

Глава 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция №1

§1. Введение.

Уравнение называется интегральным, если неизвестная функция входит в уравнение под знаком интеграла. Разумеется, мы не будем рассматривать интегральные уравнения в такой общей постановке, а ограничимся изучением только одномерных линейных интегральных уравнений следующих типов.

1) Уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x), \quad x, s \in [a, b],$$

где $K(x, s)$ – заданная непрерывная по совокупности аргументов функция, называемая ядром интегрального уравнения; $f(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая неоднородностью уравнения (если $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным); λ – вещественный параметр; $y(x)$ – неизвестная функция, которую мы будем считать непрерывной.

Если это специально не оговаривается, все входящие в интегральные уравнения функции предполагаются вещественными. Кроме того, будет кратко рассмотрено обобщение на многомерный случай (важное для курса методов математической физики, который будет читаться в следующем семестре).

2) Уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a, b],$$

где, как и выше, $K(x, s)$ – ядро интегрального уравнения, заданная непрерывная по совокупности аргументов функция; $f(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая неоднородностью уравнения (если $f \equiv 0$, то уравнение называется однородным); $y(x)$ – неизвестная непрерывная функция.

3) Уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x), \quad x, s \in [a, b],$$

Здесь использованы те же обозначения, что и для уравнения Фредгольма 2-го рода, $K(x, s)$ – функция, непрерывная по совокупности аргументов в треугольной области $\Delta = (x, s : a \leq s \leq x \leq b)$. Если доопределить нулем $K(x, s)$ вне указанной треугольной области, то можно рассматривать уравнение Вольтерра 2-го рода как частный случай уравнения Фредгольма 2-го рода (возможно с ядром, терпящим разрыв в точках отрезка прямой $x = s$, $x, s \in [a, b]$). Тем не менее, уравнение Вольтерра обладает рядом интересных свойств, благодаря которым мы будем его изучать специально.

4) Уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a, b],$$

где использованы те же обозначения, что и выше.

Примеры интегральных уравнений, возникающих при исследовании дифференциальных уравнений, будут приведены позже после введения понятий функции Коши и функции Грина в параллельно читаемом курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Очень большое количество интегральных уравнений 1-го рода появляется при

рассмотрении так называемых обратных задач, возникающих в физике в тех случаях, когда непосредственное измерение физических характеристик невозможно или, по крайней мере, затруднительно. Например, все суждения об удаленных астрофизических объектах делаются на основании измерений на поверхности Земли или на искусственных спутниках. Аналогично, при геофизических исследованиях проще и дешевле проводить измерения на земной поверхности, чем непосредственное исследование глубоко залегающих объектов. Еще один пример – компьютерная томография, позволяющая производить «неразрушающий контроль» состояния мозга человека.

Некоторые примеры интегральных уравнений встречались в математических курсах и ранее. Например, интегральное уравнение

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixs)y(s)ds, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

не являющееся интегральным уравнением Фредгольма, решается с помощью интегрального преобразования Фурье:

$$y(s) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ixs)f(x)dx, \quad s \in (-\infty, +\infty).$$

Сформулируем основные вопросы, которые будут интересовать нас в дальнейшем при исследовании интегральных уравнений и рассмотрим их на примере простейшего уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_a^x y(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a, b].$$

Здесь $K(x, s) \equiv 1$. Будем предполагать, что его решение $y(s)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция.

Во-первых, существование решения. Казалось бы, что решение существует в случае, если $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, и тогда $y(x) = f'(x)$. Однако непрерывной дифференцируемости недостаточно! На самом деле, интеграл в левой части уравнения обращается в нуль при $x = a$. Поэтому для разрешимости нужно потребовать дополнительно выполнение условия $f(a) = 0$.

Во-вторых, нас будет интересовать единственность решения. Очевидно, что при сформулированных выше условиях решение не только существует, но и единственно.

В-третьих, нас будет интересовать вопрос об устойчивости решения, т.е. будут ли изменения решения «малыми» при «малых» изменениях неоднородности $f(x)$. Для того, чтобы говорить о «малости» изменений неоднородности или о близости функций, необходимо сначала познакомиться с некоторыми понятиями теории линейных нормированных пространств.

§2. Метрические, нормированные и евклидовы пространства.

Множество L называется (вещественным) линейным пространством, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x+y \in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x \in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x \in L$, причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов $x, y \in L$ $x+y = y+x$ (коммутативность сложения);
- 2) для любых элементов $x, y, z \in L$ $(x+y)+z = x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);
- 3) существует элемент $\theta \in L$ (называемый нулевым элементом, или нулем пространства L) такой, что для любого элемента $x \in L$ $x+\theta = x$ (существование нулевого элемента);

- 4) для любого элемента $x \in L$ существует элемент $(-x) \in L$ (называемый обратным к x) такой, что $x + (-x) = 0$ (существование обратного элемента);
- 5) для любых элементов $x, y \in L$ и любого (вещественного) числа α $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
- 6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x \in L$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
- 7) для любых (вещественных) чисел α , β и любого элемента $x \in L$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);
- 8) для любого элемента $x \in L$ $1x = x$ (свойство единицы).

Элементы линейного пространства называются векторами, поэтому линейное пространство иногда называется векторным.

Элементы линейного пространства L (векторы) y_1, \dots, y_n называются линейно независимыми, если их линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \neq 0$ для любых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, кроме $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Векторы y_1, \dots, y_n линейно зависимы в том и только в том случае, когда по крайней мере один из них является линейной комбинацией остальных. Если максимальное число линейно независимых векторов пространства L конечно, то это число называется размерностью пространства L , а само линейное пространство называется конечномерным. В противном случае пространство L бесконечномерно.

В качестве примера линейного пространства можно привести изучаемое в курсе линейной алгебры конечномерное векторное пространство R^n . Еще один пример – пространство (вещественных) функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Очевидно, что это пространство можно рассматривать как линейное, если определить сумму элементов и умножение на вещественное число обычным образом (как сумму функций и умножение функции на число). Нулевым элементом этого пространства является функция, тождественно равная нулю.

Подмножество L_1 линейного пространства L называется (линейным) подпространством L , если любая линейная комбинация элементов L_1 принадлежит L_1 (т.е. L_1 само является линейным пространством).

Множество M называется метрическим пространством, если для любых двух его элементов $x, y \in M$ определено вещественное число $\rho(x, y)$ (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x, y) \geq 0$, и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают ($x = y$) (неотрицательность метрики);
- 2) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность метрики);
- 3) для любых элементов $x, y, z \in M$ $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

В метрическом пространстве можно определить понятие сходимости последовательности элементов. А именно, последовательность элементов $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к элементу $x_0 \in M$ (обозначается $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$), если $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что метрическое пространство не обязательно является линейным.

Линейное пространство N называется нормированным, если для любого элемента $x \in N$ определено вещественное число $\|x\|$ (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

- 1) для любого элемента $x \in N$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, если $x = 0$;
- 2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α имеет место $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (неотрицательная однородность нормы);
- 3) для любых элементов $x, y \in N$ верно $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

В нормированном и метрическом пространствах можно ввести понятия открытого и замкнутого множества. В качестве упражнения предлагаем читателю сформулировать эти определения самостоятельно, аналогично тому, как это было сделано в курсе математического анализа.

Введем понятие сходимости последовательности в нормированном пространстве. Последовательность элементов $x_n \in N$, $n = 1, 2, 3, \dots$ сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$ (обозначается $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$), если $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Докажем теперь, что из сходимости по норме следует сходимость норм элементов последовательности к норме предельного элемента. Заметим сразу, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно (приведите пример).

Лемма. Если $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$.

Доказательство. Докажем сначала, что для любых элементов $x, y \in N$ справедливо неравенство $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Действительно, из неравенства треугольника следует $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, откуда $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Меняя местами x и y , получаем $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$, или $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Из этих двух неравенств вытекает, что $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Пусть теперь $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $|\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, из чего и следует утверждение леммы.

Примеры нормированных пространств.

- 1) Конечномерное евклидово пространство R^n , изучавшееся в курсе линейной алгебры.
- 2) Пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Норма в пространстве $C[a, b]$ определяется так: $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{s \in [a, b]} |y(s)|$. В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно проверить выполнение аксиом линейного пространства и доказать корректность указанного определения нормы в $C[a, b]$.

Сходимость по норме пространства $C[a, b]$ называется равномерной сходимостью. Свойства равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций изучались в курсе математического анализа. В частности, был доказан критерий Коши равномерной сходимости, а именно, необходимым и достаточным условие равномерной сходимости функциональной последовательности является ее фундаментальность.

Определение. Последовательность x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ элементов нормированного пространства N называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n > K$ и любого натурального p выполнено $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство аналогичного факта из курса математического анализа и предоставляется читателю.

Если же любая фундаментальная последовательность сходится, то нормированное пространство называется полным.

Определение. Полное нормированное пространство называется банаховым.

Поскольку в курсе математического анализа было доказано, что критерий Коши является не только необходимым, но и достаточным условием равномерной сходимости, то, тем самым, было доказано, что пространство $C[a, b]$ является банаховым. Очевидно, свойством полноты обладает и пространство R^n (докажите это самостоятельно).

В дальнейшем нам потребуется также пространство функций, непрерывных с производными до p -го порядка включительно на сегменте $[a, b]$, сходимость в котором является равномерной со всеми производными до p -го порядка ($p \geq 0$ - целое число). Такое пространство обозначается $C^{(p)}[a, b]$ (очевидно, $C^{(0)}[a, b] = C[a, b]$). Можно ввести много различных норм в этом пространстве, порождающих указанный выше тип сходимости. Из всех таких (эквивалентных) норм для нас удобнее всего будет следующая:

$$\|y\|_{C^{(p)}[a, b]} = \sum_{k=0}^p \max_{s \in [a, b]} |y^{(k)}(s)|.$$

В качестве упражнения предлагаем проверить корректность указанного определения нормы и доказать, что пространство $C^{(p)}[a, b]$ является банаховым.

Определение. Линейное пространство E называется евклидовым, если для любых двух элементов $x, y \in E$ определено вещественное число (x, y) , называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов $x, y \in E$ верно $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
- 2) для любых элементов $x_1, x_2, y \in E$ выполняется равенство $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (аддитивность по первому аргументу);
- 3) для любых элементов $x, y \in E$ и любого вещественного числа α имеет место $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (однородность по первому аргументу).

Заметим, что в силу условий 1)-3) скалярное произведение обладает свойством линейности как по первому, так и по второму аргументу.

- 4) для любого $x \in E$ выполнено неравенство $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, если $x = 0$ (неотрицательность скалярного квадрата).

Скалярное произведение порождает норму: $\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$. Проверьте самостоятельно справедливость аксиом нормы при таком ее определении.

В курсе линейной алгебры было доказано неравенство Коши-Буняковского: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, где равенство выполняется в том и только том случае, когда элементы x и y линейно зависимы. Аналогично доказывается, что неравенство Коши-Буняковского справедливо в любом евклидовом пространстве.

Примером конечномерного евклидова пространства является пространство n -мерных векторов R^n , изучавшееся в курсе линейной алгебры. Это пространство состоит из векторов-столбцов, а скалярное произведение в нем определяется как $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, где x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n - компоненты векторов x и y соответственно. Отметим еще раз, что пространство R^n является полным.

Еще один пример евклидова, но уже бесконечномерного пространства встречался в курсе математического анализа. А именно, рассмотрим снова линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но введем норму с помощью скалярного произведения, а именно для любых непрерывных на $[a, b]$ функций $y_1(s), y_2(s)$ положим

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(s) y_2(s) ds.$$

Проверьте самостоятельно корректность такого определения, т.е. справедливость аксиом скалярного произведения.

Пространство непрерывных функций с нормой, порожденной введенным скалярным произведением, обозначим $h[a, b]$. Итак,

$$\|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(s) ds}.$$

Сходимость по норме $h[a,b]$ называется сходимостью в среднем. В курсе математического анализа было доказано, что из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Из сходимости же в среднем не следует не только равномерная, но даже поточечная сходимость (рекомендуем построить соответствующий пример).

Очевидно, что евклидово пространство $h[a,b]$ является бесконечномерным (приведите пример бесконечной последовательности линейно независимых непрерывных на $[a,b]$ функций). К сожалению, это пространство не является полным. На самом деле, легко построить последовательность функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ (например, кусочно-линейных), которая сходится в среднем к разрывной функции

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right) \\ 1, & \text{при } x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \end{cases}$$

В качестве упражнения докажите, что такая функциональная последовательность является фундаментальной в $h[a,b]$, но не имеет предела в $h[a,b]$.

В курсе функционального анализа доказывается, что любое неполное нормированное пространство можно пополнить. Полное бесконечномерное евклидово пространство называется гильбертовым. Если пополнить пространство $h[a,b]$, то мы получим гильбертово пространство $L_2[a,b]$. Однако для того, чтобы описать, из каких элементов состоит это пространство, нужно знать не только интеграл Римана (который изучался в курсе математического анализа), но и интеграл Лебега. При изложении курса интегральных уравнений мы будем рассматривать пространство $h[a,b]$, понимая, что это пространство неполно. Но в этом пространстве легко определить, что такое ортогональность, поскольку в этом пространстве задано скалярное произведение.

Если же нам потребуется свойство полноты пространства, то будем рассматривать пространство $C[a,b]$. К сожалению, (и это доказывается в курсе функционального анализа) в пространстве $C[a,b]$ нельзя ввести эквивалентную норму, порожденную скалярным произведением, превратив таким образом это пространство в гильбертово, но сохранив в качестве сходимости по норме равномерную сходимость.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать уравнение Фредгольма 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
2. Записать уравнение Вольтерра 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
3. Записать уравнение Фредгольма 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
4. Записать уравнение Вольтерра 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
5. Сформулировать определение линейного пространства.
6. Сформулировать определение метрического пространства.
7. Сформулировать определение нормированного пространства.
8. Сформулировать определение евклидова пространства.
9. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов метрического пространства.
10. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов нормированного пространства.
11. Сформулировать определение фундаментальной последовательности элементов нормированного пространства.
12. Сформулировать определение банахова пространства.
13. Сформулировать определение пространства $C[a, b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
14. Сформулировать определение пространства $C^{(p)}[a, b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
15. Как определяется скалярное произведение в пространстве $h[a, b]$? Почему это пространство является бесконечномерным евклидовым пространством? Как называется сходимость по норме этого пространства?
16. Записать неравенство Коши-Буняковского.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что для любых двух элементов x, y нормированного пространства N справедливо неравенство: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
2. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность является фундаментальной. В каких нормированных пространствах справедливо и обратное утверждение.
3. Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.
4. Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке $[a, b]$ функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.
5. Доказать, что пространство $C[a, b]$ является линейным.
6. Записать определение нормы в пространстве $C[a, b]$. Доказать корректность этого определения.
7. Доказать, что пространство $C^{(p)}[a, b]$ является линейным.
8. Записать определение нормы в пространстве $C^{(p)}[a, b]$. Доказать корректность этого определения.
9. Доказать, что пространство $h[a, b]$ является линейным.
10. Записать определение нормы в пространстве $h[a, b]$. Доказать корректность этого определения.
11. Доказать, что пространство $h[a, b]$ не является полным.
12. Доказать неравенство Коши-Буняковского для пространства $h[a, b]$.