МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Х.М. БЕРБЕКОВА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Для специальности: 110200 – Прикладная математика и информатика
Направление: 510200 – Прикладная математика и информатика
Магистерская программа: 510201 – Математическая физика

НАЛЬЧИК 2003

УДК 517.94 (075.3)
ББК 22.161.67 я 73

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор
Кабардино-Балкарской государственной сельскохозяйственной академии
М.М. Хачев

Составители: **Елеев В. А., Балкизов Ж. А., Бориев С. М.**
Лабораторный практикум по интегральным уравнениям. – Нальчик: Каб.-Балк. ун.-т, 2003. – 57 с.

Лабораторный практикум содержит задачи по всем основным разделам курса интегральных уравнений, читаемых в вузах. В каждом разделе задачам предшествуют основные теоретические положения и методические указания, необходимые для решения типовых задач, их решения даются с краткими пояснениями теоретических положений.

Лабораторный практикум предназначен для организации и проведения практических занятий по интегральным уравнениям со студентами 4 курса специальности «Прикладная математика» и направления «Прикладная математика и информатика», обучающиеся по магистерской программе «Математическая физика». Он будет полезен и для студентов вузов с повышенной математической подготовкой, а также для лиц, желающих познакомиться с методами решений основных типов интегральных уравнений.

Рекомендовано РИСом университета

УДК 517.94 (075.3)
ББК 22.161.67 я 73

ГЛАВА 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

§1. Основные понятия

Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{1}$$

где *f(x), K(x,t)* – известные функции, а *φ(x)* – искомая функция, *λ* – числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода*. Функция *K(x,t)* называется *ядром* уравнения Вольтерра. Если *f(x)*=0, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \tag{2}$$

и называется *однородным уравнением Вольтерра второго рода*.

Уравнение

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{3}$$

где *φ(x)* – искомая функция, называют *интегральным уравнением Вольтерра первого рода*. Не нарушая общности, можно считать нижний предел *a* равным нулю, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Решением интегральных уравнений (1), (2) и (3) называют функцию *φ(x)*, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в тождество (по *x*).

Пример 1. Показать, что функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} \tag{3*}$$

является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)dt\,. \tag{4}$$

Решение. Подставляя вместо *φ(x)* в правую часть (4) функцию (3*), будем иметь

$$\frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}dt = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \varphi(x).$$

Таким образом, подставляя (3*) в обе части уравнения (4), получаем тождество по *x*:

$$\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\,.$$

Это означает, согласно определению, что $\varphi(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$ есть решение интегрального уравнения (4).

Задание 1. Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений:

1. $\varphi(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$; $\quad \varphi(x)=\dfrac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2}-\int\limits_0^x\dfrac{3x+2x^3-t}{\left(1+x^2\right)^2}\varphi(t)dt$.

2. $\varphi(x)=e^x(\cos e^x-e^x\sin e^x)$;

$$\varphi(x)=(1-xe^{2x})\cos 1-e^{2x}\sin 1+\int\limits_0^x[1-(x-t)e^{2x}]\varphi(t)dt.$$

3. $\varphi(x)=xe^x$; $\quad \varphi(x)=e^x\sin x+2\int\limits_0^x\cos(x-t)\varphi(t)dt$.

4. $\varphi(x)=x-\dfrac{x^3}{6}$; $\quad \varphi(x)=x-\int\limits_0^x sh(x-t)\varphi(t)dt$.

5. $\varphi(x)=1-x$; $\quad \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt=x$.

6. $\varphi(x)=3$; $\quad x^3=\int\limits_0^x(x-t)^2\varphi(t)dt$.

7. $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}$; $\quad \int\limits_0^x\dfrac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}}=\sqrt{x}$.

8. $\varphi(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{x}}$; $\quad \int\limits_0^x\dfrac{\varphi(t)dt}{\sqrt{x-t}}=1$.

9. $\varphi(x)=\sin x$; $\quad \varphi(x)=x+\int\limits_0^x(t-x)\varphi(t)dt$.

10. $\varphi(x)=\cos x$; $\quad \varphi(x)=1+\int\limits_0^x(t-x)\varphi(t)dt$.

11. $\varphi(x)=e^x$; $\quad \varphi(x)=1-2x-4x^2+\int\limits_0^x[3+6(x-t)-4(x-t)^2]\varphi(t)dt$.

12. $\varphi(x)=e^{2x}-e^{3x}$; $\quad \varphi(x)=29+6x+\int\limits_0^x(6x-6t+5)\varphi(t)dt$.

13. $\varphi(x) = \sin x + x \sin x$; $\quad \varphi(x) = -2\cos x + x + 2 + \int\limits_0^x (t-x)\varphi(t)dt$.

14. $\varphi(x) = e^x$; $\quad \varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi(t)dt$.

§ 2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)u = F(x),\ x > 0 \tag{5}$$

с начальными условиями при x=0

$$u(0) = C_0, \quad u'(0) = C_1, \quad \ldots,\ u^{(n-1)}(0) = C_{n-1} \tag{6}$$

может быть сведено к решению некоторого интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x) + \int\limits_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{7}$$

где

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) - C_{n-1}a_1(x) - (C_{n-1}x + C_{n-2})a_2(x) - \ldots - \\ &- \left(\frac{C_{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_1 x + C_0\right)a_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Это делается следующим образом. Полагаем

$$D^n u \equiv \frac{d^n u}{dx^n} = \varphi(x),$$

и далее, последовательно

$$D^{-1}\varphi = \int\limits_0^x \varphi(t)dt,$$

$$D^{-2}\varphi = D^{-1}(D^{-1}\varphi) = \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt,$$

……………………………………

$$D^{-n}\varphi = D^{-1}(D^{-n+1}) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt.$$

Принимая во внимание условия (6), замечаем, что

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = C_{n-1} + D^{-1}\varphi ,$$

$$\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} = C_{n-1}x + C_{n-2} + D^{-2}\varphi ,$$

……………………………………..

$$u = C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_1 x + C_0 + D^{-n}\varphi .$$

Возвращаясь к дифференциальному уравнению (5), мы видим, что его можно записать в виде (7), где $K(x,t)$, $f(x)$ определяются по формулам (8), (9).

Пример 2. Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$y'' + xy' + y = 0$$

и начальным условиям

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0 .$$

Решение. Полагаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) . \tag{10}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)dt , \qquad y = \int_0^x (x-t)dt + 1 . \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в данное дифференциальное уравнение, найдем

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0 ,$$

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt .$$

Задание 2. Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями:

1. $y'' + y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$
2. $y' - y = 0;\quad y(0) = 1.$
3. $y'' + y = \cos x;\quad y(0) = y'(0) = 0.$
4. $y'' - 5y' + 6y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$
5. $y'' + y = \cos x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$
6. $y'' - y'\sin x + e^x y = x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -1 .$

7. $y'' + (1+x^2)y = \cos x; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2$.

8. $y''' + xy'' + (x^2 - x)y = xe^x + 1; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$

9. $y''' - 2xy = 0; \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = y''(0) = 1.$

§3. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{12}$$

где $K(x,t)$ есть непрерывная функция при $0 \le x \le a,\ 0 \le t \le x$, $f(x)$ – непрерывная при $0 \le x \le a$ функция.

Будем искать решение интегрального уравнения (12) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots. \tag{13}$$

Подставляя формально этот ряд в (12), получим

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots =$$

$$= f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + \lambda^2\varphi_2(t) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(t) + \ldots]dt.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = f(x), \\ &\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x K(x,t)f(t)dt, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1 dt, \ldots.$$

Далее, из (14) следует

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt =$$

$$= \int_0^x f(t_1)dt_1\int_{t_1}^x K(x,t)K(t,t_1)dt = \int_0^x K_2(x,t_1)f(t_1)dt_1,$$

где

$$K_2(x,t_1)=\int\limits_{t_1}^{x}K(x,t)K(t,t_1)dt\,.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varphi_n(x)=\int\limits_{0}^{x}K_n(x,t)f(t)dt,\quad n=1,2,\ldots. \qquad (15)$$

Функции $K_n(x,t)$ называются *повторными* или *итерированными* ядрами. Они, как нетрудно показать, определяются при помощи рекуррентных формул:

$$\begin{aligned}&K_1(x,t)=K(x,t),\\&K_{n+1}(x,t)=\int\limits_{t}^{x}K(x,z)K_n(z,t)dz,\quad n=1,2,\ldots.\end{aligned} \qquad (16)$$

Используя (15) и (16), равенство (13) можно записать в виде:

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^{\nu}\int\limits_{0}^{x}K_{\nu}(x,t)f(t)dt\,.$$

Функция $R(x,t;\lambda)$, определяемая при помощи ряда

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{\nu}K_{\nu+1}(x,t)\,, \qquad (17)$$

называется *резольвентой* (*разрешающим ядром*) интегрального уравнения (12). Ряд (17) сходится абсолютно и равномерно в случае непрерывного ядра $K(x,t)$.

Повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела в интегральном уравнении.

Резольвента $R(x,t;\lambda)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$R(x,t;\lambda)=K(x,t)+\lambda\int\limits_{t}^{x}K(x,s)R(s,t;\lambda)ds\,.$$

С помощью резольвенты решение интегрального уравнения (12) запишется в виде:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int\limits_{0}^{x}R(x,t;\lambda)f(t)dt.$$

Пример 3. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x,t)\equiv 1$.

Решение. Имеем $K_1(x,t)=K(x,t)=1$. Далее, согласно формулам (16), получаем

$$K_2(x,t)=\int\limits_{t}^{x}K(x,z)K_1(z,t)dz=\int\limits_{t}^{x}dz=x-t,$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x 1(z-t)dz=\frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_4(x,t)=\int_t^x 1\frac{(z-t)^2}{2}dz=\frac{(x-t)^3}{3!},$$

……………………………………………

$$K_n(x,t)=\int_t^x 1K_{n-1}(z,t)dz=\int_t^x 1\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, согласно определению

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(x-t)^n}{n!}=e^{\lambda(x-t)}.$$

Предположим теперь, что ядро $K(x,t)$ есть многочлен n-1 степени относительно x-t, так что его можно представить в виде

$$K(x,t)=a_0(x)+a_1(x)(x-t)+\ldots+\frac{a_{n-1}(x)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

причем $a_к(x)\in C[0,a]$, $к=0,1,\ldots, n-1$.

Если определить функцию $u(x,t;\lambda)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n}-\lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)u\right]=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{x=t}=u'\big|_{x=t}=\ldots=u^{(n-2)}\big|_{x=t}=0,$$
$$u^{(n-1)}\big|_{x=t}=1,$$

то резольвента будет определяться равенством

$$R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{d^n u(x,t;\lambda)}{dx^n}.$$

Аналогично, в случае, когда

$$K(x,t)=b_0(t)+b_1(t)(t-x)+\ldots+\frac{b_{n-1}(t)(t-x)^{n-1}}{(n-1)!},$$

резольвента определяется следующим образом

$$R(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\frac{d^n u(x,t;\lambda)}{dt^n},$$

где $u(x,t;\lambda)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^n u}{dx^n}+\lambda\left[b_0(t)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+b_1(t)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\ldots+b_{n-1}(t)u\right]=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{x=t} = u'\big|_{x=t} = \ldots = u^{(n-2)}\big|_{x=t} = 0,\ u^{(n-1)}\big|_{x=t} = 1.$$

Задание 3. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами:

1. $K(x,t) = x - t$.
2. $K(x,t) = e^{x-t}$.
3. $K(x,t) = e^{x^2 - t^2}$.
4. $K(x,t) = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}$.
5. $K(x,t) = \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$.
6. $K(x,t) = \dfrac{chx}{cht}$.
7. $K(x,t) = 2 - (x - t)$.
8. $K(x,t) = -2 + 3(x - t)$.
9. $K(x,t) = -\dfrac{4x-2}{2x+1} + \dfrac{8(x-t)}{2x+1}$.
10. $K(x,t) = \sin x$.
11. $K(x,t) = shx$.
12. $K(x,t) = e^{-(x-t)}$.
13. $K(x,t) = 2x$.
14. $K(x,t) = chx$.
15. $K(x,t) = 2\cos x$.

§ 4. Интегральное уравнение Абеля и его обобщения

Интегральным уравнением Абеля называется уравнение вида

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = f(x), \tag{18}$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция, а $f(x)$ – заданная функция, которая относится к интегральному уравнению Вольтерра первого рода.

Более общим уравнением Абеля (обобщенным уравнением Абеля) является уравнение вида

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt = f(x), \tag{19}$$

где α – постоянная, $0<\alpha<1$.

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на некотором отрезке $[0, a]$ и решение уравнения (19) существует, тогда его можно найти следующим образом. Заменив в уравнении (19) x на s, умножим обе части полученного равенства на $\frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ и проинтегрируем по s от 0 до x:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds. \tag{20}$$

В левой части равенства (20) сделаем перестановку порядка интегрирования. Будем иметь

$$\int_0^x \varphi(t)dt\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = g(x), \tag{21}$$

где

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds.$$

Во внутреннем интеграле (21) сделаем подстановку $s=t+y(x-t)$:

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\ .$$

Тогда из уравнения (21) имеем

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}g(x)$$

или

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}g'(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right)'_x. \tag{22}$$

Итак, единственное решение уравнения (21) дается формулой (22), которую с помощью интегрирования по частям можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right].$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)dt = x^\lambda \tag{23}$$

($\lambda \geq 0, \quad \beta > 1$ - вещественное), являющееся в некотором смысле дальнейшим обобщением уравнения Абеля (19).

Умножим обе части (23) на $(z-x)^\mu \quad (\mu > -1)$ и проинтегрируем по x от 0 до z:

$$\int_0^z (z-x)^\mu \left(\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t)dt \right) dx = \int_0^z x^\lambda (z-x)^\mu dx. \tag{24}$$

Полагая в интеграле в правой части (24) $x = \rho z,$ получим

$$\int_0^z x^\lambda (z-x)^\mu dx = z^{\lambda+\mu+1} \int_0^1 \rho^\lambda (1-\rho)^\mu d\rho =$$

$$z^{\lambda+\mu+1} B(\lambda+1, \mu+1) = z^{\lambda+\mu+1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \tag{25}$$

$$(\lambda+\mu+1 > \lambda \geq 0).$$

Меняя порядок интегрирования в левой части (24), получим

$$\int_0^z \left(\int_0^x (z-x)^\mu (x-t)^\beta \varphi(t)dt \right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta dx \right) \varphi(t)dt. \tag{26}$$

Положим во внутреннем интеграле правой части (26) $x = t + (z-t)\xi$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &\int_t^z (z-x)^\mu (x-t)^\beta dx = (z-t)^{\mu+\beta+1} \int_0^1 \xi^\beta (1-\xi)^\mu d\xi = \\ &= (z-t)^{\mu+\beta+1} B(\beta+1, \mu+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} (z-t)^{\beta+\mu+1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Учитывая (25), (26), (27), из равенства (24) найдем

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^z (z-t)^n \varphi(t)dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+\mu+1}. \tag{28}$$

Выберем μ так, чтобы $\mu+\beta+1=n$ равнялось неотрицательному целому числу. Тогда из (28) будем иметь

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^z (z-t)^n \varphi(t)dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}$$

или

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} \varphi(t)dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}. \tag{29}$$

Дифференцируя обе части (29) n+1 раз по z, получим

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)...(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)}z^{(\lambda-\beta-1)}$$

или для $\lambda-\beta+k\neq 0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,...,\ n)$

$$\varphi(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)}z^{\lambda-\beta-1}\ . \qquad (30)$$

Это и есть решение интегрального уравнения (23).

Пример 4. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt=x^2\ .$$

Решение. В данном случае β=1, λ=2. Так как λ-β+k≠0 (k=0,1,..,n), то по формуле (30) получаем

$$\varphi(x)=\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)}x^{2-1-1}=2.$$

Задание 4. Решить следующие интегральные уравнения Абеля:

1. $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt=x^n \quad (0<\alpha<1)$.
2. $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1/2}}dt=\sin x$.
3. $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1/2}}dt=e^x$.
4. $\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1/2}}dt=x^{1/2}$.
5. $\int_0^x (x-t)^{1/3}\varphi(t)dt=x^{4/3}-x^2$.
6. $\int_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)dt=\pi x$.
7. $\int_0^x (x-t)^{1/4}\varphi(t)dt=x+x^2$.
8. $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt=x^3$.
9. $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$.

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Уравнения Фредгольма. Основные понятия

Линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ – неизвестная функция, $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, x, t – действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b), λ – числовой множитель.

Функция $K(x,t)$ называется *ядром* интегрального уравнения (1). Предполагается, что ядро $K(x,t)$ определено в квадрате $\Omega = \{ a \le x \le b, a \le t \le b \}$ на плоскости (x, t) и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным*; если же $f(x) = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{2}$$

и называется *однородным*.

Интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{3}$$

не содержащее искомой функции $\varphi(x)$ вне интеграла, называется *интегральным уравнением Фредгольма первого рода.*

Решением интегральных уравнений (1), (2), (3) называется любая функция $\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнения последние обращаются в тождество относительно $x \in (a,b)$.

Пример 1. Показать, что функция $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \frac{x}{2},$$

где ядро *K(x, t)* имеет вид

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\le x\le t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\le x\le 1.\end{cases}$$

Решение. Левую часть уравнения запишем в виде

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt+\int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x\frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)dt+\int_x^1\frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)dt\right\}=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{2-x}{2}\int_0^x t\varphi(t)dt+\frac{x}{2}\int_x^1(2-t)\varphi(t)dt\right\}.$$

Подставляя в полученное выражение вместо *φ(x)* функцию $sin\dfrac{\pi x}{2}$, будем иметь

$$sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\frac{sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt+x\int_x^1(2-t)\frac{sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\}=$$

$$=sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left(-\frac{2-t}{\pi}cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}.$$

Итак, получаем $\dfrac{x}{2}\equiv\dfrac{x}{2}$, а это означает, согласно определению, что $\varphi(x)=sin\dfrac{\pi x}{2}$ есть решение данного интегрального уравнения.

Задание 5. Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных интегральных уравнений:

1. $\varphi(x)=1,\quad \varphi(x)+\int_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)dt=e^x-x.$

2. $\varphi(x)=2e^x\left(x-\dfrac{1}{3}\right),\quad \varphi(x)+2\int_0^1 e^{x-t}\varphi(t)dt=2xe^x$.

3. $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\dfrac{\pi}{2}},\quad \varphi(x)-\int\limits_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=1.$

4. $\varphi(x)=\sqrt{x},\quad \varphi(x)-\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=\sqrt{x}+\dfrac{x}{15}(4x^{3/2}-7),$

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2},\ 0\le x\le t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2},\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

5. $\varphi(x)=e^x,\quad \varphi(x)+\lambda\int\limits_0^1 \sin xt\varphi(t)dt=1.$

6. $\varphi(x)=\cos x,\quad \varphi(x)-\int\limits_0^{\pi}(x^2+t)\cos t\varphi(t)dt=\sin x.$

7. $\varphi(x)=xe^{-x},\quad \varphi(x)-4\int\limits_0^{\infty}e^{-(x+t)}\varphi(t)dt=(x-1)e^{-x}.$

8. $\varphi(x)=\cos 2x,\quad \varphi(x)-3\int\limits_0^{\pi}K(x,t)\varphi(t)dt=\cos x,$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t,\ \ 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x,\ t\le x\le \pi.\end{cases}$$

9. $\varphi(x)=x,\quad \varphi(x)=\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 xt\varphi(t)dt$.

10. $\varphi(x)=x,\quad \varphi(x)=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1(t+x)\varphi(t)dt.$

11. $\varphi(x)=e^x,\quad \varphi(x)=e^x-\dfrac{e}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\varphi(t)dt.$

12. $\varphi(x)=\sin x,\quad \varphi(x)=\sin x-\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{1/2}tx\varphi(t)dt.$

13. $\varphi(x)=x+\dfrac{1}{4},\quad \varphi(x)=x+\int\limits_0^{1/2}\varphi(t)dt.$

14. $\varphi(x)=e^x,\quad \varphi(x)=\dfrac{3}{2}e^x-\dfrac{xe^x}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 t\varphi(t)dt.$

15. $\varphi(x)=\dfrac{4C}{\pi}\sin x,\quad \varphi(x)-\dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\sin x\dfrac{\sin^2 t}{t}\varphi(t)dt=0,\quad C$ – произвольная постоянная.

§ 2. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x) . \qquad (4)$$

Решение неоднородного линейного уравнения Фредгольма второго рода (4) может быть представлено в форме

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt , \qquad (5)$$

где функция $R(x,t;\lambda)$ является резольвентой (резольвентой Фредгольма) уравнения (4) (или его ядра $K(x,t)$). Резольвента может быть найдена посредством итерированных ядер, смысл которых определяется представлением искомого решения в виде выражения

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) ,$$

которое соответствует методу последовательных приближений при бесконечном числе итерационных шагов и где функции $\varphi_n(x)$ выражаются формулами

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt = \int_a^b K_2(x,t) f(t)dt,$$

$$\varphi_3(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi_2(t)dt = \int_a^b K_3(x,t) f(t)dt,$$

………………………………………………………

Функции

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)K_1(s,t)ds,$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,s)K_2(s,t)ds, \qquad (6)$$

……………………………………

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,s)K_{n-1}(s,t)ds$$

представляют собой $2^{-е}$, $3^{-е}, ..., n^{-е}$ итерированные ядра, причем $K_1(x,t) \equiv K(x,t)$.

Функции, определяемые по формулам (6), называются *итерированными ядрами.*

Произвольное итерированное ядро подчиняется соотношению

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s) K_{n-m}(s,t) ds, \tag{7}$$

в котором $m<n$.

Резольвента интегрального уравнения (4) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,t), \tag{8}$$

где ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана* ядра $K(x,t)$. Он сходится для $|\lambda| < \frac{1}{B}$, где

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt}.$$

Таким образом, решение уравнения Фредгольма второго рода (4) выражается формулой (5).

Пример 1. Найти резольвенту уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt = f(x).$$

Решение. Пользуясь формулами (7), найдем

$$K_1(x,t) = e^{x-t},$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 e^{x-s} e^{s-t} ds = e^{x-t}$$

и т. д., то есть все итерированные ядра совпадают с исходным ядром.

Тогда, согласно формуле (8)

$$R(x,t;\lambda) = e^{x-t}(1+\lambda+\lambda^2+...) = \frac{e^{x-t}}{\lambda-1}$$

и решение уравнения при $\lambda \neq 1$ записывается в виде

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\lambda-1} e^x \int_0^1 e^{-t} f(t) dt.$$

Пример 2. Найти итерированные ядра для ядра $K(x,t)=x-t$, если $a=0$, $b=1$.

Решение. Пользуясь формулами (7), найдем последовательно

$$K_1(x,t)=x-t,$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1(x-s)(s-t)ds=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3},$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1(x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=-\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1(x-s)(s-t)ds=-\frac{1}{12}K_2(x,t)=-\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right),$$

$$K_5(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1(x-s)\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)ds=-\frac{1}{12}K_3(x,t)=\frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x,t)=\frac{1}{12^2}\int_0^1(x-s)(s-t)ds=\frac{K_2(x,t)}{12^2}=\frac{1}{12^2}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right).$$

Таким образом, итерированные ядра имеют вид:

1) при n=2k-1

$$K_{2k-1}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t);$$

2) при n=2k

$$K_{2k}(x,t)=\frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right),$$

где k=1, 2, 3,… .

Пример 3. Построить резольвенту для уравнения

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\pi sin(x-t)\varphi(t)dt+f(x).$$

Решение. Имеем

$$K_1(x,s)=K(x,s)=sin(x-s),$$

$$K_2(x,s)=\int_0^\pi sin(x-t)sin(t-s)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left[cos(x+s-2t)-cos(x-s)\right]dt=-\frac{\pi}{2}cos(x-s),$$

$$K_3(x,s)=\int_0^\pi sin(x-t)\left[-\frac{\pi}{2}cos(t-s)\right]dt=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\int_0^\pi\left[sin(x-s)+sin(x+s-2t)\right]dt=-\frac{\pi^2}{4}sin(x-s).$$

Очевидно, что

$$K_{2m+1}(x,s) = \left(-1\right)^{m+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} sin(x-s),$$

$$K_{2m}(x,s) = (-1)^{m+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} cos(x-s),\ для\ m = 1,2,\dots\ .$$

Таким образом, получаем

$$R(x,s;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) = sin(x-s)\left[1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 - \dots\right] -$$

$$-\lambda\frac{\pi}{2} cos(x-s)\left[1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 - \dots\right].$$

При $\left|\lambda\right|\frac{\pi}{2} < 1$ ряды, стоящие в квадратных скобках, сходятся и представляют собой геометрические прогрессии. Отсюда при $\left|\lambda\right| < \frac{2}{\pi}$ получим

$$R(x,s;\lambda) = \frac{sin(x-s) - \frac{\lambda\pi}{2} cos(x-s)}{1 + \left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Задание 6. Найти итерированные ядра указанных ниже ядер при заданных a и b:

1. $K(x,t) = x - t;\quad a = -1,\ b = 1.$
2. $K(x,t) = \left(x-t\right)^2;\quad a = -1,\ b = 1\ \ (n = 2, 3).$
3. $K(x,t) = x + sin t;\quad a = -\pi,\ b = \pi\ .$
4. $K(x,t) = xe^t;\quad a = 0,\ b = 1.$
5. $K(x,t) = e^x cos t;\quad a = 0,\ b = \pi\ .$
6. $K(x,t) = e^{x-t};\quad a = -1,\ b = 1\ .$
7. $K(x,t) = xt;\quad a = 0,\ b = 1.$
8. $K(x,t) = e^{x+t};\quad a = 0,\ b = 1.$
9. $K(x,t) = sin x\, cos t;\quad a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}\ .$
10. $K(x,t) = xe^t;\quad a = -1,\ b = 1.$
11. $K(x,t) = x^2 t^2;\quad a = -1,\ b = 1.$

12. $K(x,t) = xt + x^2t^2; \quad a = -1,\ b = 1$.

13. $K(x,t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t; \ a = 0, \quad b = 2\pi$.

14. $K(x,t) = 1 + (2x-1)(2t-1); \quad a = 0, \quad b = 1$.

§3. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Ядро $K(x,t)$, представимое конечной суммой вида

$$K(x,t) = \sum_{n-1}^{N} a_n(x) b_n(t),$$

называется *вырожденным ядром*. Здесь функции $a_n(x),\ b_n(t),\quad n = 1,2,...,N$ будем считать непрерывными в квадрате $a \le x,\ t \le b$ и линейно-независимыми между собой.

Рассмотрим интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} a_n(x) b_n(t) \right] \varphi(t) dt = f(x)$$

или

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{n=1}^{N} C_n a_n + f(x), , \tag{9}$$

где

$$C_n = \int_a^b b_n(t) \varphi(t) dt .$$

Подставим $\varphi(x)$ в виде суммы (9) в последнее соотношение. Получим

$$C_m = \int_a^b b_m(t) \left[\lambda \sum_{n=1}^{N} a_n(t) C_n \right] dt = \lambda \sum_{n=1}^{N} C_n P_{nm} , \tag{10}$$

где

$$P_{nm} = \int_a^b a_n(t) b_m(t) dt .$$

В результате мы пришли к системе однородных алгебраических уравнений (10) относительно C_m. Нас интересует нетривиальное решение системы (10). Последнее возможно, если

$$det\{\delta_{nm} - \lambda P_{nm}\} = 0 .$$

Это соотношение является алгебраическим уравнением N-й степени относительно λ.

Отсюда следует утверждение: вырожденное ядро имеет конечное число собственных значений.

Пример 1. Уравнение

$$\varphi(x)-\int_0^1(1+2xt)\varphi(t)dt=-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2},$$

содержащее вырожденное ядро, позволяет представить решение в виде

$$\varphi(x)=C_1+2xC_2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2},$$

$$C_1=\int_0^1\varphi(t)dt,\ C_2=\int_0^1 t\varphi(t)dt.$$

Для определения постоянных C_1, C_2 составляется система уравнений

$$C_1=\int_0^1\left(C_1+2xC_2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}\right)dx,$$

$$C_2=\int_0^1 x\left(C_1+2xC_2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}\right)dx,$$

решение которой есть

$$C_1=1,\ C_2=\frac{7}{12}.$$

Это позволяет найти искомую функцию

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=1+\lambda\int_0^1(t-s)\varphi(s)ds.$$

Здесь

$$b_1\equiv 1,\ \ b_2=-s.$$

Решение. Положим

$$C_1=\int_0^1\varphi(s)ds,\quad C_2=\int_0^1(-s)\varphi(s)ds.$$

Тогда

$$\varphi(x)=1+\lambda C_1t+\lambda C_2. \tag{11}$$

Умножим обе части (11) последовательно на $b_1(t),\ b_2(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до 1, получим

$$\int_0^1\varphi(t)dt=\int_0^1 dt+\lambda C_1\int_0^1 tdt+\lambda C_2\int_0^1 dt,$$

$$\int_0^1(-t)\varphi(t)dt=\int_0^1(-t)\varphi(t)dt+\lambda C_1\int_0^1(-t^2)dt+\lambda C_2\int_0^1(-t)dt$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)-\lambda C_2=1, \\ C_1\dfrac{\lambda}{3}+\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)C_2=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{12}\neq 0,$$

при любых действительных λ.

По формуле Крамера находим

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\dfrac{1}{2} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)}=\frac{12}{12+\lambda^2},\quad C_2=\frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda/2 & 1 \\ \dfrac{\lambda}{3} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix}}{D(\lambda)}=-\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2}.$$

В силу (11) имеем

$$\varphi(t)=1+\frac{12\lambda t}{12+\lambda^2}-\frac{6\lambda+\lambda^2}{12+\lambda^2}=\frac{6(2+2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2},$$
$$\text{если } \lambda\neq\pm 2i\sqrt{3}.$$

Пример 3. Решить интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)dt+ \\ +\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t\,dt+x.\end{aligned} \tag{12}$$

Решение. Введем обозначения

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt,\ C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)dt,\ C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t\,dt, \tag{13}$$

где C_1, C_2, C_3 – неизвестные постоянные. Тогда равенство (12) примет вид

$$\varphi(x)=C_1\lambda x+C_2\lambda\sin x+C_3\lambda\cos x+x. \tag{14}$$

Подставляя выражение (14) в равенства (13) , получим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)\cos t dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)t^2 dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda \sin t + C_3\lambda \cos t + t)\sin t dt,$$

или

$$C_1\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t dt\right) - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \sin t\cos t dt - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t\cos t dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + C_2\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t dt\right) - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t dt - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt + C_3\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\sin t dt\right) = \int_{-\pi}^{\pi} t\sin t dt.$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 - \lambda\pi C_3 = 0, \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 = 0, \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 = 2\pi. \end{cases} \tag{15}$$

Определитель этой системы отличен от нуля

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2(\lambda\pi)^2 \neq 0 .$$

Следовательно, система (15) имеет решение

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1 + 2(\lambda\pi)^2}, \quad C_2 = \frac{8\lambda\pi^2}{1 + 2(\lambda\pi)^2}, \quad C_3 = \frac{2\pi}{1 + 2(\lambda\pi)^2} .$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 в (14), получим решение интегрального уравнения (12):

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1 + 2(\lambda\pi)^2}\left(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x\right) + x.$$

Задание 7. Решить следующие интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

1. $\varphi(x) - 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\varphi(t)dt = 2x - \pi.$

2. $\varphi(x)-\int\limits_{-1}^{1} e^{\arcsin x}\varphi(t)dt = tgx.$

3. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} tgt\varphi(t)dt = ctgx.$

4. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1} \cos(q\ln t)\varphi(t)dt = 1.$

5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1} \arccos t\varphi(t)dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

6. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1} (x\ln t - t\ln x)\varphi(t)dt = \dfrac{6}{5}(1-4x).$

7. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin x\cos t\varphi(t)dt = \sin x.$

8. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi} \sin(x-t)\varphi(t)dt = \cos x.$

9. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{2\pi} (\sin x\cos t - \sin 2x\cos 2t + \sin 3x\cos 3t)\varphi(t)dt = \cos x.$

10. $\varphi(x)-\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left[x-\dfrac{1}{2}(3t^2-1)+\dfrac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\varphi(t)dt = 1.$

11. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1} (1+xt)\varphi(t)dt = x^2.$

12. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{\pi} (1+\sin x\sin t)\varphi(t)dt = x.$

13. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1} (1+x+t)\varphi(t)dt = x.$

14. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{0}^{1} (x-t)^2\varphi(t)dt = x.$

ГЛАВА 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

Однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{1}$$

всегда имеет очевидное решение $\varphi(x) \equiv 0$, которое называют *нулевым (тривиальным)* решением.

Значения параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения $\varphi(x) \neq 0$, называются *характеристическими* числами (*собственными значениями*) уравнения (1) или ядра $K(x,t)$, а каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ.

Число $\lambda=0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda=0$ из (1) следует, что $\varphi(x) = 0$.

Если ядро $K(x,t)$ непрерывно в квадрате $\Omega = \{ a \le x,t \le b \}$ или квадратично суммируемо в Ω, причем числа a и b конечные, то каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно-независимых собственных функций; число таких функций называется *рангом* характеристического числа.

Разные характеристические числа могут иметь разные ранги.

Для уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} a_n(x) b_n(t) \right] \varphi(t)dt = 0 \tag{2}$$

характеристические числа являются корнями алгебраического уравнения

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1N} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{N1} & -\lambda a_{N2} & \dots & 1-\lambda a_{NN} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

степень которого $P \le N$. Здесь $D(\lambda)$ – определитель однородной линейной системы

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1N}C_N = 0, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2N}C_N = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{N1}C_1 - \lambda a_{N2}C_2 - \dots + (1-\lambda a_{NN})C_N = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где величины a_{ij} и C_i $(i,j=1,2,\dots,N)$ имеют тот же смысл, что и в §6 предыдущей главы.

Если уравнение (3) имеет P корней $(1 \le P \le N)$, то интегральное уравнение (2) имеет P характеристических чисел λ_i $(i=1,2,\ldots,P)$, каждому из которых соответствует ненулевое решение

$$C_1^{(1)},\ C_2^{(1)},\ldots\ C_N^{(1)} \to \lambda_1,$$

$$C_1^{(2)},\ C_2^{(2)},\ldots\ C_N^{(2)} \to \lambda_2,$$

....

$$C_1^{(p)},\ C_2^{(p)},\ldots\ C_N^{(p)} \to \lambda_p$$

системы (4). Соответствующие этим решениям ненулевые решения интегрального уравнения (2), т.е. собственные функции, будут иметь вид

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n^1 a_n(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n^2 a_n(x), \ldots, \varphi_p(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n^p a_n(x)\ .$$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром имеет не более N характеристических чисел и соответствующих им собственных функций.

Пример 1. Требуется определить собственные функции и собственные значения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x-t)\varphi(t)dt\ , \tag{5}$$

в котором ядро $K(x,t)=x-t=x1-1t$ – вырожденное и несимметричное.

Решение. Правая часть (5) представляет собой полином первой степени относительно x. Следовательно, решение ищем в виде $\varphi(x) = C_1 x + C_2$. Подставляя это выражение для $\varphi(x)$ в (5), получаем

$$C_1 x + C_2 = \lambda \int_0^1 (x-t)(C_1 t + C_2)dt = \lambda \left[x\left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) - \left(\frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} \right) \right].$$

Приравнивая коэффициенты при нулевой и первой степенях x справа и слева в этом соотношении, будем иметь

$$\begin{cases} C_1 = \lambda\left(\dfrac{C_1}{2} + C_2 \right), \\ C_2 = -\lambda\left(\dfrac{C_1}{3} + \dfrac{C_2}{2} \right). \end{cases} \tag{6}$$

Нетривиальное решение этой системы алгебраических уравнений существует, если определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 0\ .$$

Отсюда имеем $\lambda = \pm i\sqrt{12}$. При этом из (6) следует, что $C_1 = C_2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Таким образом, получаются два решения

$$\lambda_1 = i\sqrt{12}, \qquad \varphi_1(x) = C\left[\sqrt{12} + 3x(i - \sqrt{3})\right],$$
$$\lambda_2 = -i\sqrt{12}, \qquad \varphi_2(x) = C\left[\sqrt{12} - 3x(i + \sqrt{3})\right],$$

где C – произвольная постоянная.

Комплексные собственные значения получились в результате того, что ядро $K(x,t)=x-t$ не является симметричным.

Пример 2. Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (x^2t^2 - 1)\varphi(t)dt. \tag{7}$$

Ядро $K(x,t) = x^2t^2 - 1$ является симметричным и вырожденным.

Решение. Решение уравнения (7) ищем в виде $\varphi(x) = C_1x^2 + C_2$. Имеем

$$C_1x^2 + C_2 = \lambda\int_0^1 (x^2t^2 - 1)(C_1t^2 + C_2)dt.$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^0, получим

$$\begin{cases} C_1 = \lambda\int_0^1 t^2(C_1t^2 + C_2)dt = \lambda\left(\frac{C_1}{5} + \frac{C_2}{3}\right), \\ C_2 = -\lambda\int_0^1 (C_1t^2 + C_2)dt = \lambda\left(-\frac{C_1}{3} - C_2\right). \end{cases} \tag{7*}$$

Нетривиальное решение системы (7^*) алгебраических уравнений относительно C_1, C_2 существует при условии, что

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda}{3} \\ \frac{\lambda}{3} & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим

$$\lambda_1 = \frac{9 + 3\sqrt{14}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{9 - 3\sqrt{14}}{2}.$$

Из первого уравнения алгебраической системы (7^*) следует, что

$$C_2 = 3C_1\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{5}\right).$$

Таким образом, получаются две собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2$:

$$\varphi_1(x)=C_1\left(x^2+\frac{2}{3+\sqrt{14}}-\frac{3}{5}\right),\quad \varphi_2(x)=C_1\left(x^2+\frac{2}{3-\sqrt{14}}-\frac{3}{5}\right).$$

Значение C_1 можно найти из условия

$$\int_0^1 \varphi_i^2(x)dx=1\,.$$

Собственные функции φ_1 *и* φ_2 отвечают различным собственным значениям. Проверим ортогональность φ_1 *и* φ_2:

$$\frac{1}{C_1^2}\int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx=\int_0^1\left[\left(x^2-\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{3+\sqrt{14}}\right]\left[\left(x^2-\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{3-\sqrt{14}}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\left(x^2-\frac{3}{5}\right)^2+\left(x^2-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3+\sqrt{14}}+\frac{2}{3-\sqrt{14}}\right)+\frac{2}{3+\sqrt{14}}\frac{2}{3-\sqrt{14}}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[x^4-\frac{6}{5}x^2+\frac{9}{25}+\left(x^2-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{5}\right)-\frac{4}{5}\right]dx=\int_0^1\left(x^4-\frac{18}{5}x^2+1\right)dx=0.$$

Пример 3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi\left(\cos^2 x\cos 2t+\cos 3x\cos^3 t\right)\varphi(t)dt=0\,.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x)=\lambda\cos^2 x\int_0^\pi \varphi(t)\cos 2t dt+\lambda\cos 3x\int_0^\pi \varphi(t)\cos^3 t dt.$$

Введем обозначения

$$C_1=\int_0^\pi \varphi(t)\cos 2t dt,\quad C_2=\int_0^\pi \varphi(t)\cos^3 t dt\,. \tag{8}$$

Будем иметь

$$\varphi(x)=C_1\lambda\cos^2 x+C_2\lambda\cos 3x\,. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим линейную систему однородных уравнений

$$
\begin{cases}
C_1\left(1-\lambda\int\limits_0^{\pi} cos^2 t\, cos\, 2tdt\right)-C_2\lambda\int\limits_0^{\pi} cos\, 3t\, cos\, 2tdt=0, \\
-C_1\lambda\int\limits_0^{\pi} cos^5\, tdt+C_2\left(1-\lambda\int\limits_0^{\pi} cos^3\, t\, cos\, 3tdt\right)=0.
\end{cases} \tag{10}
$$

Так как

$$
\int\limits_0^{\pi} cos^2\, t\, cos\, 2tdt=\frac{\pi}{4},\quad \int\limits_0^{\pi} cos\, 3t\, cos\, 2tdt=0,
$$

$$
\int\limits_0^{\pi} cos^5\, tdt=0,\quad \int\limits_0^{\pi} cos^3\, t\, cos\, 3tdt=\frac{\pi}{8},
$$

то система (10) примет вид

$$
\begin{cases}
\left(1-\frac{\lambda\pi}{4}\right)C_1=0, \\
\left(1-\frac{\lambda\pi}{8}\right)C_2=0.
\end{cases} \tag{11}
$$

Уравнение для нахождения характеристических чисел

$$
D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda\pi}{4} & 0 \\ 0 & 1-\frac{\lambda\pi}{8} \end{vmatrix}=0\ .
$$

Характеристические числа $\lambda_1=\frac{4}{\pi},\ \lambda_2=\frac{8}{\pi}$. При $\lambda_1=\frac{4}{\pi}$ система (11) примет вид

$$
\begin{cases}
0C_1=0, \\
\frac{1}{2}C_2=0.
\end{cases}
$$

Отсюда C_2=0, C_1 – произвольно. Собственная функция будет $\varphi_1(x)=C_1\lambda\, cos^2\, x$, или, полагая $C_1\lambda=1$, получим $\varphi_1(x)=cos^2\, x$. При $\lambda=8/\pi$ система (11) примет вид

$$
\begin{cases}
(-1)C_1=0, \\
0C_2=0.
\end{cases}
$$

Отсюда C_1=0, C_2 – произвольно, и значит, собственная функция будет $\varphi_2(x)=C_2\lambda\, cos\, 3x$ или, полагая $C_2\lambda=1$, получим $\varphi_2(x)=cos\, 3x$.

Итак, характеристические числа $\lambda_1 = \dfrac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \dfrac{8}{\pi}$; соответствующие им собственные функции $\varphi_1(x) = \cos^2 x$, $\varphi_2(x) = \cos 3x$.

Пример 4. Однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (3x-2)t\varphi(t)dt = 0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Решение. В самом деле, имеем

$$\varphi(x) = \lambda(3x-2)\int_0^1 t\varphi(t)dt .$$

Полагая

$$C = \int_0^1 t\varphi(t)dt , \tag{12}$$

получим

$$\varphi(x) = C\lambda(3x-2) . \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим

$$\left[1 - \lambda\int_0^1 (3t^2 - 2t)dt\right]C = 0 . \tag{14}$$

Но, так как

$$\int_0^1 (3t^2 - 2t)dt = 0 ,$$

то уравнение (14) дает C=0, и, следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$.

Итак, данное уравнение при любых λ имеет только одно нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$, а значит, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Пример 5. Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\sqrt{x}\,t - \sqrt{t}\,x\right)\varphi(t)dt = 0$$

не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Решение. В самом деле, имеем

$$\varphi(x) = C_1\lambda\sqrt{x} - C_2\lambda x\,, \tag{15}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)dt \quad , \; C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\varphi(t)dt \quad . \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), после несложных преобразований получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{2}{5}\lambda\right)C_1 + \dfrac{\lambda}{3}C_2 = 0, \\ -\dfrac{\lambda}{2}C_1 + \left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right)C_2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Определитель этой системы равен

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{2}{5}\lambda & \dfrac{\lambda}{3} \\ -\dfrac{\lambda}{2} & 1 + \dfrac{2}{5}\lambda \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{150}\,.$$

При действительных λ он не обращается в нуль, так что из (17) получаем C_1=0, C_2=0, а значит, для всех действительных λ данное уравнение имеет только одно решение, а именно – нулевое $\varphi(x) \equiv 0$.

Итак, данное уравнение не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Задание 8. Найти характеристические числа и собственные функции следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

1. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\varphi(t)dt = 0$.

2. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \sin t\varphi(t)dt = 0$.

3. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t\varphi(t)dt = 0$.

4. $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \cos(x+t)\varphi(t)dt = 0$.

5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(45x^2\ln t-9t^2\ln x\right)\varphi(t)dt=0$.

6. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(2xt-4x^2\right)\varphi(t)dt=0$.

7. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(5xt^3+4x^2t\right)\varphi(t)dt=0$.

8. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(5xt^3+4x^2t+3xt\right)\varphi(t)dt=0$.

9. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(xcht-tshx\right)\varphi(t)dt=0$.

10. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(xcht-t^2shx\right)\varphi(t)dt=0$.

11. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^1\left(xcht-tchx\right)\varphi(t)dt=0$.

§2. Характеристические числа и собственные функции интегральных уравнений с симметрическим ядром

Симметричным называется ядро, совпадающее со своим сопряженным. Такое ядро характеризуется тождеством $K(x,t)=\overline{K(x,t)}$. Если ядро действительное, то его симметричность определяется равенством $K(x,t)=K(t,x)$. Интегральное уравнение с симметричным ядром называется *симметричным*. Если ядро симметрично, то, как легко проверить, все его итерированные ядра также симметричны.

Для интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0 \qquad (18)$$

с симметрическим ядром $K(x,t)$ имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Если ядро $K(x,t)$ уравнения (18) симметричное и не равно тождественно нулю, то оно имеет, по крайней мере, одно действительное характеристическое число.

Теорема 2. Каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число k линейно-независимых собственных функций уравнения (18), причем $k \le \lambda^2 B^2$, где

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt.$$

Число k называется *рангом* или *кратностью* характеристического числа.

Теорема 3. Каждая пара собственных функций $\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x)$, соответствующих различным характеристическим числам $\lambda_1 \ne \lambda_2$, ортогональна, т.е.

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0 .$$

Теорема 4. В каждом конечном интервале оси λ находится конечное число характеристических чисел. Число n характеристических чисел, лежащих в интервале $-l < \lambda < l$, определяется неравенством $n \le l^2 B^2$.

Пример 1. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = 0,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t, 0 \le x \le t, \\ \cos t \sin x, t \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение представим в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \lambda \int_x^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt$$

или

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int_0^x \varphi(t)\cos t dt + \lambda \cos x \int_x^{\pi} \varphi(t)\sin t dt . \qquad (19)$$

Дифференцируя обе части (19), находим

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^x \varphi(t)\cos t dt + \lambda \sin x \cos x \varphi(x) -$$

$$-\lambda \sin x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t dt - \lambda \sin x \cos x \varphi(x)$$

или

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^x \varphi(t)\cos t dt - \lambda \sin x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t dt\,. \tag{20}$$

Повторное дифференцирование дает

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin x \int_0^x \varphi(t)\cos t dt + \lambda \cos^2 x \varphi(x) -$$

$$-\lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t dt + \lambda \sin^2 x \varphi(x) = \lambda \varphi(x) -$$

$$-\left[\lambda \sin x \int_0^x \varphi(t)\cos t dt + \lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t dt\right].$$

Выражение в квадратных скобках равно $\varphi(x)$, так что

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) - \varphi(x) = (\lambda - 1)\varphi(x)\,.$$

Из равенств (19) и (20) находим, что $\varphi(\pi) = 0,\ \varphi'(0) = 0$.

Итак, данное интегральное уравнение сводится к следующей краевой задаче:

$$\varphi'' - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0\,, \tag{21}$$

$$\varphi(\pi) = 0,\ \varphi'(0) = 0\,. \tag{22}$$

Рассмотрим три возможных случая:

1. $\lambda = 1$. Уравнение (21) в этом случае принимает вид $\varphi''(x) = 0$, общее решение которого имеет вид $\varphi(x) = C_1 x + C_2$. Удовлетворяя его граничным условиям (22), находим, что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$;

2. $\lambda > 1$. Общее решение уравнение (21) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 ch\sqrt{\lambda - 1}\,x + C_2 sh\sqrt{\lambda - 1}\,x\,, \tag{23}$$

откуда

$$\varphi'(x) = \sqrt{\lambda - 1}\left(C_1 sh\sqrt{\lambda - 1}\,x + C_2 ch\sqrt{\lambda - 1}\,x\right). \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в граничные условия (22), получим систему

$$\begin{cases} C_1 ch\pi\sqrt{\lambda-1} + C_2 sh\pi\sqrt{\lambda-1} = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

из которой снова получаем, что $C_1 = C_2 = 0$, т.е. интегральное уравнение имеет тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$;

3. $\lambda < 1$. Общее решение уравнения (21) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \cos\sqrt{1-\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{1-\lambda}\, x.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi'(x) = \sqrt{1-\lambda}\left(-C_1 \sin\sqrt{1-\lambda}\, x + C_2 \cos\sqrt{1-\lambda}\, x\right).$$

Краевые условия (22) в этом случае дают для нахождения C_1, C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 \cos\pi\sqrt{1-\lambda} + C_2 \sin\pi\sqrt{1-\lambda} = 0, \\ \sqrt{1-\lambda}\, C_2 = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\pi\sqrt{1-\lambda} & \sin\pi\sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

или $\sqrt{1-\lambda}\cos\pi\sqrt{1-\lambda} = 0$. Так как $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$, то $\cos\pi\sqrt{1-\lambda} = 0$. Отсюда находим, что $\pi\sqrt{1-\lambda} = \pi/2 + \pi n$, где n – любое целое число. Все корни уравнения (26) даются формулой

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

При значениях $\lambda = \lambda_n$ система (25) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество ненулевых решений $C_1=C$, $C_2=0$, где C – произвольная постоянная. Следовательно, исходное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений вида

$$\varphi(x) = C\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

которые являются собственными функциями этого уравнения.

Итак, характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения имеют вид

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad \varphi_n(x) = C\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

где n – любое целое число.

Пример 2. Показать, что интегральное уравнение с несимметричным ядром

$$K(x,t) = \sin \pi x \cos \pi t, \quad 0 \le x, t \le 1 \tag{27}$$

не имеет собственных значений.

Решение. Покажем, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sin \pi x \cos \pi t \varphi(t) dt \tag{28}$$

имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0, \ (\lambda \ne 0)$.

В самом деле, перепишем уравнение (28) в виде

$$\varphi(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \varphi(t) dt . \tag{29}$$

Обозначим

$$C = \int_0^1 \cos \pi t \varphi(t) dt .$$

Тогда $\varphi(x) = C\lambda \sin \pi x$. Подставив это выражение для *φ(x)* в обе части (29), получим

$$C\lambda \sin \pi x = C\lambda^2 \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t dt .$$

Так как

$$\int_0^1 \cos \pi t \sin \pi t dt = 0 \text{ ,то } C\lambda \sin \pi x \equiv 0 ,$$

откуда C=0, а значит $\varphi(x) \equiv 0$.

Таким образом, ядро (27) не имеет собственных значений.

Задание 9. Найти характеристические числа и собственные функции однородных интегральных уравнений с симметричными ядрами, если они имеют следующий вид:

1. $K(x,t) = 1 + xt + x^2t^2 , \ -1 \le x, \ t \le 1$.
2. $K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \le x \le t, \\ t(x-1), & t \le x \le 1. \end{cases}$
3. $K(x,t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \le x \le t, \\ x(t+1), & t \le x \le 1. \end{cases}$
4. $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \le x \le t, \\ (t+1)(x-2), & t \le x \le 1. \end{cases}$

5. $K(x,t)=\begin{cases} \sin x\cos t, & 0\le x\le t, \\ \sin t\cos x, & t\le x\le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

6. $K(x,t)=\begin{cases} \sin x\cos t, & 0\le x\le t, \\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi. \end{cases}$

7. $K(x,t)=\begin{cases} \sin x\sin(t-1), & -\pi\le x\le t, \\ \sin t\sin(x-1), & t\le x\le \pi. \end{cases}$

8. $K(x,t)=\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right), & 0\le x\le t, \\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & t\le x\le \pi. \end{cases}$

9. $K(x,t)=\begin{cases} -e^{-t}\operatorname{sh}x, & 0\le x\le t, \\ -e^{-x}\operatorname{sh}t, & t\le x\le 1. \end{cases}$

§3. Неоднородные симметрические уравнения

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \tag{30}$$

с симметрическим ядром $K(x,t)$.

Если $f(x)$ непрерывна и параметр λ не совпадает с характеристическими числами λ_n (n=1,2,...) соответствующего уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=0\,, \tag{31}$$

то уравнение (30) имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\varphi_n(x)\,, \tag{32}$$

где $\varphi_n(x)$ – собственные функции уравнения (31),

$$a_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx\,, \tag{33}$$

причем ряд, стоящий в правой части формулы (32), сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a\le x,\ t\le b$.

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например, $\lambda=\lambda_k$ ранга q (кратность числа λ_k), то уравнение (30), вообще говоря, не имеет решений. Решения существуют тогда и только тогда, когда выполняются q условий

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = 0 \ (m = 1,2,\ldots,q), \tag{34}$$

т.е. когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим характеристическому числу λ_k. В этом случае уравнение (30) имеет бесконечное множество решений, которые содержат q произвольных постоянных, и даются формулой

$$\begin{gathered}\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_k}\varphi_n(x) + C_1\varphi_1(x) + \\ + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x),\end{gathered} \tag{37}$$

где C_1, C_2,… C_q – произвольные постоянные.

В случае вырожденного ядра

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)b_k(t)$$

формулы (32) и (37) будут содержать в правых частях вместо рядов конечные суммы.

Когда правая часть уравнения (30), т.е. функция $f(x)$, будет ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_n(x)$ уравнения (31), то решением уравнения (31) будет являться сама эта функция $\varphi_n(x) = f(x)$.

Пример 1. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x, \tag{38}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), \text{ если } 0 \le x \le t, \\ t(x-1), \text{ если } t \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа и соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \qquad \varphi_n(x) = \sin\pi nx, \ n = 1,2,\ldots.$$

Если $\lambda \ne \lambda_k$, то уравнение (38) имеет решение вида

$$\varphi(x) = x - \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2}\sin\pi nx. \tag{39}$$

Находим коэффициенты Фурье a_n в равенстве (39):

$$a_n = \int_0^1 x \sin \pi n x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

подставляя в (31), получим

$$\varphi(x) = x + \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2\pi^2)} \sin \pi n x .$$

При $\lambda=\lambda_k$ уравнение (38) не имеет решений, так как

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \neq 0 .$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \cos \pi x ,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} (x+1)t, \text{ если } 0 \le x \le t, \\ (t+1)x, \text{ если } t \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа $\lambda_0 = 1,\ \lambda_n = -n^2\pi^2 \ (n = 1,2,...)$. Соответствующие им собственные функции есть

$$\varphi_0(x) = e^x,\ \varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \quad (n = 1,2,...).$$

Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq n^2\pi^2$, то решение данного уравнения будет иметь вид

$$\varphi(x) = \cos \pi x - \lambda \left[\frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} \left(\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \right) \right],$$

и, так как

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos n\pi x dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n = \int_0^1 e^x \cos \pi x \left(\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \right) dx = \begin{cases} 0, n \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, n = 1, \end{cases}$$

то

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)} \left(\sin \pi x + \pi \cos \pi x \right) \right].$$

При λ=1 и $\lambda=-\pi^2$ $(n=1)$ уравнение решений не имеет, так как его правая часть, т.е. функция $\cos\pi x$, не ортогональна к соответствующим собственным функциям

$$\varphi_0(x)=e^x,\ \ \varphi_1(x)=\sin\pi x+\pi\cos\pi x \quad .$$

Если же $\lambda=n^2\pi^2$, где n=2,3,..., то данное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые даются формулой (37):

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}\left(\sin\pi x+\pi\cos\pi x\right)+\right.$$

$$\left.+C\left(\sin n\pi x+\pi\cos n\pi x\right)\right],$$

где C – произвольная постоянная.

В некоторых случаях неоднородное симметрическое интегральное уравнение можно свести к неоднородной краевой задаче. Это возможно сделать тогда, когда ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения является функцией Грина некоторого линейного дифференциального оператора.

Пример 3. Решить уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt=e^x\ , \tag{40}$$

где

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{shx\,sh(t-1)}{sh1},\ \text{если}\ 0\le x\le t,\\[2mm] \dfrac{sht\,sh(x-1)}{sh1},\ \text{если}\ t\le x\le 1.\end{cases}$$

Решение. Данное уравнение перепишем в виде

$$\varphi(x)=e^x+\frac{\lambda sh(x-1)}{sh1}\int_0^x sht\,\varphi(t)dt+\frac{\lambda shx}{sh1}\int_x^1 sh(t-1)\varphi(t)dt\ . \tag{41}$$

Дифференцируя дважды, найдем

$$\varphi'(x)=e^x+\frac{\lambda ch(x-1)}{sh1}\int_0^x sht\,\varphi(t)dt+\frac{\lambda chx}{sh1}\int_x^1 sh(t-1)\varphi(t)dt\ ,$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{\lambda sh(x-1)}{sh1}\int_0^x sht\varphi(t)dt + \frac{\lambda shx}{sh1}\int_x^1 sh(t-1)\varphi(t)dt +$$

$$+\frac{\lambda ch(x-1)}{sh1}shx\varphi(x) - \frac{\lambda chx}{sh1}sh(x-1)\varphi(x)$$

или

$$\varphi'' = \varphi(x) + \lambda\varphi(x).$$

При x=0 и x=1 из (41), имеем $\varphi(0)$=1, $\varphi(1)=e$. Таким образом, получаем задачу

$$\varphi''(x) - (\lambda+1)\varphi(x) = 0, \tag{42}$$

$$\varphi(0) = 1,\ \ \varphi(1) = e. \tag{43}$$

Рассмотрим случаи, когда $\lambda = -1, \lambda > -1,\ \lambda < -1$.

1) Пусть $\lambda = -1$. Уравнение (42) принимает вид $\varphi''(x) = 0$. Его общее решение есть $\varphi(x) = C_1x + C_2$. Учитывая краевые условия (43), получим для нахождения C_1, C_2 систему

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 + C_2 = e, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1 = e-1, C_2 = 1$, и, следовательно, $\varphi(x) = (e-1)x + 1$.з

2) Положим, что $\lambda > -1$. Общее решение уравнение (42) в этом случае имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 ch\sqrt{\lambda+1}x + C_2 sh\sqrt{\lambda+1}x.$$

Краевые условия (43) дают для нахождения C_1, C_2 систему:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 ch\sqrt{\lambda+1} + C_2 sh\sqrt{\lambda+1} = e, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = 1,\ C_2 = \frac{e - ch\sqrt{\lambda+1}}{sh\sqrt{\lambda+1}}.$$

Искомая функция $\varphi(x)$ после несложных преобразований приводится к виду

$$\varphi(x) = \frac{sh\sqrt{\lambda+1}(1-x) + esh\sqrt{\lambda+1}x}{sh\sqrt{\lambda+1}}.$$

3) Пусть $\lambda < -1$. Обозначим $\lambda + 1 = -\mu^2$. Общим решением уравнения (42) будет

$$\varphi(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x .$$

Удовлетворяя краевым условиям (43), получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1 \cos \mu + C_2 \sin \mu = e. \end{cases} \tag{44}$$

Рассмотрим два случая:

а) μ не является корнем уравнения $\sin \mu = 0$. Тогда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu},$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \cos \mu x + \frac{e - \cos \mu}{\sin \mu} \sin \mu x ,$$

где $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

б) μ является корнем уравнения $\sin \mu = 0$, т.е. $\mu = n\pi \ \ (n = 1,2,\dots)$. Система (43) не совместна, а, следовательно, данное уравнение (40) не имеет решений. В этом случае соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) + (1 + n^2\pi^2) \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \tag{45}$$

имеет нетривиальные решения, т.е. числа $\lambda_n = -(1 + n^2\pi^2)$ являются характеристическими числами, а функции $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ – собственными функциями уравнения.

Задание 10. Решить следующие неоднородные симметричные интегральные уравнения:

1. $\varphi(x) - \dfrac{\pi^2}{4} \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = \dfrac{x}{2}, \quad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \le x \le t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \le x \le 1. \end{cases}$

2. $\varphi(x) + \displaystyle\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = xe^x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{sh x\, sh(t-1)}{sh 1}, & 0 \le x \le t, \\ \dfrac{sh t\, sh(x-1)}{sh 1}, & t \le x \le 1. \end{cases}$

3. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x-1,\ \ K(x,t)=\begin{cases} x-t, & 0\le x\le t,\\ t-x, & t\le x\le 1.\end{cases}$

4. $\varphi(x)-2\int_0^{\pi/2} K(x,t)\varphi(t)dt = \cos 2x,\ \ K(x,t)=\begin{cases} \sin x\cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi/2.\end{cases}$

5. $\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = 1,\ \ K(x,t)=\begin{cases} \sin x\cos t, & 0\le x\le t,\\ \sin t\cos x, & t\le x\le \pi.\end{cases}$

6. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x,\ \ K(x,t)=\begin{cases} (x+1)(t-3), & 0\le x\le t,\\ (t+1)(x-3), & t\le x\le 1.\end{cases}$

7. $\varphi(x)-\int_0^{\pi} K(x,t)\varphi(t)dt = \sin x,\ \ K(x,t)=\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right), & 0\le x\le t,\\ \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & t\le x\le \pi.\end{cases}$

8. $\varphi(x)-\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = shx,\ \ K(x,t)=\begin{cases} -e^{-t}shx, & 0\le x\le t,\\ -e^{-x}sht, & t\le x\le 1.\end{cases}$

9. $\varphi(x)-\lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = chx,\ \ K(x,t)=\begin{cases} \dfrac{chxch(t\text{-}1)}{sh1}, & 0\le x\le t,\\ \dfrac{chtch(x\text{-}1)}{sh1}, & t\le x\le 1.\end{cases}$

10. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^1 (1+xt)\varphi(t)dt = a^2+bx+d$.

ГЛАВА 4. ФУНКЦИЯ ГРИНА

§ 1. Определение функции Грина. Примеры

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L[y] = P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0, \qquad (1)$$

где функции $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ непрерывны на $[a,b]$, $P_0(x) \neq 0$, и краевые условия

$$\begin{aligned} V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \\ + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \quad (k = 1,\ldots,n), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $V_1, V_2, \ldots, V_n$ функции от $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ являются линейно-независимыми.

Определение. *Функцией Грина* (*функцией влияния*) краевой задачи (1), (2) называется функция $G(x,\xi)$, построенная для любой точки ξ, $a < \xi < b$, обладающая следующими свойствами:

1. $G(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n$-2$)$-го порядка включительно при $a \leq x \leq b$.

2. Ее (n-1)-я производная по x в точке $x = \xi$ имеет разрыв первого рода, причем скачок равен $\dfrac{1}{P_0(\xi)}$, т. е.

$$\left.\frac{\partial^{(n-1)} G(x,\xi)}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{(n-1)} G(x,\xi)}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{P_0(\xi)}. \qquad (3)$$

3. В каждом из полуинтервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения (1), т. е. $L[G] = 0$.

4. Функция Грина $G(x,\xi)$ удовлетворяет граничным условиям (2):

$$V_k(G) = 0, \; k = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Теорема 1. Если краевая задача (1), (2) имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, то оператор $L[y]$ имеет одну и только одну функцию Грина $G(x,\xi)$.

Рассмотрим вопрос о построении функции Грина простейшей краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Пусть дано уравнение

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0\,, \tag{5}$$
где $P_1(x),\ P_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$, и краевые условия:
$$y(a) = y_0,\ y(b) = y_1\,. \tag{6}$$

Преобразуем уравнение (5) к самосопряженному виду. Для этого умножим обе части (5) на $\mu = e^{\int P_1(x)dx}$. Получим
$$y''(x)e^{\int P_1(x)dx} + P_1(x)e^{\int P_1(x)dx}y' + P_2(x)e^{\int P_1(x)dx}y = 0$$
или
$$\left(e^{\int P_1(x)dx}y'\right)' + P_2(x)e^{\int P_1(x)dx}y = 0\,.$$

Обозначая
$$p(x) = e^{\int P_1(x)dx} > 0,\ q(x) = P_2(x)e^{\int P_1(x)dx}\,,$$
придем к самосопряженному виду для уравнения (5)
$$\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y = 0\,. \tag{7}$$

Функция Грина удовлетворяет однородным краевым условиям. Поэтому заменим неоднородные краевые условия (6) однородными. Для этого сделаем замену искомой функции $y(x)$ по формуле:
$$z(x) = y(x) - \frac{y_1 - y_0}{b-a}(x-a) - y_0\,.$$

Получим: $z(a) = 0,\ z(b) = 0.$

Итак, относительно $z(x)$ получаем однородную краевую задачу:
$$\left(p(x)z'(x)\right)' + q(x)z(x) = 0\,, \tag{8}$$
$$z(a) = z(b) = 0\,. \tag{9}$$

Найдем решение $z_1(x)$ задачи Коши:
$$\left(p(x)z'(x)\right)' + q(x)z(x) = 0\,,$$
$$z(a) = 0,\ z'(a) \neq 0\,.$$

Как видим, решение $z_1(x)$ удовлетворяет первому краевому условию (9). Это решение ненулевое, так как значение производной в этой точке не равно нулю. Тогда, очевидно, все функции семейства $C_1 z_1(x)$, где $C_1 = const$, тоже удовлетворяют однородному уравнению (8) и первому краевому условию (9). Далее, предположим, что $z_1(b) \neq 0$, т. е. что оно не удовлетворяет второму краевому условию (9).

Аналогично найдем решение $z_2(x)$ задачи Коши:

$$\left(p(x)z'(x)\right)' + q(x)z(x) = 0 \,, \tag{8'}$$

$$z(b) = 0,\ z'(b) \neq 0 \,. \tag{9'}$$

Решение $z_2(x) \neq 0$ удовлетворяет уравнению (8') и второму краевому условию (9'). Этим условиям удовлетворяют и все функции семейства $C_2 z_2(x)$, где $C_2 = const$.

Отметим, что построенные таким образом решения линейно независимы, так как, по предположению, $z_1(b) \neq 0$.

Теперь, используя найденные $z_1(x)$ и $z_2(x)$, построим функцию Грина $G(x,\xi)$. Функцию Грина будем искать в виде:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} C_1 z_1(x), & a \leq x < \xi, \\ C_2 z_2(x), & \xi \leq x \leq b, \end{cases} \tag{10}$$

где C_1, C_2 – пока неопределенные коэффициенты. Функция $G(x,\xi)$, определенная в виде (10), очевидно, удовлетворяет условиям (2) и (3) определения функции Грина. Выберем теперь C_1, C_2 так, чтобы она удовлетворяла и условиям (1) и (4). Функция Грина (10) должна быть непрерывной как функция от x при фиксированном ξ, в частности, при $x = \xi$. Следовательно, C_1, C_2 удовлетворяет условию:

$$C_1 z_1(\xi) = C_2 z_2(\xi) \,.$$

Далее, скачок $G_x'(x,\xi)$ в точке $x = \xi$ должен быть равен $\dfrac{1}{p(\xi)}$, т. е.

$$C_2 z_2'(\xi) - C_1 z_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \,.$$

Таким образом, C_1, C_2 должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 z_1(\xi) - C_2 z_2(\xi) = 0, \\ C_1 z_1'(\xi) - C_2 z_2'(\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)}. \end{cases} \tag{11}$$

Определитель этой системы $W(\xi)$ отличен от нуля в силу линейной независимости решений $z_1(x),\ z_2(x)$. Тогда получаем решение системы (11)

$$C_1 = \frac{z_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, \quad C_2 = \frac{z_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} \,,$$

где

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} z_1(\xi) & z_2(\xi) \\ z_1'(\xi) & z_2'(\xi) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ - } \textit{определитель Вронского.}$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2 в формулу (10) для функции Грина, получим

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{z_1(x)z_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & a \le x < \xi, \\ \dfrac{z_1(\xi)z_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}, & \xi < x \le b. \end{cases} \tag{12}$$

Поставленная задача решена. Рассмотрим примеры на построение функции Грина.

Пример 1. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$y''(x)+k^2y(x)=0,$$
$$y(0)=y(1)=0.$$

Решение. Решение $y_1(x)=\sin kx$, очевидно, удовлетворяет только первому краевому условию, т. е.

$$y_1(0)=0,$$
$$y_1(1)=\sin k \neq 0,$$

а второе решение $y_2(x)=\sin k(x-1)$ удовлетворяет только второму краевому условию, т.е.

$$y_2(0)=\sin(-k)=-\sin k \neq 0,$$
$$y_2(1)=\sin 0=0.$$

Значит, решения $y_1=\sin kx$ и $y_2=\sin k(x-1)$ являются линейно-независимыми. Найдем значение определителя Вронского $W(\xi)$ решений $y_1(x),\ y_2(x)$:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} \sin k\xi & \sin k(\xi-1) \\ k\cos k\xi & k\cos k(\xi-1) \end{vmatrix} = k\left[\sin k\xi \cos k(\xi-1)-\right.$$
$$\left.-\sin k(\xi-1)\cos k\xi\right]=k\sin k\left[\xi-(\xi-1)\right]=k\sin k.$$

Заметим, что в данном примере $p(x)\equiv 1$. Подставляя в формулу (10), получим

$$G(x\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sin k}\left(\sin k(\xi-1)\sin kx\right), & 0 \le x < \xi, \\ \dfrac{1}{\sin k}\left(\sin k\xi \sin k(x-1)\right), & \xi < x \le 1. \end{cases}$$

Пример 2. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = 0 \tag{1}$$

при следующих условиях:

$$y(x) \text{ ограничено при } x \to 0,$$

$$y(1) = \alpha y'(1), \ \alpha \neq 0. \tag{2}$$

Решение. Найдем сначала общее решение уравнения (1) и убедимся, что условие (2) выполняется лишь тогда, когда

$$y(x) \equiv 0.$$

В самом деле, обозначая $y'(x) = z(x)$, получим $xz' + z = 0$, откуда $ln\, z = ln\, c_1 - ln\, x, \ z = \dfrac{c_1}{x}$, а значит,

$$y(x) = c_1 ln\, x + c_2. \tag{3}$$

Ясно, что $y(x)$, определяемое формулой (3), удовлетворяет условиям (2) только при $c_1 = c_2 = 0$, а значит, функцию Грина для задачи (1), (2) можно построить.

Запишем формально $G(x,\xi)$ в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 ln\, x, & 0 < x \leq \xi, \\ b_1 + b_2\, ln\, x, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Из непрерывности $G(x,\xi)$ при $x = \xi$ имеем

$$b_1 + b_2 ln\xi - a_1 - a_2 ln\xi = 0,$$

а скачок $G'_x(x,\xi)$ в точке $x = \xi$ равен $\dfrac{1}{\xi}$, так что

$$b_2 \frac{1}{\xi} - a_2 \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}.$$

Положив

$$c_1 = b_1 - a_1, \ \ c_2 = b_2 - a_2, \tag{5}$$

будем иметь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 ln\xi = 0, \\ \qquad c_2 = 1, \end{cases} \qquad c_1 = -ln\xi, \ c_2 = 1. \tag{6}$$

Используем теперь условия (2). Ограниченность $G(x,\xi)$ при $x \to 0$ дает нам $a_2 = 0,$ а из условия $G(1,\xi) = \alpha G'_x(1,\xi)$ получаем $b_1 = \alpha b_2$. Учитывая (5) и (6), получаем значения всех коэффициентов в (3):

$$a_1 = \alpha + ln\xi, \ a_2 = 0, \ b_1 = \alpha, \ b_2 = 1.$$

Итак,

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+ln\xi, & 0\le x\le\xi,\\ \alpha+ln\,x, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Задание 11. Проверить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи и, если существует, построить её:

1. $y''(x)=0;\quad y(0)=y'(1),\quad y'(0)=y(1).$
2. $x^2y''(x)+2xy'=0;\ \ y(0)-ограничено,\ \ y(1)=\alpha y'(1),\ \alpha\ne 0.$
3. $y''(x)-k^2y(x)=0;\ \ y(0)=y(1)=0.$
4. $y''(x)=0;\ \ y(0)=y(1),\ \ y'(0)=y'(1).$
5. $y''(x)+y(x)=0;\ \ y(0)=y(\pi)=0.$
6. $y^{(IV)}(x)=0;\ \ y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0.$
7. $y'''(x)=0;\ \ y(0)=y'(1)=0,\ \ y'(0)=y(1).$
8. $y'''(x)=0;\ \ y(0)=y(1)=0,\ \ y'(0)=y'(1).$
9. $y''(x)=0;\ y(0)=0,\ y(1)=y'(1).$
10. $y''(x)+\dot{y}'(x)=0;\ \ y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1).$
11. $y'''(x)=0;\ \ y(0)=y(1)=0,\ y'(0)+y'(1)=0.$
12. $xy''(x)+y'(x)-\dfrac{1}{x}y(x)=0;\ \ y(0)-ограничено, y(1)=0.$
13. $x^2y''+xy'(x)-y(x)=0;\ y(0)-ограничено,\ y(1)=0.$
14. $y''(x)=0;\quad y'(0)=hy(0),\ \ y'(1)=-Hy(1).$

§ 2. Применение функции Грина для решения краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения

Пусть дано дифференциальное уравнение с правой частью

$$L[y]\equiv p_0(x)y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)y(x)=f(x)\qquad(7)$$

и краевые условия

$$V_1(y)=0,\ V_2(y)=0,\ldots,V_n(y)=0\ .\qquad(8)$$

Линейные формы $V_1,\ldots,\ V_n\ от\ y(a),y'(a),\ldots,y^{(n-1)}(a),\ \ y(b),\ y'(b),\ldots,y^{(n-1)}(b)$ являются линейно независимыми.

Теорема. Если $G(x,\xi)$ есть функция Грина однородной краевой задачи

$$L[y]=0,$$

$$V_k(y)=0,\ \ k=\overline{1,n},$$

то решение краевой задачи (7), (8) дается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\,. \qquad (9)$$

Пример 1. Используя функцию Грина, решить краевую задачу

$$y''(x)-y(x)=x\,, \qquad (10)$$

$$y(0)=y(1)=0\,. \qquad (11)$$

Решение. 1) Выясним сначала, существует ли функция Грина для соответствующей однородной краевой задачи

$$y''(x)-y(x)=0\ , \qquad (12)$$

$$y(0)=y(1)=0\,. \qquad (13)$$

Очевидно, что $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=e^{-x}$ есть фундаментальная система решений уравнения (12). Значит, общим решением этого уравнения будет

$$y(x)=Ae^x+Be^{-x}.$$

Краевые условия (11) удовлетворяются тогда и только тогда, когда $A=B=0,$ т. е. $y(x)\equiv 0$. Итак, функция Грина существует.

2) Легко проверить, что

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{sh\,x\,sh(\xi-1)}{sh\,1}, & 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{sh\,\xi\,sh(x-1)}{sh\,1}, & \xi\le x\le 1\end{cases} \qquad (14)$$

является функцией Грина для краевой задачи (12), (13).

3) Решение краевой задачи (10), (11) пишем в виде

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\xi d\xi, \qquad (15)$$

где $G(x,\xi)$ определена формулой (14).

Разбивая промежуток интегрирования на два и подставляя в (15) выражения для функции Грина из (14), получим

$$y(x)=\int_0^x \frac{\xi sh\xi\, sh(x-1)}{sh1}d\xi+\int_x^1 \frac{\xi sh\, x\, sh(\xi-1)}{sh1}d\xi=$$

$$=\frac{sh(x-1)}{sh1}\int_0^x \xi sh\xi d\xi+\frac{sh\, x}{sh1}\int_x^1 \xi sh(\xi-1)d\xi.$$

Но

$$\int_0^x \xi sh\xi d\xi = x\, ch\, x - shx,$$

$$\int_x^1 \xi sh(\xi-1)d\xi = 1 - x\, ch(x-1)+sh(x-1),$$

поэтому

$$y(x)=\frac{1}{sh1}\{sh(x-1)[xchx-shx]+shx[1-xch(x-1)+sh(x-1)]\}=\frac{shx}{sh1}-x\,.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$sh(\alpha\pm\beta)=sh\alpha ch\beta \pm ch\alpha sh\beta\,,$$

а также нечетностью функции shx.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $y(x)=\dfrac{shx}{sh1}-x$ удовлетворяет уравнению (10) и краевым условиям (11).

Пример 2. Свести к интегральному уравнению краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения:

$$y''=f(x,y(x))\,, \tag{16}$$

$$y(0)=y(1)=0\,. \tag{17}$$

Решение. Строя функцию Грина для задачи

$$y''=0\,, \tag{18}$$

$$y(0)=y(1)=0\,, \tag{19}$$

находим

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)x, & 0\le x\le\xi,\\ (x-1)\xi, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Рассматривая правую часть уравнения (10) как известную функцию, получаем

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi,y(\xi))d\xi \; .$$

Таким образом, решение краевой задачи (16), (17) сводится к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, ядром которого является функция Грина задачи (18), (19).

Пример 3. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения

$$y'''(x)-y'(x)=0 \tag{20}$$

при следующих условиях:

$$y(0)=2, \quad y'(0)=-1, \quad y(1)=1. \tag{21}$$

Решение. Решение $y(x)$ будем искать в виде

$$y(x)=u(x)+v(x)\,, \tag{22}$$

откуда следует, что

$$u(x)=y(x)-v(x)\,. \tag{23}$$

Положим, что $v(x)=ax^2+bx+c$. С учетом этого $u(x)=y(x)-ax^2-bx-c$ и для условий (21) имеем

$$u(0)=2-c=0 \Rightarrow c=2,$$
$$u'(0)=-1-b=0 \Rightarrow b=-1,$$
$$u(1)=1-a-b-c=0 \Rightarrow a=0.$$

Таким образом, мы получили неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с однородными условиями

$$u'''(x)-u'(x)=-1\,, \tag{20*}$$

$$u(0)=0,\; u'(0)=0,\; u(1)=0. \tag{21*}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (20*) есть

$$u(x)=C_1+C_2 shx+C_3 chx \quad .$$

Ясно, что функция Грина $G(x,\xi)$ будет иметь вид:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1+a_2 shx+a_3 chx, & 0\le x<\xi, \\ b_1+b_2 shx+b_3 chx, & \xi<x\le 1. \end{cases} \tag{24}$$

Из определения функции Грина и ее свойств получим следующую алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} (b_1-a_1)+(b_2-a_2)sh\xi+(b_3-a_3)ch\xi=0, \\ (b_2-a_2)ch\xi-(b_3-a_3)sh\xi=0, \\ (b_2-a_2)sh\xi+(b_3-a_3)ch\xi=1, \\ a_1+a_2+a_3=0,\ a_2-a_3=0,\ b_1+b_2e+b_3e^{-1}=0. \end{cases} \tag{25}$$

Найдем a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 из системы (25) и подставим в (24). Получим

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}\left(1-chx\right),\ \ 0\le x<\xi, \\ \dfrac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}-1-sh\xi shx+\left[ch\xi-\dfrac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}\right]chx,\ \ \xi<x\le 1. \end{cases}$$

Таким образом, решение однородной задачи есть

$$u(x)=\int_0^1 G(x,\xi)(-1)d\xi=-\int_0^1 G(x,\xi)d\xi=$$

$$-\int_0^x\left\{\frac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}-1-sh\xi shx+\left[ch\xi-\frac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}\right]chx\right\}d\xi-$$

$$-\int_x^1\left[\frac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}\left(1-chx\right)\right]d\xi=-\int_0^x\left[\frac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}-1\right]d\xi+$$

$$+shx\int_0^x sh\xi d\xi-chx\int_0^x\left[ch\xi-\frac{1-ch(\xi-1)}{1-ch1}\right]d\xi-$$

$$-\frac{1-chx}{1-ch1}\int_x^1\left[1-ch(\xi-1)\right]d\xi=\frac{(chx-1)(1-sh1)}{1-ch1}+x-shx$$

или

$$u(x)=\frac{(chx-1)(1-sh1)}{1-ch1}+x-shx\quad .$$

Далее, учитывая (22), окончательно получаем

$$y(x) = \frac{(chx-1)(1-sh1)}{1-ch1} - shx + 2\ .$$

Задание 12. Используя функцию Грина, решить следующие краевые задачи:

1. $y'' + y = x;\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
2. $xy'' + y' = x;\ y(1) = y(e) = 0.$
3. $y'' + \pi^2 y = \cos \pi x;\ \ y(0) = y(1),\ \ y'(0) = y'(1).$
4. $y'' - y = 2sh1;\ \ y(0) = y(1) = 0.$
5. $y'' - y = -2e^x;\ y(0) = y'(0),\quad y(e) = -y(e).$
6. $y'' + y = x^2;\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
7. $y'' - y = e^x;\ \ y(0) = y(1) = 0.$
8. $y'' - y = x^2 sh1;\ y(0) = y(1) = 0.$
9. $x^2 y'' + xy' - y = x^2;\ \ y(x) \xrightarrow{x \to 0}$ *ограничено*, $\ y(1) = 0.$
10. $xy'' - y' - \frac{1}{x} y = x^3;\ \ y(0) -$ *конечно*, $\ y(1) = 0.$
11. $x^2 y''(x) + 2xy'(x) = x + 1;\quad y(0) -$ *конечно*, $\ y(1) = \alpha y'(1).$
12. $y^{(IV)}(x) = x^2;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) = y'(1) = 0.$
13. $y''(x) = 1 - x^2;\ y(-1) = y(1) = 0,\ -1 \le x \le 1.$
14. $y'''(x) = x - 1;\ y(0) = y(1) = 0,\ y'(0) = y'(1).$

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М., 1975.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – М., 1976.
3. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. – М., 1957.
4. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М., 1967.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: МГУ, 1984.
6. Привалов И.И. Интегральные уравнения. ОНТИ, 1937.
7. Тихонов Н.А., Васильева А.Б. Интегральные уравнения. – М.: МГУ, 1989.
8. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М., 1970.
9. Гурса Э. Курс математического анализа. т. III, ч. II. – М.,-Л., 1934.
10. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Справочное пособие. – М., 1986.

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Елеев Валерий Абдурахманович

Балкизов Жираслан Анатольевич

Бориев Сергей Михайлович

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Для специальности: 110200 – Прикладная математика и информатика
Направление: 510200 – Прикладная математика и информатика
Магистерская программа: 510201 – Математическая физика

Редактор ***Т.П. Ханиева***
Компьютерная верстка ***Е.Х. Гергоковой***
Корректор ***Е.Г. Скачкова***

Изд. лиц. Серия ИД 06202 от 01.11.2001.
В печать 08.08.2003. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Печать трафаретная. Бумага газетная. 3.49 усл.п.л. 2.0 уч.-изд.л.
Тираж 100 экз. Заказ № ______.
Кабардино-Балкарский государственный университет.
360004, г. Нальчик, ул.Чернышевского, 173.

Полиграфическое подразделение КБГУ.
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.