Собственные значения и собственные векторы

Рассмотрим ЛП L над полем $\mathbb{K}$. Пусть в нём действует ЛОп $\hat{A}$.
О. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется СЗ (*собственным значением*) ЛОп $\hat{A}$, если
$\exists x \in L, x \neq \theta$: $\boxed{\hat{A}x = \lambda x.}$
При этом x называется СВ (*собственным вектором*), отвечающим СЗ λ.
Т. СВ, отвечающие различным СЗ, ЛНЗ.

Пример 1. ЛОп $\hat{A}$ действует в ЛП трёхмерных геометрических векторов V_3 по правилу $\hat{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$ — фиксированный вектор. Найти его СЗ и СВ.
Найдём СЗ и СВ оператора $\hat{A}$, т.е. решения уравнения
$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \qquad \vec{x} \neq \vec{0}.$
В нашем случае уравнение имеет вид:
$$[\vec{x}, \vec{a}] = \lambda\vec{x}, \qquad \vec{x} \neq \vec{0}. \tag{1}$$
Но $[\vec{x}, \vec{a}] \perp \vec{x}$ (по определению векторного произведения). Тогда, умножив уравнение (1) скалярно на $\vec{x}$, получим:
$\underbrace{([\vec{x}, \vec{a}], \vec{x})}_{=0} = \lambda \underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{\neq 0}.$
Поскольку $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\lambda = 0$. Тогда
$[\vec{x}, \vec{a}] = 0 \cdot \vec{x} = \vec{0},$
значит, СВ являются все векторы $\vec{x} \parallel \vec{a}, \vec{x} \neq \vec{0}$.
Ответ: СЗ $\lambda = 0$ отвечают СВ $\vec{x} = C\vec{a}$, где $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$.

Характеристическое уравнение (ХУ)

Запишем уравнение $\hat{A}x = \lambda x$, которому удовлетворяют СВ ЛОп $\hat{A}$, в базисе e:
$A_e x_e = \lambda x_e,$
или
$A_e x_e = \lambda I x_e,$
$\boxed{(A_e - \lambda I)x_e = \theta.}$
Относительно координат вектора x это ОСЛАУ с квадратной матрицей $A_e - \lambda I$. Если матрица $A_e - \lambda I$ невырождена, то ОСЛАУ имеет единственное решение — тривиальное:
$x_e = (A_e - \lambda I)^{-1}\theta = \theta.$
Но СВ не может быть нулевым, поэтому матрица $A_e - \lambda I$ должна быть вырожденной:
$\boxed{\det(A_e - \lambda I) = 0.}$
Это уравнение относительно λ, которое называется ХУ (*характеристическим уравнением*).
Т. Все СЗ ЛОп $\hat{A}$ являются корнями ХУ. Все корни ХУ, принадлежащие числовому полю $\mathbb{K}$, над которым определено данное ЛП, являются СЗ ЛОп $\hat{A}$.

Пример 2. Найти все СЗ и СВ ЛОп $\hat{A}$, действующего в вещественном ЛП L, с матрицей (в некотором базисе e): $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Построить базис ЛП L, состоящий из СВ ЛОп $\hat{A}$, и найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе из СВ.

Замечание. Иногда задание формулируется так: «Найти СЗ и СВ матрицы A». Здесь имеется в виду, что A является матрицей некоторого ЛОп в ЛП T_n.

Заметим, что в вещественном ЛП СЗ оператора должны быть вещественными и удовлетворять ХУ

$\det(A_e - \lambda I) = 0$.

Имеем:

$$A_e - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0.$$

(Сначала мы прибавили к первому столбцу второй и третий, затем вынесли общий множитель из первого столбца, затем вычли из второй и третьей строки первую строку и получили треугольный определитель.)

ХУ имеет два корня: $\lambda_1 = 2$ кратности $m_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$ кратности $m_2 = 2$. Все корни ХУ вещественные, поэтому они являются СЗ. Числа m_1, m_2 называются *алгебраическими кратностями* СЗ λ_1, λ_2.

1) $\lambda_1 = 2$. Найдём СВ из уравнения

   $(A_e - \lambda_1 I)x_e = \theta$.

   $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Решим ОСЛАУ:

   $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   $$\begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = x_1. \end{cases}$$

   ОР: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $C \in \mathbb{R}$.

   Следовательно все СВ, отвечающие СЗ $\lambda_1 = 2$, имеют вид $x = C(e_1 + e_2 + e_3)$, где $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$.

   О. Максимальное число ЛНЗ СВ, отвечающих СЗ λ, называется *геометрической кратностью* s СЗ λ.

   Для $\lambda_1 = 2$ имеем $s_1 = 1$.

2) $\lambda_2 = -1$. Найдём СВ из уравнения

   $(A_e - \lambda_2 I)y_e = \theta$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim (1 \quad 1 \quad 1).$$

$y_1 = -y_2 - y_3$.

ОР: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Все СВ, отвечающие СЗ $\lambda_2 = -1$, имеют вид: $y = C_1(-e_1 + e_2) + C_2(-e_1 + e_3)$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $|C_1| + |C_2| \neq 0$.

Геометрическая кратность СЗ $\lambda_2 = -1$: $s_2 = 2$.

Построим базис ЛП L, состоящий из СВ данного оператора. Поскольку в ЛП L есть базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, то $\dim L = 3$. Значит, для построения нового базиса следует взять три ЛНЗ СВ.

Пусть $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ (это СВ, отвечающий СЗ $\lambda_1 = 2$); $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = -e_1 + e_3$ (это два ЛНЗ СВ, отвечающих СЗ $\lambda_2 = -1$). Поскольку СВ, отвечающие различным СЗ, ЛНЗ, то векторы f_1, f_2, f_3 ЛНЗ и поэтому образуют базис ЛП L.

Построим матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе f:

$\hat{A}f_1 = \lambda_1 f_1 = 2f_1, \qquad \hat{A}f_2 = \lambda_2 f_2 = -f_2, \qquad \hat{A}f_3 = \lambda_2 f_3 = -f_3,$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица ЛОп в базисе из СВ всегда диагональна, на главной диагонали стоят соответствующие СЗ.

Ответ: СЗ $\lambda_1 = 2$ отвечают СВ $x = C(e_1 + e_2 + e_3)$, где $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$; СЗ $\lambda_2 = -1$ отвечают СВ $y = C_1(-e_1 + e_2) + C_2(-e_1 + e_3)$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $|C_1| + |C_2| \neq 0$; $\{f_1, f_2, f_3\}$ — базис из СВ, где $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = -e_1 + e_3$; $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Замечание. Не у всякого ЛОп существует базис из СВ. Может оказаться так, что количество ЛНЗ СВ меньше, чем размерность ЛП, и из них нельзя построить базис. В этом случае матрица ЛОп ни в каком базисе не будет диагональной.

СЗ и СВ ЛОп, действующего в ЕП

О. ЛОп $\hat{A}$, действующий в ЕП E, называется *самосопряжённым* или *симметричным,* если $\forall x, y \in E$ выполняется $\left(\hat{A}x, y\right) = \left(x, \hat{A}y\right)$.

Т. Если $\hat{A}$ — самосопряжённый ЛОп, действующий в ЕП E, то

1) в любом ОНБ e пространства E выполняется $A_e = A_e^T$, т.е. матрица оператора симметрична,
2) все корни ХУ вещественны,
3) СВ, отвечающие различным СЗ, ортогональны,
4) в E существует ОНБ из СВ оператора $\hat{A}$.

Пример 3. Пусть матрица самосопряжённого ЛОп $\hat{A}$ в некотором ОНБ e ЕП E имеет вид $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (заметим, что $A_e = A_e^T$). Построить ОНБ ЕП E, состоящий из СВ ЛОп $\hat{A}$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в ОНБ из СВ.

Базис из СВ мы уже построили в предыдущей задаче: $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = -e_1 + e_3$, но он не является ОНБ. Проведём ортогонализацию.

Элементы f_1 и f_2, f_1 и f_3 уже ортогональны, поскольку отвечают различным СЗ. Осталось ортогонализовать f_2 и f_3, которые отвечают одному и тому же СЗ. Построим ОБ:

$g_1 = f_1$,

$g_2 = f_2$,

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 \;\;\Rightarrow\;\; (g_3)_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\{g_1, g_2, g_3\}$ — ОБ из СВ в E.

Проведём нормировку:

$\|g_1\| = \sqrt{3}, \qquad \|g_2\| = \sqrt{2}, \qquad \|g_3\| = \sqrt{6};$

$$h_1 = \frac{1}{\|g_1\|} \cdot g_1, \qquad h_2 = \frac{1}{\|g_2\|} \cdot g_2, \qquad h_3 = \frac{1}{\|g_3\|} \cdot g_3;$$

$$(h_1)_e = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad (h_2)_e = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad (h_3)_e = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\{h_1, h_2, h_3\}$ — ОНБ из СВ в E.

Поскольку h_1, h_2, h_3 — по-прежнему СВ (h_1 — СВ, отвечающий СЗ $\lambda_1 = 2$; h_2, h_3 — СВ, отвечающие СЗ $\lambda_2 = -1$, поскольку h_2, h_3 являются ЛК f_2, f_3, а $\{f_2, f_3\}$ — базис пространства СВ, отвечающих СЗ $\lambda_2 = -1$), то матрица оператора $\hat{A}$ в базисе h имеет вид

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{h_1, h_2, h_3\}$ — ОНБ из СВ, где $h_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3)$, $h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_3)$, $h_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-e_1 - e_2 + 2e_3)$; $A_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 4 (задача к экзамену № 17). Известно, что одна из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

является матрицей самосопряжённого оператора в некотором неортогональном базисе ЕП E. Определите, какая именно.

Если данная матрица является матрицей самосопряжённого оператора в некотором базисе ЕП E, то она должна обладать следующими свойствами:

а) все корни ХУ вещественны,

б) существует базис ЕП E, состоящий из СВ.

Найдём корни ХУ для первой матрицы:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 14 = 0.$$

$\mathcal{D} = 9 - 56 < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \lambda \notin \mathbb{R}$.

Поэтому матрица A не может являться матрицей самосопряжённого оператора. Стало быть, ей является матрица B.
Ответ: B.

Инвариантные подпространства (ИПП)

Пусть ЛОп $\hat{A}$ действует в ЛП L. Пусть M — ЛПП L.
О. Подпространство M называется *инвариантным подпространством* ЛОп $\hat{A}$, если $\forall x \in M$ выполняется $\hat{A}x \in M$.

Пример 5. Рассмотрим ЛОп $\hat{A}$ из примера 2. Он действует в вещественном ЛП L размерности 3 с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и имеет СВ вида $C(e_1 + e_2 + e_3)$, где $C \neq 0$, отвечающие СЗ $\lambda = 2$, и СВ вида $C_1(-e_1 + e_2) + C_2(-e_1 + e_3)$, где $|C_1| + |C_2| \neq 0$, отвечающие СЗ $\lambda = -1$. Перечислим его ИПП.

1) ИПП размерности 0: $\{\theta\}$ — подпространство, состоящее только из нулевого элемента. В самом деле, в силу линейности оператора выполняется равенство $\hat{A}\theta = \theta$, поэтому данное подпространство является ИПП оператора $\hat{A}$.
2) ИПП размерности 1: $L(y)$, где y — любой СВ оператора $\hat{A}$. В самом деле, любой элемент $x \in L(y)$ имеет вид $x = cy$, где $c \in \mathbb{R}$, поэтому
   $\hat{A}x = \hat{A}(cy) = c\hat{A}y = c\lambda y = (c\lambda)y \in L(y)$,
   где λ — СЗ, отвечающее СВ y.
3) ИПП размерности 2: $L(y_1, y_2)$, где y_1, y_2 — любые два ЛНЗ СВ оператора $\hat{A}$ (они могут отвечать как различным СЗ, так и одному СЗ). В самом деле, любой элемент $x \in L(y_1, y_2)$ имеет вид $x = c_1y_1 + c_2y_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, поэтому
   $\hat{A}x = \hat{A}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\hat{A}y_1 + c_2\hat{A}y_2 = c_1\lambda_1y_1 + c_2\lambda_2y_2 = (c_1\lambda_1)y_1 + (c_2\lambda_2)y_2 \in$
   $\in L(y_1, y_2)$,
   где λ_1 и λ_2 — СЗ, которым отвечают СВ y_1 и y_2, соответственно.
4) ИПП размерности 3: всё ЛП L. В самом деле, для любого элемента $x \in L$ выполняется условие $\hat{A}x \in L$, поскольку оператор $\hat{A}$ действует в ЛП L.

Подпространства $\{\theta\}$ и L называются *тривиальными* ИПП, поскольку они имеются у любого ЛОп $\hat{A}$.

ДЗ 18. ЛАВЗ гл. V № 19–22, 29, 30, 32, 33(а), 40.
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: ЛАВЗ гл. VI § 1.