.

10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

11. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 176 с.

Учебное издание

Глызин Сергей Дмитриевич
Толбей Анна Олеговна

Практикум по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор, верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 30.06.11. Формат 60×84/8. Бумага Data Copy.
Усл. печ. л. 7,93. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 75 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.