Лекция №4

§6. Характеристические числа и собственные функции интегрального оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром.

Подытожим результаты, полученные в предыдущем параграфе, в следующей теореме.

Теорема. Пусть оператор A действует из $h[a,b]$ в $h[a,b]$ и является вполне непрерывным и самосопряженным. Рассмотрим следующий процесс построения последовательности собственных значений и собственных векторов оператора A:

1) $H_1 = h[a,b]$, $\quad |\Lambda_1| = \|A\|_{H_1 \to H_1} \leftrightarrow \varphi_1$;

2) $H_2 = \{y \in h[a,b] : (y, \varphi_1) = 0\}$, $\quad |\Lambda_2| = \|A\|_{H_2 \to H_2} \leftrightarrow \varphi_2$;

…;

n) $H_n = \{y \in h[a,b] : (y, \varphi_1) = 0, ..., (y, \varphi_{n-1}) = 0\}$, $\quad |\Lambda_n| = \|A\|_{H_n \to H_n} \leftrightarrow \varphi_n$;

…,

причем можно считать, что собственные векторы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ образуют ортонормированную систему.

Эта процедура приводит к двум возможным результатам (критерий остановки процесса $\|A\|_{H_{n+1} \to H_{n+1}} = 0$):

1) $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq ... \geq |\Lambda_n| > \Lambda_{n+1} = 0$ - конечная последовательность собственных значений;

2) $|\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq ... \geq |\Lambda_n| \geq ...$ - бесконечная последовательность собственных значений, $|\Lambda_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

При этом в последовательности собственных значений каждое собственное значение будет повторяться столько раз, какова его кратность. Процесс позволяет найти все собственные значения кроме, быть может, нулевого собственного значения (в случае 2).

<u>Следствия</u>. 1) Характеристические числа вполне непрерывного самосопряженного оператора могут образовывать:

а) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n|$ - конечную последовательность;

б) $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n| \leq ...$ - бесконечную последовательность, тогда $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Каждому характеристическому числу λ_n можно сопоставить собственный вектор φ_n, причем векторы образуют ортонормированную систему.

2) Все полученные результаты верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов <u>собственные векторы</u> говорят <u>собственные функции</u> интегрального оператора или <u>собственные функции</u> ядра $K(x,s)$.

Рассмотрим множество векторов $y \in h[a,b]$ таких, что $Ay = 0$. Докажите самостоятельно, что указанное множество образует замкнутое линейное пространство в $h[a,b]$. Напомним, что это множество называется (см. §2) <u>нуль-пространством</u> оператора A и обозначается $Ker\, A = \{y : Ay = 0\}$. Очевидно, что нуль-пространство нетривиально (т.е. содержит ненулевые элементы) тогда и только тогда, если оператор A имеет нулевое собственное значение. В этом случае (см. §2) оператор A называется вырожденным).

Определение. Ядро интегрального оператора $K(x,s)$ называется замкнутым, если интегральный оператор является невырожденным.

Пусть A - вполне непрерывный самосопряженный оператор с последовательностью характеристических чисел (конечной или бесконечной) $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$, которым соответствует ортонормированная последовательность собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Теорема. Вектор y принадлежит нуль-пространству оператора A ($y \in Ker\, A$) тогда и только тогда, если $(y, \varphi_k) = 0,\ \ k = 1,2,...$ (φ_k- конечная или бесконечная последовательность).

Доказательство. 1) Необходимость. Нуль-пространство оператора A – это множество векторов, соответствующих нулевому собственному значению, т.е. $Ay = 0 \cdot y$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$- последовательность векторов, соответствующих характеристическим числам (ненулевым собственным значениям). Мы доказали ранее, что векторы, отвечающие различным собственным значениям самосопряженного оператора A, являются ортогональными, поэтому $(y, \varphi_k) = 0 \quad k = 1,2,...$

2) Достаточность. Рассмотрим множество $P \in h[a,b]$, состоящее из векторов y таких, что $(y, \varphi_k) = 0 \quad k = 1,2,...$ Очевидно, что P - линейное пространство (докажите это самостоятельно). Кроме того, P - замкнутое линейное подпространство. Действительно, для любой последовательности $y_n \in P$, $n = 1,2,3,...$ верно $(y_n, \varphi_k) = 0,\ k = 1,2,3,...,$ и если $y_n \to y_0$, то в силу непрерывности скалярного произведения получаем $(y_0, \varphi_k) = 0,\quad k = 1,2,...,$ т.е. y_0 – элемент P.

Далее, P – инвариантное подпространство оператора A, так как если $y \in P$, то $(Ay, \varphi_k) = (y, A\varphi_k) = (y, \dfrac{\varphi_k}{\lambda_k}) = \dfrac{1}{\lambda_k}(y, \varphi_k) = 0,\quad k = 1,2,...$. Таким образом, из $y \in P$ следует $Ay \in P$, т.е. P - инвариантное подпространство.

Докажем теперь, что P – нуль-пространство оператора A, т.е. $AP = 0$. Допустим, что это не так. Тогда существует вектор $\tilde{y} \in P$ такой, что $A\tilde{y} \ne 0,\quad \|\tilde{y}\| = 1$. Следовательно, $\|A\|_{P \to P} = \sup\limits_{y \in P,\, \|y\| = 1} \|Ay\| \ge \|A\tilde{y}\| > 0$ и, как доказано в предыдущем параграфе, оператор A имеет ненулевое собственное значение, а значит, и характеристическое число $|\tilde{\lambda}| > 0$. Этому собственному значению (характеристическому числу) отвечает собственный вектор, не входящий в последовательность φ_n (иначе этот вектор был бы ортогонален сам себе). Мы приходим к противоречию с тем, что в последовательности характеристических чисел перечислены все характеристические числа с учетом кратности. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующий процесс для интегрального оператора A с симметрическим непрерывным ядром $K(x,s)$.

Пусть характеристические числа упорядочены в порядке неубывания модуля

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...,$$

и им соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$

1) Обозначим $K^{(1)}(x,s) = K(x,s)$.

2) Определим $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$, и рассмотрим интегральный оператор $A^{(2)}$ с ядром $K^{(2)}(x,s)$. Все функции $\varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ остаются собственными

функциями и оператора $A^{(2)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots$, поскольку

$$\int_a^b K^{(2)}(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds = \int_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) \quad k = 2,3,\ldots$$

Функция φ_1 также остается собственной функцией оператора $A^{(2)}$, но отвечающей нулевому собственному значению ядра $K^{(2)}(x,s)$. Поэтому λ_1 отсутствует в последовательности характеристических чисел оператора $A^{(2)}$. Докажите самостоятельно, что оператор $A^{(2)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от указанных.

Продолжая процесс, на $n+1$-ом шаге имеем $K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$. Оператор $A^{(n+1)}$ с ядром $K^{(n+1)}(x,s)$ имеет те же характеристические числа и те же собственные функции, что и оператор A, кроме первых n характеристических чисел.

Если характеристических чисел бесконечное число, то получаем бесконечный ряд (мы не будем исследовать его сходимость).

Если же характеристических чисел конечное число, то $K^{(n+1)}(x,s) \equiv 0$ и $K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, т.е. ядро интегрального уравнения представляет собой конечную сумму.

Определение. Ядро $K(x,s)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде $K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$, где функции $a_j(x), b_j(s)$ непрерывны по своим аргументам при $x,s \in [a,b]$. Очевидно, можно считать, что $a_1(x),\ldots,a_n(x)$ линейно независимы, и $b_1(s),\ldots,b_n(s)$ также линейно независимы. Если это не так, число членов в сумме можно уменьшить (докажите это самостоятельно).

Интегральный оператор с вырожденным ядром, очевидно, является вырожденным, т.е. у него всегда есть нулевое собственное значение, причем кратность нулевого значения равна ∞.

Для отыскания других собственных значений поступим следующим образом. Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции для интегрального оператора с вырожденным ядром:

$$\Lambda y(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s) y(s) ds\,.$$

Обозначим $\int_a^b y(s)\, b_j(s)\, ds = c_j$. Умножим левую и правую части на $b_i(x)$ и проинтегрируем от a до b:

$$\Lambda c_i = \sum_{j=1} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x)\, dx}_{k_{ij}}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Полагая $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, получим задачу на собственные значения и собственные векторы для матрицы K: $K \cdot C = \Lambda \cdot C$. Как известно, собственные значения матрицы K можно найти, например, решив характеристическое уравнение $\det(K - \Lambda I) = 0$.

Если оператор A: $h[a,b] \to h[a,b]$, т.е. действует в вещественном линейном пространстве $h[a,b]$, он по определению может иметь только вещественные собственные значения. Тем не менее, при решении характеристического уравнения могут находиться и комплексные корни. О чем же идет речь? Могут ли эти корни рассматриваться как комплексные собственные значения?

Дело в том, что мы можем рассматривать тот же оператор в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $h^C[a,b]$, состоящем из комплекснозначных функций вещественной переменной x, т.е. $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ $x \in [a,b]$, где функции $u(x)$, $v(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ вещественные функции. Умножение элементов пространства на комплексное число определяется обычным образом.

В этом пространстве можно ввести скалярное произведение: $(y_1, y_2) = \int\limits_a^b y_1^*(x)\, y_2(x)\, dx$ (здесь * - знак комплексного сопряжения). В качестве упражнения опишите свойства этого скалярного произведения (они отличаются от свойств скалярного произведения в вещественном случае, в частности, $(y_1, y_2) = (y_2, y_1)^*$) и проверьте, что это скалярное произведение порождает норму.

Если же интегральный оператор A имеет симметрическое вещественное непрерывное ядро, то он имеет только вещественные собственные значения и при действии в пространстве $h^C[a,b]$.

Теорема. Пусть интегральный оператор с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$. Тогда этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

Доказательство. Пусть Λ - собственное значение оператора A, $y(x) \neq 0$ - соответствующая собственная функция. Тогда $\Lambda\, y(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$. Применим операцию комплексного сопряжения к левой и правой части. Тогда $\Lambda^*\, y^*(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\, y^*(s)\, ds$, т.е. Λ^* - собственное значение оператора A, а y^* - соответствующая собственная функция.

Умножим первое равенство на $y^*(x)$, а второе на $y(x)$ и проинтегрируем от a до b. Тогда

$$\Lambda \int\limits_a^b |y(x)|^2\, dx = \int\limits_a^b y^*(x) \Big(\int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds \Big)\, dx\,;$$

$$\Lambda^* \int\limits_a^b |y(x)|^2\, dx = \int\limits_a^b y(x) \Big(\int\limits_a^b K(x,s)\, y^*(s)\, ds \Big)\, dx\,.$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая симметричность ядра $K(x,s)$, получаем

$$(\Lambda-\Lambda^*)\underbrace{\int_a^b |y(x)|^2\,dx}_{\neq 0}=0,$$

из чего следует $\Lambda=\Lambda^*$, т.е. Λ - вещественное число. Теорема доказана.

В дальнейшем, как и ранее, мы будем рассматривать интегральные операторы с вещественными ядрами, действующие в пространствах непрерывных вещественных функций. Приведем некоторые полезные для понимания примеры интегральных операторов.

<u>*Примеры*</u>. Положим $[a,b]=[0,\pi]$ и рассмотрим пространство $h[0,\pi]$.

Как было показано в курсе математического анализа, в этом пространстве функции $\varphi_n(s)=\sin ns$, $n=1,2,3,...$ образуют ортогональную систему (чтобы получить ортонормированную систему, надо умножить каждую функцию на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$). Эта система замкнутая, т.е. из того, что непрерывная функция $y(s)$ ортогональна всем функциям $\varphi_n(s)=\sin ns$, $n=1,2,3,...$ следует, что $y(s)\equiv 0$. Эта система полная, т.е. любая непрерывная на $[0,\pi]$ функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье по указанным функциям, причем ряд Фурье сходится к $f(x)$ в среднем.

1) Составим ядро $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2}$ на $[0,\pi]\times[0,\pi]$. Тогда по признаку Вейерштрасса записанный ряд сходится равномерно, т.к. модуль каждого члена этого ряда мажорируется $\frac{1}{n^2}$. Из равномерной сходимости ряда следует, что функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности переменных. Очевидно, что ядро $K(x,s)$ симметрическое. Его собственные функции – $\sin ns$, а характеристические числа – $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,3,...$ (если бы было другое характеристическое число, то соответствующая ему собственная функция была бы ортогональна всем $\sin ns$, а такой функции нет, т.к. $\sin ns$ образуют замкнутую систему). Из замкнутости системы $\sin ns$ следует, что ядро $K(x,s)$ определяет невырожденный интегральный оператор, а, следовательно, замкнуто.

2) Теперь рассмотрим ядро $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2}$. Появляется собственное значение $\Lambda_0=0$ кратности, равной 1, которому соответствует собственная функция $\sin s$. Интегральный оператор A с таким ядром является вырожденным, а его ядро невырожденное, но и незамкнутое.

3) Рассмотрим $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx\sin 2ns}{(2n)^2}$. Интегральный оператор с таким ядром имеет собственное значение $\Lambda_0=0$ бесконечной кратности (соответствующие собственные функции $\sin s$, $\sin 3s$, ...). Интегральный оператор вырожденный, имеет бесконечномерное нуль-пространство, а его ядро невырожденное, но и незамкнутое.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение замкнутого ядра интегрального оператора Фредгольма.
2. Сформулировать определение вырожденного ядра интегрального оператора Фредгольма.
3. Сформулировать определение скалярного произведения в комплексном расширении пространства $h[a,b]$.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Описать процесс построения собственных значений и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве $h[a,b]$.
2. Сформулировать и обосновать необходимые и достаточные условия того, что вектор φ принадлежит нуль-пространству вполне непрерывного самосопряженного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве.
3. Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром имеет конечное число характеристических чисел, то ядро оператора равно $K(x,s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$ (λ_i - характеристические числа, φ_i - соответствующие собственные функции).
4. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет бесконечную кратность.
5. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.
6. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2}$, действующий в пространстве $h[0,\pi]$, является невырожденным.
7. Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма, действующего в пространстве $h[0,\pi]$, с ядром $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx\sin ns}{n^2}$.
8. Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма, действующего в пространстве $h[0,\pi]$, с ядром $K(x,s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx\sin 2ns}{(2n)^2}$ имеет бесконечную кратность.
9. Привести пример вырожденного интегрального оператора Фредгольма с невырожденным ядром.
10. Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет кратность 5.