СЛАУ

Однородные СЛАУ (ОСЛАУ)

Рассмотрим систему, состоящую из m однородных линейных уравнений с n неизвестными:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$
Введём обозначения:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Тогда ОСЛАУ можно записать в матричном виде:
$$AX = \theta. \tag{1}$$
Система (1) всегда имеет по крайней мере одно решение: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — *тривиальное* решение (но это решение может быть не единственным).

Общее решение (ОР) системы (1) имеет вид
$$X = \sum_{k=1}^{n-r} C_k X_k,$$
где $r = \operatorname{rang} A$, C_k — произвольные числа; X_1, X_2, …, X_{n-r} — ЛНЗ решения системы (1) — они называются ФСР (*фундаментальной совокупностью решений*).

Общий способ решения ОСЛАУ — метод Гаусса—Жордана. Он состоит в приведении матрицы A к упрощённому виду с помощью ЭПС. При этом ОСЛАУ переходит в эквивалентную ОСЛАУ, но более простого вида. Метод Гаусса—Жордана позволяет решить любую ОСЛАУ за наименьшее количество операций.

Задача 1 (ЛАВЗ гл. III § 2 пример 1). Найти ФСР и ОР системы
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$
Выпишем матрицу ОСЛАУ и приведём её к упрощённому виду:
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 13/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 13/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$
(Последовательность ЭПС: вычитаем из третьей строки первую; из второй строки вычитаем первую строку, умноженную на 2; умножаем первую строку на $1/2$. Прибавляем к первой строке вторую строку, умноженную на $3/2$; вычитаем из третьей строки удвоенную вторую

строку; умножаем вторую строку на -1; вычёркиваем третью строку, состоящую из одних нулей.)

Матрица системы приведена к упрощённому виду. Базисные столбцы — первый и третий. Запишем ОСЛАУ, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{13}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0, \\ x_3 - 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Переменные, отвечающие базисным столбцам (x_1 и x_3), называются *базисными* переменными, а остальные переменные (x_2, x_4 и x_5) — *свободными*. Базисные переменные оставим в левой части, а свободные перенесём в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{13}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_3 = 5x_4 - x_5. \end{cases}$$

Теперь видно, что свободные переменные x_2, x_4, x_5 могут принимать произвольные значения, а базисные переменные x_1, x_3 однозначно выражаются через них.

Для построения ФСР удобно поступить следующим образом: положить все свободные переменные, кроме одной, равными нулю, а оставшуюся свободную переменную приравнять к любому числу, отличному от нуля. Таким образом получится одно из решений системы. Остальные решения, входящие в ФСР, получаются аналогично, но в них должны быть отличны от нуля другие свободные переменные (в каждом решении только одна ненулевая свободная переменная). Указанный способ построения решений гарантирует их линейную независимость. Полученная ФСР называется *нормальной*.

1) Пусть $x_2 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, $x_3 = 0$. Это соответствует решению
$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
2) Пусть $x_2 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$. Тогда $x_1 = -13$, $x_3 = 10$. Это соответствует решению
$$X_2 = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3) Пусть $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$. Тогда $x_1 = -1$, $x_3 = -2$. Это соответствует решению
$$X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ФСР системы состоит из столбцов X_1, X_2, X_3, а ОР имеет вид

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные числа.

Ответ: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ — ФСР; $X = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$ — ОР, где C_1, C_2, C_3 — произвольные числа.

Неоднородные СЛАУ (НСЛАУ)

НСЛАУ в матричной форме имеет вид:
$AX = B,$

где $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — известный столбец.

О. НСЛАУ называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.
Т. (Кронекера—Капелли) НСЛАУ совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^*$, где $A^* = (A|B)$ — *расширенная* матрица системы.
Т. Если НСЛАУ совместна, то её ОР имеет вид:

$$X = X_0 + \sum_{k=1}^{n-r} C_k X_k,$$

где X_0 — ЧР (*частное решение*) НСЛАУ (т.е. какое-либо одно её решение), $X_1, \dots, X_{n-r}$ — ФСР соответствующей ОСЛАУ ($AX = \theta$), C_k — произвольные числа.
Т.е. ОР НСЛАУ = ЧР НСЛАУ + ОР ОСЛАУ.
Метод Гаусса—Жордана позволяет решить любую НСЛАУ за наименьшее количество операций.

Задача 2 (ЛАВЗ гл. III № 2а). Найти значения параметра c, при которых НСЛАУ совместна. Найти ФСР и ОР соответствующей ОСЛАУ, ЧР и ОР НСЛАУ.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = c, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Для того чтобы решить НСЛАУ методом Гаусса—Жордана, нужно с помощью ЭПС преобразовать её расширенную матрицу $A^* = (A|B)$ так, чтобы матрица A приняла упрощённый вид:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & c \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1-c \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1-c \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & c-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-c \end{array}\right).$$

(Последовательность ЭПС: вычтем из третьей строки вторую строку, затем из второй строки первую. Умножим третью строку на $1/6$ и поменяем местами со второй. Вычтем из первой строки вторую и прибавим к третьей строке удвоенную вторую строку.)
Базисные переменные: x_1 и x_4. Свободные переменные: x_2 и x_3.
Запишем НСЛАУ, соответствующую упрощённой матрице, оставив в левой части базисные переменные x_1 и x_4:

$$\begin{cases} x_1 = c - 1 + 2x_2 - x_3, \\ x_4 = 1, \\ 0 = 1 - c. \end{cases}$$

Из последнего уравнения видно, что система совместна только при $c = 1$.
При $c = 1$ система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Чтобы найти её ЧР, положим все свободные переменные равными нулю: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Тогда $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, и мы получаем решение

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы построить ФСР и ЧР соответствующей однородной системы, запишем её:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

1) $x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_4 = 0 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2) $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_4 = 0 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Тогда X_0 — ЧР НСЛАУ, $\{X_1, X_2\}$ — ФСР ОСЛАУ, $C_1X_1 + C_2X_2$ — ОР ОСЛАУ, $X_0 + C_1X_1 + C_2X_2$ — ОР НСЛАУ, где C_1, C_2 — произвольные числа.

Ответ: система совместна при $c = 1$; $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — ЧР НСЛАУ; $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — ФСР ОСЛАУ; $C_1X_1 + C_2X_2$ — ОР ОСЛАУ; $X = X_0 + C_1X_1 + C_2X_2$ — ОР НСЛАУ, где C_1, C_2 — произвольные числа.

ДЗ 31. ЛАВЗ гл. III № 4(а,в,г,д,е), 12(а,в,г,д), 15(а).