Оглавление

Глава 9.

Начало XX века

В начале XX в. в комбинаторной топологии и в топологии многообразий развиваются идеи Пуанкаре. Доказана инвариантности размерности. Развиваются понятий общей топологии. Сделан важнейший шаг в теории гомологий и когомологий — введено умножение в когомологиях.

Борель, его ученик Лебег и другие развивают теорию интеграла и теорию меры. Интеграл Лебега постепенно оказывается наиболее удобным для многих целей, в том числе и в теории вероятностей.

Начинается изучения бесконечномерных линейных пространств, сначала связанных с функциями определённого вида, а постепенно и как отдельного объекта. Первоначально изучаются пространства с нормой.

Итальянская школа алгебраической геометрии развивает прежде всего теорию алгебраических поверхностей в комплексном проективном пространстве, но постепенно и алгебраических многообразий произвольной размерности. Получены важные результаты в классификации алгебраических поверхностей.

В теории групп развивается прежде всего теория представлений, сначала для конечных групп (особенно для симметрической группы в работах Шура и Юнга) и простейшей из групп Ли — полной линейной группы, потом общая теория представлений групп и алгебр Ли, интегрирование на компактных группах. На локально компактных группах вводится инвариантная мера (мера Хаара).

Разрабатывается и совершенствуется аксиоматика теории множеств.

9.1. Нильс Фабиан Хельге фон Кох (1870-1924)

В 1904 г. в статье «О непрерывной кривой без касательных, полученной элементарной геометрической конструкцией» шведский математик Кох описал первый фрактал. Фрактальная кривая, которая получила название *кривая Коха* или *снежинка Коха*, строится следующим образом. Возьмём равносторонний треугольник, разделим каждую его сторону на три равные части и заменим каждый из трёх средних отрезок на равносторонний треугольник без этого отрезка. В результате образуется ломаная, состоящая из шести звеньев (рис. 9.1). На следующем шаге повторяем такую же операцию, как для стороны исходного треугольника, для каждого из шести получившихся звеньев и т. д. (первые шаги изображены на рис. 9.1). Предельная кривая и есть снежинка Коха. Эта кривая имеет бесконечную длину.

9.2. Эрнст Леонард Линделёф (1870-1940)

Финский математик Линделёф в 1894 г. обобщил результаты Пикара, связанные с существованием и единственностью решения дифференциального уравнения первого порядка с заданными начальными условиями (теорема Пикара–Линделёфа).

В 1908 г. выдвинул следующую гипотезу о росте дзета-функции Римана на критической прямой, из которой следует гипотеза Римана о нулях дзета-функции. Для любого $\varepsilon > 0$ величина $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ имеет порядок $o(t^{\varepsilon})$. При изучении дзета-функции доказал теорему Линделёфа: голоморфная функция в полуполосе на комплексной плоскости, которая ограничена на границе полуполосы и не слишком быстро растёт в неограниченном направлении

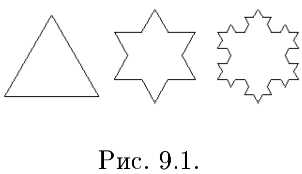

Рис. 9.1.

полосы, ограничена на всей полосе. В том же 1908 г. совместно с Ларсом Эдвардом Фрагменом (1863-1937), получил обобщение принципа максимума модуля в комплексном анализе на неограниченные области (принцип Фрагмена–Линделёфа).

В топологии *пространством Линделёфа* называют топологическое пространство, в котором из любого открытого покрытия можно выбрать счётное подпокрытие. Это название связано с леммой Линделёфа: любое открытое подмножество прямой является счётным объединением открытых интервалов.

9.3. Эрнст Штейниц (1871-1928)

В 1908 г. Штейниц ввёл понятие произведения топологических пространств.

В 1910 г. Штейниц разработал абстрактную теорию полей в книге «Алгебраическая теория полей». Его целью было построение теории, охватывающей все поля. Особенно его интересовали поля p-адических чисел. Штейниц разделил поля на два класса: поля нулевой характеристики и поля ненулевой характеристики p. Разработал теорию трансцендентных расширений полей. Выделил класс расширений полей, к которым применима теория Галуа: такие расширения должны быть конечными, нормальными и сепарабельными. Доказал существование и единственность (с точностью до изоморфизма) алгебраического замыкания любого поля. Штейниц ввёл понятия базис трансцендентности и степень трансцендентности.

В 1913 г. Штейниц доказал теорему об условно сходящихся рядах в векторном пространстве: суммы всех различных перестановок членов условно сходящегося ряда образуют аффинное подпространство (линейное подпространство плюс некоторый вектор). До этого Поль Леви (1886-1971) дал неполное доказательство в 1905 г. Попутно Штейниц доказал так называемую теорему Штейница о замене. Пусть V — векторное пространство, порождённое n векторами $w_1, \ldots, w_n$. Если V содержит r линейно независимых векторов $v_1, v_2, \ldots, v_r$, то существует порождающее V множество из n векторов, содержащее все векторы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и какие-то $n - r$ из векторов $w_1, \ldots, w_n$.

Теорема Штейница о многогранниках характеризует те графы, которые могут быть реализованы как наборы рёбер выпуклого многогранника. Для этого необходимо и достаточно, чтобы граф (без петель и двойных рёбер) был 3-связен (т.е. содержал по крайней мере 4 вершины и после выбрасывания любых двух вершин и выходящих из них рёбер получался бы связный граф) и планарен (т.е. его можно было бы нарисовать без самопересечений на плоскости). Книга Штейница о многогранниках, в которой доказана эта теорема, была издана в 1934 г., уже после его смерти.

9.4. Федериго Энриквес (1871-1946)

Основной вклад Энриквеса в алгебраическую геометрию — классификация (с точностью до бирациональной эквивалентности) алгебраических поверхностей в комплексном проективном пространстве. Эта классификация получена в большой серии работ с 1896 по 1914 гг. Некоторые из этих работ написаны совместно с Кастельнуово. В частности, Кастельнуово доказал теорему Римана–Роха для поверхностей и получил критерий рациональности гладкой поверхности.

Полученная в итоге классификация Энриквеса разбивает поверхности на 5 классов. Три класса аналогичны кривым рода 0, 1 и больше 1. И есть ещё два класса: эллиптические расслоения (расслоения над кривыми со слоем эллиптическая кривая) и K3-поверхности (это название ввёл А.Вейль в 1958 г. в честь Куммера, Кэлера и Кодаиры).

Кривым рода 0 аналогичны *рациональные поверхности*, бирационально эквивалентные проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, и *линейчатые поверхности*. Линейчатая поверхность — это расслоение над гладкой кривой, слои которого изоморфны $\mathbb{P}^1$; линейчатая поверхность бирационально эквивалентна $C \times \mathbb{P}^1$, где C — некоторая кривая.

Кривым рода 1 аналогичны *абелевы многообразия* (на котороых есть групповой закон).

В 1896 г. Энриквес начал разрабатывать общую теорию алгебраических поверхностей в комплексном проективном пространстве. Он исследовал линейные системы на алгебраических поверхностях, введённые Нётером, и уточнил формулу Нётера для геометрического рода алгебраической поверхности.

В 1901 г. Энриквес и Кастельнуово доказали критерий стягиваемости кривой: кривая стягиваема тогда и только тогда, когда она бирационально изоморфна $\mathbb{P}^1$ и её индекс самопересечения равен -1. Для поверхности, отличной от линейчатой, они доказали существование и единственность *минимальной модели*. Минимальные модели устроены следующим образом. Для алгебраической поверхности операция раздутия точки, при которой точка заменяется на проективную прямую, является бирациональной эквивалентностью. Обратная операция — стягивание (-1)-кривой, т.е. кривой с индексом самопересечения -1. Поверхность называется минимальной, если её нельзя получить из другой поверхности раздутием точки; это эквивалентно тому, что на поверхности нет (-1)-кривых. Минимальная модель алгебраической поверхности получается стягиванием конечного числа исключительных кривых.

Для алгебраических поверхностей есть разные определения рода, в частности, геометрический род p_g и арифметический род p_a. Их разность $q = p_g - p_a$ (она всегда неотрицательна) получила название *иррегулярность* поверхности. В 1901 г. Энриквес доказал, что если иррегулярность поверхности не равна нулю, то на поверхности есть простые интегралы первого рода. Ранее Пикар показал, что если $q = 0$, то таких интегралов нет.

Энриквес ввёл новый бирациональный инвариант алгебраического многообразия X: d-кратный род $P_d(X)$. При этом $P_1(X) = p_g(X)$ — геометрический род. На современном языке *кратный род* можно определить следующим образом. *Каноническое расслоение* K_X на n-мерном алгебраическом многообразии X — это линейное (т.е. одномерное) расслоение $\wedge^n\Omega^1 X$ (n-я внешняя степень кокасательного расслоения). Тензорная степень K_X^d — это тоже линейное расслоение. Размерность пространства глобальных сечений этого расслоения — это и есть d-кратный род.

Важность понятия кратного рода для классификации алгебраических поверхностей стала ясна после теорем Кастельнуово и Энриквеса, характеризующих соответственно рациональные и линейчатые поверхности.

Критерий рациональности Кастельнуово: гладкая поверхность рациональна тогда и только тогда, когда иррегулярность q и 2-кратный род P_2 обращаются в нуль.

Критерий линейчатости Энриквеса (1905): поверхность линейчатая тогда и только тогда, когда $P_4 = P_6 = 0$ (или $P_{12} = 0$).

В 1909 г. Энриквес доказал, что для любого $g \geq 3$ существует K3-поверхность степени $2g - 2$, вложенная в $\mathbb{P}^g$. Он доказал, что эти поверхности для каждого g зависят по крайней мере от 19 параметров, а Севери в том же году доказал, что ровно от 19, т.е. пространство модулей этих поверхностей имеет размерность 19.

Поверхности, для которых $p_g = 0$ и $q = 0$, появившиеся в классификации Энриквеса, называют *поверхностями Энриквеса*. Двулистное накрытие над поверхностью Энриквеса – это K3-поверхность, и наоборот: фактор K3-поверхности по инволюции без неподвижных точек — это поверхность Энриквеса.

В 1914 г. Энриквес, говоря современном языком, описал минимальные модели с размерностью Кодаиры 0. Ими оказались поверхности Энриквеса, K3-поверхности и ещё два типа поверхностей.

9.5. Поль Хегор (1871-1948)

Датский математик Хегор в 1898 г. написал диссертацию по топологии комплексных алгебраических поверхностей, в которой он пришёл к изучению трёхмерных многообразий. Хегор разработал удобный способ представления трёхмерных многообразий посредством диаграмм (диаграмма Хегора); этот способ основан на представлении трёхмерного многообразия посредством склейки по границе двух заполненных сфер с ручками (разбиение Хегора). Хегор обратил внимание на существенные недостатки работы Пуанкаре «Analysis situs» (1895). Он построил пример трёхмерного ориентируемого многообразия, для которого теорема двойственности Пуанкаре в первоначальной формулировке была неверна. Пуанкаре пришлось уточнить определение гомологичности циклов и чисел Бетти.

В 1907 г. Хегор совместно с Деном написал обзорную статью по топологии. В этой статье впервые высказывается идея рассмотрения сингулярных цепей при определении гомологий, но пока довольно смутная и без каких-либо доказательств.

9.6. Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело (1871-1951)

Цермело ввёл *аксиому выбора*: для любого семейства множеств можно выбрать из каждого его члена по одному представителю и объединить их все в одно множество. В 1904 г. с её помощью доказал, что любое множество можно вполне упорядочить (задать такой порядок, что любое непустое подмножество имеет наименьший элемент). Например, множество натуральных чисел с естественным порядком вполне упорядочено, а множество целых чисел — нет. Аксиома выбора эквивалентна тому, что любое множество можно вполне упорядочить.

В 1905 г. Цермело разработал систему аксиом теории множеств, но не смог доказать непротиворечивость этой системы аксиом. Тем не менее, в 1908 г. опубликовал её. Впоследствии в этой системе аксиом обнаружился существенный пробел, связанный с тем, что Цермело не потребовал, что если совокупность эквивалентна множеству (т.е. между членами совокупности и множества есть взаимно однозначное соответствие), то эта совокупность является множеством. В 1922 г. Сколем и Френкель независимо усовершенствовали эту систему аксиом, устранив этот пробел, и в этом виде она остаётся наиболее распространённой системой аксиом теории множеств.

9.7. Джино Фано (1871-1952)

Фано первым начал изучать конечные геометрии, аффинные и проективные. В 1892 г. сформулировал *постулат Фано* в проективной геометрии: диагональные точки полного четырёхвершинника неколлинеарны.

Постулат Фано равносилен тому, что характеристика поля, соответствующего этой геометрии, не равна 2.

В 1903 г. рассмотрел алгебраическое многообразие, которое параметризует семейство прямых, лежащих на неособой 3-мерной кубической поверхности в 4-мерном проективном пространстве.

В 1934 и 1942 гг. рассмотрел (трёхмерные) полные алгебраические многообразия, для которых антиканоническое расслоение K_X^* обильно (многообразия Фано). Антиканоническое расслоение обратно (т.е их прямая сумма тривиальна) каноническому расслоению (см. с. 5). Линейное расслоение называется обильным, если его глобальных сечений достаточно для вложения многообразия в проективное пространство.

9.8. Эмиль Борель (1871-1956)

В 1894 г. в диссертации «О некоторых вопросах теории функций» доказана лемма Бореля: если отрезок $[a, b]$ покрыт бесконечной (счётной) системой открытых интервалов (α, β), то из неё можно выделить конечную подсистему, также покрывающую весь отрезок. Это свойство отрезка впоследствии привело к введению важного в топологии и в анализе понятия компактности. Лемма Бореля имеет сложную историю. В 1872 г. это свойство отрезка (тоже для счётных покрытий) доказал и применил Гейне, но он не выделял это свойство отдельно, как что-то важное. В 1895 г. Кузен доказал теорему о возможности выбрать конечное подпокрытие для произвольного (не обязательно счётного) открытого покрытия отрезка, а в 1898 г. Лебег независимо ещё раз доказал теорему Кузена. Утверждение о возможности выбрать конечное подпокрытие из любого открытого покрытия отрезка получило название лемма Бореля–Лебега

В 1896 г. опубликована статья «Основы теории суммируемых расходящихся рядов». В этой статье изложены все основные результаты Бореля по теории расходящихся рядов, включая их приложения к аналитическому продолжению функций. Подробнее эти результаты изложены в 1899 г. в мемуаре о расходящихся рядах. Борель предложил свой метод суммирования расходящихся рядов.

В 1898 г. ввёл борелевские множества и разработал для них теорию меры. Доказал (с помощью леммы Бореля), что интервал (a, b) нельзя покрыть интервалами с общей длиной меньше $b - a$. Ввёл аксиомы теории меры, в частности, *счётную аддитивность*: мера объединения счётного семейства непересекающися множеств равна сумме их мер. Некоторые меры не обладают свойством счётной аддитивности, а обладают только свойством *конечной аддитивности*, т.е. мера объединения конечного набора непересекающися множеств равна сумме их мер.

Борель назвал множество измеримым, если оно принадлежит наименьшему классу, содержащему все открытые и все замкнутые множества и все их счётные объединения и пересечения (множества из этого класса теперь называют *борелевскими множествами*). Но это были не все множества, для которых можно определить меру. Вскоре Лебег расширил класс измеримых множеств.

В 1905 г. Борель первым отметил роль понятия меры и интеграла Лебега в теории случайных величин.

В 1909 г. доказал лемму Бореля в теории вероятностей: если последовательность независимых случайных опытов даёт для события A вероятности $p_1, p_2, \ldots$, то вероятность осуществления A бесконечное число раз может быть только 0 (если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится) или 1 (если этот ряд расходится). В 1917 г. Франческо Паоло Кантелли (1875-1966) показал, что если ряд сходится, то утверждение Бореля справедливо и в том случае, когда опыты не являются независимыми (лемма Бореля–Кантелли).

Впервые доказал теорему, относящуюся к закону нуля и единицы. Впервые установил усиленный закон больших чисел.

9.9. Виллем де Ситтер (1872-1934)

В 1916 г. де Ситтер предложил четырёхмерную модель пространства-времени, пригодную для космологических моделей, основанных на общей теории относительности. Нашёл решения уравнений Эйнштейна при отсутствии материи.

В 1932 г. совместно с Эйнштейном опубликовал статью, в которой они предложили модель расширяющейся вселенной

9.10. Бертран Рассел (1872-1970)

В 1901 г. обнаружил парадокс, получивший название парадокс Рассела. Рассмотрим множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Если бы такое множество существовало, то оно должно было бы быть элементом самого себя тогда и только тогда, когда оно не является элементом самого себя. Этот парадокс противоречил аксиоме Кантора о том, что любое предикатное выражение $P(x)$, содержащее x в качестве свободной переменной, определяет множество, элементами которого являются те объекты, которые удовлетворяют $P(x)$. Никогда ранее антиномии не возникали на таком элементарном уровне, затрагивая самые фундаментальные понятия математики и логики.

Совместно с А.Н.Уайтхедом (1861–1947) написал книгу «Основания математики» в трёх томах (1910–1913). В ней исследованы определения целых чисел, отношения порядка и ординалы, трансфинитная арифметика Кантора, пределы и непрерывность, аксиомы выбора и бесконечности, теория типов, парадоксы, математическая логика. После публикации этой книги интерес Рассела сместился от математики к философии.

9.11. Карл Шварцшильд (1873-1916)

В 1916 г. Шваршильд получил первые точные решения гравитационных уравнений Эйнштейна в двух случаях: 1) для точки с данной массой; 2) для тела с общей массой m, которая распределена сферически симметрично. Эти решения позволили точно вычислить искривление лучей света и движение перигелия. Решение регулярно всюду, кроме начала координат, но на расстоянии $2Gm/c^2$ (радиус Шварцшильда) от начала координат временна́я координата меняет знак по отношению к пространственным координатам. Эта сингулярность решения описывает чёрные дыры.

9.12. Альфред Юнг (1873-1940)

В 1900 г. ввёл диаграммы Юнга и таблицы Юнга. Диаграммы Юнга находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми представлениями симметрической группы над полем комплексных чисел. Сложная комбинаторика диаграмм Юнга оказалась тесно связанной с представлениями симметрической группы, поэтому диаграммы Юнга оказались удобными для изучение представлений симметрической группы. Кроме того, они оказались важным комбинаторным объектом.

Первоначальный интерес Юнга был связан с теорией инвариантов. Он применил подстановки из группы S_n к тождествам (сизигиям), связанными с квартиками.

В 1901 г. появилась первая из статей Юнга под общим названием «Количественный анализ подстановок». Во второй статье (1902) появляется идея симметризации функции, связанной с формами от многих переменных.

В 1908 г. Юнг вводит симметризатор Юнга. Симметризатор Юнга сопоставляется каждой диаграмме Юнга. В 1928 г. Г.Вейль в книге про группы и квантовую механику применяет симметризатор Юнга и показывает его преимущества.

9.13. Туллио Леви-Чивита (1873-1941)

В 1900 г. Леви-Чивита совместно со своим научным руководителем Риччи опубликовал работу об абсолютном дифференциальном исчислении. Эту работу использовал Эйнштейн 15 лет спустя для создания общей теории относительности.

В 1917 г., развивая исследования Кристоффеля, разработал теорию параллельного переноса вектора вдоль кривой на римановом многообразии. Для многих целей (например, чтобы определить дифференцирование) нужно уметь каким-то образом отождествлять касательные пространства к многообразию в разных точках. На произвольном многообразии нет какого-то единого способа это сделать, но на римановом многообразии это можно сделать так, чтобы не менялись скалярные произведения векторов. Но нельзя отождествить все касательные пространства сразу — их можно только переносить вдоль кривой.

Впоследствии было разработано более общее понятие аффинной связности на многообразии. Аффиная связность как раз и позволяет отождествлять касательные пространства в разных точках, перенося их вдоль кривой. Аффиная связность на римановом многообразии называется связностью Леви-Чивита, если она сохраняет метрику и имеет нулевое кручение. На компактном римановом многообразии связность Леви-Чивита существует и единственна.

В 1924 г. Картан, исходя из параллельного переноса Леви-Чивита, ввёл группу голономии для риманова многообразия. Касательное пространство в некоторой точке можно перенести вдоль замкнутой кривой, вернувшись в исходную точку. При этом получится какое-то изометрическое отображение этого пространства на себя, не обязательно тождественное. Группа всех таких преобразований — это и есть группа голономии.

9.14. Константин Каратеодори (1873-1950)

В 1911 г. доказал теорему Каратеодори о выпуклой оболочке, относящуюся к многомерной геометрии: если точка $x \in \mathbb{R}^d$ лежит в выпуклой оболочке компактного множества P, то можно выбрать не более $d+1$ точек множества P, в выпуклой оболочке которых лежит точка x. В 1914 г. Штейниц доказал эту теорему для произвольного множества P.

В 1914 г. разработал общую теорию внешней меры, чтобы обеспечить основания для теории измеримых множеств и счётно аддитивных мер. Применил эту теорию при доказательстве теоремы Каратеодори о продолжении меры.

9.15. Йоханнес Ельмслев (1873-1950)

В 1898 г. одновременно и независимо Морли и датский математик Петерсен (Ельмслев) доказали следующее утверждение (теорема Петерсена–Морли). Пусть a, b и c — попарно не параллельные прямые в пространстве, a' — общий перпендикуляр к прямым b и c и т.д., a'' — общий перпендикуляр к прямым a и a' и т.д. Тогда прямые a'', b'' и c'' имеют общий перпендикуляр.

Теорема Ельмслева относится к абсолютной геометрии (т.е. она верна также и в неевклидовой геометрии): для изометрического отображения одной прямой в плоскости на другую, при котором точка X отображается в точку X', середины отрезков XX' лежат на одной прямой.

9.16. Иосип Племель (1873-1967)

В 1906-1908 гг. югославский математик Племель получил частичное решение проблемы Римана–Гильберта о существовании дифференциального уравнения фуксова типа с заданной группой монодромии (21-я проблема Гильберта). Долгое время это решение признавалось полным, и считалось, что решение проблемы Римана–Гильберта положительное. Но в 1980-е гг. был обнаружен пробел в доказательстве Племеля: в действительности оно позволяло построить фуксово уравнение с заданной монодромией не во всех особых точках, а во всех особых точках, кроме одной. В 1989 г. Болибрух построил пример, показывающий, что не любая группа может быть группой монодромии фуксова уравнения.

9.17. Рене Бэр (1874-1932)

В 1899 г. Бэр разработал классификацию функций. Он занимался описанием функций от конечного числа переменных, которые могут быть пределами последовательности непрерывных функций. Доказал, что предел последовательности непрерывных функций одной переменной непрерывен во всех точках всюду плотного множества. Классы Бэра определяются следующим образом. В нулевой класс Бэра входят все непрерывные функции. Первый класс Бэра состоит из разрывных функций, которые являются пределом сходящейся в каждой точке последовательности функций из нулевого класса, и т.д.

Бэр доказал, что любая счётная система открытых всюду плотных множеств прямой имеет непустое пересечение. Привёл пример совершенного нигде не плотного множества.

Ввёл понятие *полунепрерывной функции*: функция $f(x)$ полунепрерывна снизу в точке x_0, если нижний предел $f(x)$ при $x \to x_0$ равен $f(x_0)$; нижний предел функции $f(x)$ в точке x_0 — это предел нижних граней множеств значений функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, когда эти окрестности стягиваются к точке x_0. Аналогично определяется функция, полунепрерывная сверху. Бэр доказал, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда для любого числа a множество точек x, для которых $f(x) \geq a$, замкнуто. Из этой теоремы Бэра следует, что полунепрерывные функции входят в нулевой или в первый класс Бэра. Бэр также доказал, что ограниченная полунепрерывная сверху (снизу) функция есть предел монотонно невозрастающей (неубывающей) последовательности непрерывных функций (теорема Бэра).

9.18. Фридрих Мориц Хартогс (1874-1943)

Хартогс доказал несколько основопологающих теорем в теории функций нескольких комплексных переменных. В 1906 г. он доказал теорему об устранимости компактных особенностей голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Носитель особенности не может быть компактным: для гомоломорфных функций нескольких переменных изолированные особенности (имеющие компактный носитель) устранимы. В том же году доказал теорему о том, что функция нескольких комплексных переменных голоморфна, если она голоморфна по каждой переменной.

В ноябре 1938 г. Хартогс был арестован и отправлен в концлагерь Дахау, но через несколько недель его отпустили.

9.19. Леонард Юджин Диксон (1874-1954)

В 1901 г. Диксон построил новую серию конечных простых групп, связанных с автоморфизмами простой алгебры Ли типа E_6 над конечным полем, а в 1905 г. — аналогичную серию для алгебр Ли типа G_2. Впоследствии

Шевалле (1955), Титс (1958) и Стейнберг (1959) построили другии серии конечных простых групп такого же типа.

9.20. Джузеппе Витали (1875-1932)

В 1905 г. Витали построил первый пример неизмеримого по Лебегу множества вещественных чисел (множество Витали). Подход Лебега к определению меры столь сильно расширял класс измеримых множеств, что оказалось непросто выяснить, есть ли вообще неизмеримые по Лебегу множества.

В 1907 г. Витали доказал, что предел последовательности мер является мерой. Впоследствии Хан (1922) и Сакс (1933) обобщили эту теорему на меры в банаховом пространстве (теорема Витали–Хана–Сакса).

В 1907 г. Витали дал определение функции ограниченной вариации в случае нескольких переменных.

9.21. Анри Лебег (1875-1941)

В серии работ 1898-1901 гг. Лебег разработал новый подход к теории меры (мера Лебега) и на этой основе новую теорию интегрирования (интеграл Лебега). Его диссертация на эту тему «Интеграл, длина, площадь» опубликована в 1902 г. Он опирался на идеи своего учителя Бореля, а также на идеи Жордана и Пеано. Его определение интеграла было более общим, чем интеграл Римана, и существенно расширяло класс измеримых множеств и интегрируемых функций. Расширяло до такой степени, что Лебег долго не знал, существуют ли неизмеримые по Лебегу множества (первый пример неизмеримого по Лебегу множества построил Витали в 1905 г.) Но поначалу это считали скорее недостатком, чем преимуществом интеграла Лебега, и лишь постепенно достоинства меры Лебега и интеграла Лебега были оценены.

Основная идея построения интеграла Лебега функции f состоит в следующем. При построении интеграла Римана область определения функции f разбивается на части, а затем составляется интегральная сумма из произведений значений функции f в некоторых точках этих частей на меры этих частей. При построении интеграла Лебега, наоборот, на интервалы разбивается область значений функции f, а затем суммируются с соответствующими весами меры прообразов этих интервалов. При этом меры прообразов тоже новые, лебеговские. Таким образом, построение интеграла Лебега начинается с построения меры Лебега. Например, для множества E на прямой сначала определяется внешняя мера как точная нижняя грань сумм длин отрезков, целиком покрывающих множество E. Затем определяется внутренняя мера. Для ограниченного множества E, содержащегося в отрезке $[a, b]$ внутренняя мера равна разности между длиной отрезка $[a, b]$ и внешней мерой дополнения к множеству E в отрезке $[a, b]$. Для неограниченного множества E нужно взять точную верхнюю грань таких разностей по всем отрезкам. Множество измеримо по Лебегу, если его внешняя мера равна внутренней мере. Мера Лебега счётно аддитивна.

В начале 1900-х гг. Лебег одновременно с Осгудом (1864-1943) построил пример замкнутой несамопересекающейся кривой, имеющей положительную площадь.

В 1905 г. доказал признак поточечной сходимости ряда Фурье (признак Лебега).

В 1906 г. разработал приложения интеграла Лебега к тригонометрическим рядам и предложил метод суммирования для тригонометрических рядов (метод суммирования Лебега).

В 1909 г. Лебег доказал теорему о предельном переходе под знаком интеграла (теорема Лебега). Пусть $f_n(x)$ — неубывающая последовательность неотрицательных функций, интегрируемых по Лебегу, и $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда интеграл Лебега функции $f(x)$ равен пределу интегралов функций $f_n(x)$.

В 1910 г. Лебег независимо от Брауэра доказал инвариантность размерности. Подход Лебега к определению размерности был совсем другим. Его доказательство основано на том, что если n-мерный куб покрыт достаточно малыми замкнутыми множествами, то среди них есть $n + 1$ множество с непустым пересечением, а пересечение любых $n + 2$ множеств пусто. Лебег не публиковал полное доказательство; в 1913 г. своё доказательство опубликовал Брауэр. Лебег опубликовал доказательство только в 1921 г.

9.22. Исайя Шур (1875-1941)

В 1901 г. Шур исследовал полиномиальные представления полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ над полем комплексных чисел. В этой работе выявлена связь между неприводимыми конечномерными представлениями симметрической группы и полной линейной группы. Впоследствии эта связь получила название двойственность Шура–Вейля. Г.Вейль популяризовал и развил её в книгах по теории групп и квантовой механике (1928) и по классическим группам и их представлениям (1939). При исследованиии представлений симметрической и полной линейной группы Шур ввёл связанные с этими представлениями симметрические многочлены специального вида. Эти многочлены теперь называют функциями Шура.

В 1904 г. при изучении проективных представлений групп Шур сопоставил каждой группе абелеву группу, получившую название мультипликатор Шура. На современном языке мультипликатор Шура группы G — это вторая группа гомологий $H_2(G,\mathbb{Z})$.

В 1905 г. Шур более простым способом доказал соотношения ортогональности для характеров, и впервые доказал их не для конечной, а для непрерывной группы (для ортогональной группы). Доказательство основано на так называемой лемме Шура: любой сплетающий оператор для двух неприводимых представлений одной группы либо нулевой, либо изоморфизм. Для представлений $\rho^1\colon G\to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\rho^2\colon G\to \mathrm{GL}(V_2)$ сплетающий оператор — это отображение $f\colon V_1\to V_2$, для которого $f\rho^1=\rho^2 f$.

В 1905 г. доказал, что в пространстве матриц порядка n размерность любого подпространства, состоящего из попарно коммутирующих матриц, не превосходит $[n^2/4]+1$.

В 1906 г. разработал теорию представлений групп над полем, которое не является алгебраически замкнутым.

В 1909 г. получил разложение Шура для квадратной комплексной матрицы: $A=UTU^{-1}$, где матрица U унитарная, а матрица T верхняя треугольная. Из этого разложения следует, что сумма квадратов модулей собственных значений матрицы не превосходит суммы квадратов модулей всех элементов матрицы (неравенство Шура).

В 1924 г. Шур обратил внимание на то, что инвариантное интегрирование по группе вращений $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, которое Гурвиц применил в 1897 г. как аналог суммирования по элементам конечной группы, позволяет распространить на эту группу теорию Фробениуса о полной приводимости представлений конечных групп.

В 1935 г. Шур был изгнан из Берлинского университета, а в 1938 г. — из Прусской академии наук. В 1939 г. приехал в Палестину. Преподавал в Еврейском университете Иерусалима. Но его здоровье было подорвано, и он умер в Тель-Авиве в 1941 г. после очередного сердечного приступа.

9.23. Тэйдзи Такаги (1875-1960)

Такаги — один из основателей теории полей классов. Теорема Такаги описывает взаимно однозначное соответствие между конечными абелевыми расширениями числового поля и его обобщённой группой классов идеалов. Результаты Такаги занимают центральное место в решении Артином 9-й проблемы Гильберта, Хассе — 11-й, и в достижениях по 12-й.

В 1920 г. Такаги получил полное доказательство предположения Кронекера (Jugendtraum) о том, что любое абелево расширение мнимого квадратичного поля порождается модулярными и эллиптическими функциями. Заменил определение поля классов, которое дал Вебер, более удачным определением.

9.24. Уильям Сили Госсет (Стьюдент) (1876-1937)

В 1908 г. опубликовал распределение независимых нормальных случайных величин и тест для оценки их среднего значения. Это распределение получило название распределение Стьюдента.

9.25. Эрхард Шмидт (1876-1959)

Гильберт исследовал интегральные операторы K с симметрическим ядром $K(x,y)$, отображающие функцию $f(x)$ в функцию $(Kf)(x)=\int K(x,y)f(y)\,dy$, для которых интеграл $\int\int |K(x,y)|^2 dx\,dy$ конечен. Ядро $K(x,y)$ называют симметрическим, если $K(x,y)=K(y,x)$; в этом случае оператор K самосопряжённый. Такие интегральные операторы впоследствии стали называть операторами Гильберта–Шмидта.

Для оператора Гильберта–Шмидта есть ортонормированный набор собственных функций $\varphi_n(x)$, которым соответствуют собственные значения λ_n. Для непрерывной функции $f(x)$ Гильберт определил коэффициенты Фурье $(f|\varphi_n)=\int f(x)\varphi_n(x)dx$ и доказал, что

$$\int\int K(x,y)f(x)g(y)dx\,dy=\sum_n \frac{1}{\lambda_n}(f|\varphi_n)(g|\varphi_n).$$

Он рассматривал это как аналог (для гильбертова пространства) приведения самосопряжённого оператора к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе. Гильберт доказал, что для функции f, имеющей вид $f(x)=\int K(x,y)g(y)dy$ для некоторой непрерывной функции, имеет место разложение в ряд Фурье $f(x)=\sum_n (f|\varphi_n)\varphi_n(s)$, который сходится абсолютно и равномерно.

В 1907-1908 гг. Шмидт продолжил исследование интегральных операторов Гильберта–Шмидта. Он дал более простое доказательство и при более слабых условиях теоремы Гильберта о приведении к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе оператора Гильберта–Шмидта (теорема Гильберта–Шмидта). Шмидт показал также, что условие представимости функции в виде $f(x)=\int K(x,y)g(y)dy$ излишне; разложение в ряд Фурье имеет место и без этого условия.

Применил ортогонализацию Грама–Шмидта для бесконечных последовательностей векторов. С помощью ортогонализации доказал, в частности, существование ортогонального дополнения к замкнутому подпространству в сепарабельном гильбертовом пространстве. Топологическое пространство называют сепарабельным, если оно содержит счётное всюду плотное множество; для метрических пространств сепарабельность равносильна так называемой второй аксиоме счётности, т.е существованию счётной базы топологии. В 1934 г. Рисс получил доказательство, не требующее сепарабельности.

9.26. Годфри Гарольд Харди (1877-1947)

В 1914 г. Харди доказал, что у дзета-функции Римана есть бесконечно много нулей с вещественной частью $\frac{1}{2}$.

В 1917 г. совместно с Рамануджаном получил асимптотическое выражение для числа разбиений $p(n)$. Число разбиений — это количество различных представлений натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых.

Вместе с Джоном Литлвудом (1885-1977) разработал так называемый круговой метод для доказательства общей теоремы Варинга (доказанной ранее Гильбертом) и получения асимтотического выражения числа различных представлений n в виде суммы данного числа k-х степеней. Развивая этот метод, связанный с оценкой тригонометрических сумм, Виноградов доказал, что любое достаточно большое нечётное число есть сумма трёх простых чисел.

9.27. Георг Гамель (1877-1954)

В 1903 г. Гамель получил важные результаты по четвёртой проблеме Гильберта, обнаружив большое количество новых геометрий, удовлетворяющих указанных Гильбертом условиям. Но он не нашёл все такие геометрии. В четвёртой проблеме Гильберта требовалось описать метрики на плоскости, дающие геометрии, аксиомы которых наиболее близки к аксиомам евклидовой и двух неевклидовых геометрий. Аксиомы конгруэнтности при этом заменялись неравенством треугольника.

В 1905 г. Гамель доказал, что вещественные числа $\mathbb{R}$, рассматриваемые как линейное пространство над рациональными числами $\mathbb{Q}$, имеют базис. Для доказательства он воспользовался теоремой о том, что любое множество можно вполне упорядочить. Впоследствии *базисом Гамеля* стали называть такое множество векторов в линейном пространстве, что любой вектор можно представить в виде их конечной линейной комбинации, причём единственным образом.

9.28. Макс Ден (1878-1952)

В 1900 г. Ден решил третью проблему Гильберта; это было первое решений одной из проблем Гильберта. Ден доказал, что существуют равновеликие, но не равносоставленные многогранники; в частности, равновеликие правильный тетраэдр и куб не равносоставлены. Частичные результаты получил Брикар в 1896 г. Доказательство Дена упростил В.Ф.Каган в 1903 г.; Хадвигер в 1950-е гг. предложил ещё более простое доказательство.

Доказательство основано на инварианте Дена, который определяется через длины рёбер и величины двугранных углов при этих рёбрах. Если рёбра имеют равную длину, а сумма двугранных углов при этих рёбрах равна развёрнутому углу, то такие рёбра дают нулевой вклад в инвариант Дена. А рёбра с одинаковыми двугранными углами дают такой же вклад, как ребро, длина которого равна сумме длин, с тем же самыми двугранным углом при нём.

В 1905 г. Ден получил для числа граней простых многогранников размерности 4 и 5 соотношения, которые в 1927 г. Соммервиль обобщил на произвольную размерность (соотношения Дена–Соммервиля). Соотношения Дена–Соммервиля (и определение простого многограника) приведены на с. 12.

В совместной статье с Хегором по топологии в математической энциклопедии (1907) Ден ввёл термины *гомотопия* и *изотопия*. В этой статье дано определение симплициального комплекса.

В 1910 г. Ден построил бесконечное семейство гомологических сфер, вырезая полноторие и вклеивая его подругому. Такое преобразование получило название перестройка Дена. В той же работе была доказана (в 1924 г. в этом доказательстве Г.Кнезер обнаружил большой пробел) лемма Дена: пусть в трёхмерном многообразии M расположена двумерная клетка D с самопересечениями, имеющая границей простую замкнутую полигональную кривую C без особых точек; тогда существует двумерная клетка D_0 с границей C, кусочно-линейно вложенная в M. Полное доказательство получил Папакирьякопулос в 1957 г.

В 1912 г. Ден занимался проблемой слов для фундаментальных групп двумерных поверхностей. Но полученные им результаты важны и для проблемы слов в произвольных группах, заданных образующими и соотношениями. Ден предложил алгоритм, позволяющий для интересующих его групп выяснить, представляет ли данное слово единичный элемент группы (алгоритм Дена). Этот алгоритм работает и для некоторых других

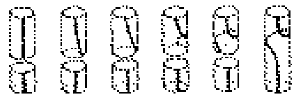

Рис. 9.2.

групп. Для группы, заданной образующими и соотношениями, Ден ввёл функцию, характеризующую порядок роста количества слов, представляющих единичный элемент. От свойств этой функции, получившей название функция Дена, зависит, разрешима ли в данной группе проблема слов.

В 1914 г. Ден доказал, что левый и правый трилистники — разные узлы. Для этого он исследовал действие группы автоморфизмов фундаментальной группы дополнения узла на меридиан и параллель узла.

В 1920-е гг. Ден доказал, что с точностью до изотопии любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности можно представить в виде композиции скручиваний Дена (рис. 9.2). В 1962 г. Ликориш заново открыл эту теорему и упростил её доказательство; кроме того, он доказал, что достаточно применить скручивания Дена не вдоль всех возможных кривых на поверхности, а вдоль определённой конечной системы кривых. Сам Ден ничего не публиковал на эту тему. Его результаты со своими дополнениями опубликовал в 1927 г. его ученик Нильсен.

9.29. Феликс Бернштейн (1878-1956)

В 1897 г. доказал теорему Кантора–Бернштейна: если множество A равномощно подмножеству множества B, а множество B равномощно подмножеству множества A, то множества A и B равномощны. Кантор только сформулировал эту теорему, но не доказал её.

9.30. Морис Фреше (1878-1973)

В 1906 г. при изучении бесконечномерных пространств функций Фреше заметил, что для доказательства многих результатов нужно опираться на совсем небольшое число свойств пространства. Он широко обобщил понятие пространства, приняв эти свойства за аксиомы и объявив пространством любое множество, удовлетворяющее этим аксиомам. Тем самым он фактически дал определения метрики, метрического пространства и связанной с метрикой топологии. В таких пространствах он определил понятия компактности и сходимости. Фреше рассмотрел несколько конкретных топологических пространств, связанных с анализом. В частности, пространство $C[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с топологией равномерной сходимости и пространство бесконечных последовательностей с топологией сходимости.

С именем Фреше связаны два понятия в функциональном анализе: пространство Фреше и производная Фреше.

Пространство Фреше — это пространство более общего вида, чем банахово пространство. Линейное пространство называется локально выпуклым, если у каждой его точки есть базис, состоящий из выпуклых окрестностей. *Пространство Фреше* — это локально выпуклое линейное пространство, которое полно по отношению к метрике, инвариантной относительно сдвигов. В отличие от банахова пространства эта метрика может не происходить из нормы. Есть два подхода к определению пространства Фреше: через метрику, инвариантную относительно сдвигов, или через счётное семейство полунорм. Примерами пространств Фреше являются пространства бесконечно дифференцируемых функций.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ банаховых пространств дифференцируемо по Фреше в точке $x_0 \in X$, если существует ограниченное линейное отображение A (*производная Фреше*), для которого

$$\|f(x_0+u) - f(x_0) - Au\| = o(r)$$

при $\|u\| \le r$ и $r \to 0$.

9.31. Дункан Соммервиль (1879-1934)

В 1927 г. Соммервиль обобщил на произвольную размерность соотношения для простых многогранников, которые в 1905 г. Ден получил для многогранников размерности 4 и 5.

Выпуклый d-мерный многогранник называется *простым*, если из каждой его вершины выходит ровно d рёбер. Простой многогранник двойствен *симплициальному* многограннику, все вершины которого — симплексы. Пусть $f_0, \ldots, f_d$ — количество граней размерности $0, \ldots, d$ простого d-мерного многогранника (у d-мерного многогранника есть ровно одна грань размерности d, т.е. $f_d = 1$). Рассмотрим многочлены $f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots + f_d t^d$ и $h(t) = f(t-1)$. Пусть h_i — коэффициенты многочлена $h(t)$. Соотношения Дена–Соммервиля имеют вид $h_k = h_{d-k}$. Формула Эйлера для выпуклых d-мерных многогранников является частным случаем соотношений Дена–Соммервиля, а именно, соотношением $h_0 = h_d$.

9.32. Ганс Хан (1879-1934)

В 1922 г. одновременно с Банахом и независимо от него начал исследовать полные нормированные пространства (банаховы пространства). Его подход был во многом схож с подходом Банаха.

В 1927 г. доказал теорему Хана–Банаха в частном случае (для норм): ограниченный функционал, определённый на подпространстве банахова пространства, можно продолжить на всё банахово пространство с сохранением нормы. В 1929 г. Банах обобщил эту теорему, доказав её не только для норм, но и для введённых им сублинейных функционалов.

В 1927 г. построил каноническое вложение банахова пространства X в пространство X^{**} (двойственное к двойственному).

9.33. Гвидо Фубини (1879-1943)

В 1904 г. Фубини независимо от Штуди ввёл метрику Фубини–Штуди на комплексном проективном пространстве.

В 1907 г. доказал теорему Фубини об интегрировании. В ней сформулированы достаточно слабые условия, при которых двойной интеграл равен повторному интегралу.

9.34. Альберт Эйнштейн (1879-1955)

В 1905 г. в работе «Об электродинамике движущихся тел» Эйнштейн построил специальную теорию относительности. Эта работа очень важная с точки зрения физики, но не с точки зрения математики. Гораздо большее значение для математики имеет общая теория относительности, и в этой теории математика более востребованна. Переход от специальной теории относительности к общей теории относительности (общей ковариантной теории гравитации) потребовал трёх шагов.

1) Формулировка гипотезы эквивалентности. В 1907 г. Эйнштейн сформулировал гипотезу о том, что невозможен эксперимент, позволяющий отличить процесс в стационарном однородном гравитационном поле от процесса в системе отсчёта, движущейся с постоянным ускорением в пространстве без гравитации. Это позволило изучать гравитацию в теории относительности, исследуя процессы в системе отсчёта, движущейся с постоянным ускорением.

2) Введение метрического тензора как основного математического понятия для общей релятивистской теории гравитации (1912).

3) Открытие общих ковариантных уравнений гравитационного поля. В 1913 г. Эйнштейн совместно с Гроссманом получил общие ковариантные уравнения движения материальной точки в поле с заданной метрикой при отсутствии негравитационных сил. Но в 1914 г. Леви–Чивита обнаружил ошибку в выводе этих уравнений. Правильные уравнения Эйнштейн вывел в 1915 г. Эти уравнения имеют вид

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right).$$

Независимо от Эйнштейна теорию гравитации разрабатывал Гильберт (они обменивались в общих чертах своими продвижениями в этой области). Гильберт вывел уравнения, эквивалентные этим, другим (вариационным) способом почти одновременно с Эйнштейном.

В 1916 г. вышла обзорная статья Эйнштейна по общей теории относительности. Она содержит замкнутое изложение основ тензорного анализа, необходимого для этой теории.

9.35. Франческо Севери (1879-1961)

В 1909 г. Севери предложил два определения арифметического рода проективного алгебраического многообразия. Доказал их эквивалентность для трёхмерных алгебраических многообразий и дал набросок доказательства для многообразий произвольной размерности.

В 1915 г. доказал, что на многообразии Грассмана нет положительных дивизоров, отличных от тех, которые задаются гиперплоскостями.

Севери доказал для комплексных алгебраических поверхностей несколько теорем о конечности и конечно-порождённости факторгрупп дивизоров одного типа по дивизорам другого типа. Два дивизора алгебраически эквивалентны, если они принадлежат одному неприводимому алгебраическому семейству дивизоров. Два дивизора численно эквивалентны, если их числа пересечения с любой кривой одинаковые. В группе G всех дивизоров есть подгруппа G_a дивизоров, алгебраически эквивалентных 0, и подгруппа G_n дивизоров, численно эквивалентных 0. Одна теорема Севери: группа G_n/G_a конечная. Другая теорема Севери: группа G/G_n — свободная конечно порождённая коммутативная группа, т.е. $\mathbb{Z}^p$.

9.36. Фридьеш Рисс (1880-1956)

В 1906 и 1908 гг. Рисс опубликовал две статьи, в которых сделал важные предложения по основам аксиоматики общей топологии. Он сформулировал определение связности: пространство связно, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств (это определение заново открыл Хаусдорф в 1914 г.). Ввёл некоторые аксиомы отделимости.

В 1907 г. Рисс и Фишер независимо доказали теорему (теорема Фишера–Рисса) о полноте пространства $L^2[a,b]$. Это пространство состоит из функций (рассматриваемых с точностью до меры нуль — функции, различающиеся лишь на множестве меры нуль, считаются эквивалентными) на отрезке $[a,b]$, квадраты которых интегрируемы по Лебегу; здесь важна интегрируемость именно по Лебегу. Фишер дал прямое доказательство в терминах сходимости в среднем, а Рисс построил изометрию с пострaнством l^2 последовательностей чисел, сумма квадратов которых конечна. Для этого Рисс сопоставил функции последовательность её коэффициентов Фурье по отношению к некоторой полной ортонормированной системе.

В 1909 г. Рисс получил представление функционала в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ в виде интеграла Стильтьеса: $f(x) \mapsto \int_a^b f(x)d\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации.

В 1910-1913 гг. Рисс ввёл нормированные линейные пространства L^p и l^p для любого действительного $p > 1$. Пространство L^p — это пространство измеримых функций $f(x)$ (на некоторой области определения), для которых функция $|f(x)|^p$ интегрируема по Лебегу. При этом функции рассматриваются с точностью до меры нуль, т.е. функции, различающиеся на множестве меры нуль, считаются эквивалентными (это нужно для того, чтобы норма ненулевой функции была отлична от нуля). Норма на пространстве L^p определяется как

$$\int \left(|f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p}.$$

При $0 < p < 1$ так определённая норма не удовлетворяет неравенству треугольника; в этом случае пространство L^p не нормированное.

Пространство l^p — это пространство последовательностей x_i, $i = 1, 2, \dots$, для которых сумма $\sum |x_i|^p$ конечно.

Рисс доказал, что пространства L^p и L^q (и пространства l^p и l^q), где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, двойственны друг другу. Это показало, что двойственность гильбертова пространства L^2 самому себе для бесконечномерных пространств — случайное совпадение, в отличие от конечномерных пространств.

В 1916-1918 гг. Рисс разработал спектральную теорию введённых их компактных операторов в банаховом пространстве. Линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве называется компактным, если замыкание образа любого ограниченного замкнутого множества компактно. Рисс доказал, что у компактного оператора есть не более чем счётное множество собственных значений, отличных от нуля; каждое ненулевое собственное значение изолировано.

9.37. Липот (Леопольд) Фейер (1880-1959)

В работах 1900-1904 гг. Фейер применил метод Чезаро для суммирования расходящихся рядов Фурье. До Фейера под фразой «функция представляется рядом» понималась сходимость ряда к функции. Для Фейера представимость функции рядом Фурье означала, что ряд Фурье суммируется к этой функции методом Чезаро какого-либо порядка. Это позволило включить в класс функций, представимых рядом Фурье, все непрерывные функции.

9.38. Освальд Веблен (1880-1960)

В 1903 г. Веблен построил систему аксиом планиметрии, абсолютно независимых друг от друга (у Гильберта независимы друг от друга лишь группы аксиом).

В 1905 г. Веблен доказал теорему Жордана о замкнутой кривой на плоскости. Это было первое полное строгое доказательство этой теоремы.

В 1932 г. совместно с Дж.Г.К.Уайтхедом дал определение топологического и дифференцируемого многообразия и дифференциалов как элементов касательного пространства в книге «Основания дифференциальной геометрии». Для топологического многообразия функции перехода между картами непрерывные, а для дифференцируемого — дифференцируемые. Поэтому на топологическом многообразии нельзя определить дифференцируемые функции и касательные векторы; можно определить только непрерывные функции.

9.39. Генрих Титце (1880-1964)

В 1908 г. в статье «Топологические инварианты многомерных многообразий» ввёл в рассмотрение гомологии с коэффициентами по модулю 2 (т.е. в группе $\mathbb{Z}_2$). Ввёл новое семейство трёхмерных многообразий — линзовые пространства $L(p,q)$ и высказал предположение, что линзовые пространства $L(5,1)$ и $L(5,2)$ не гомеоморфны (это доказали Александер в 1919 г. и другим способом де Рам в 1931 г.). Указал, что существование общего подразделения двух разбиений, которое без доказательства принимал Пуанкаре, в размерности больше двух — трудная проблема. И вопрос о том, будут ли комбинаторно эквивалентны гомеоморфные многообразия, тоже трудный. Привёл первый пример дикого узла (в связи с тем, что он не может быть границей двумерного клеточного комплекса).

В 1908 г. описал процедуру перехода между двумя разными заданиями одной и той же группы образующими и соотношениями (преобразования Титце).

В 1914 г. доказал, что гомеоморфизм круга на себя, сохраняющий ориентацию границы, изотопен тождественному гомеоморфизму.

В 1915 г. доказал теорему о продолжении функции, заданной на замкнутом множестве в метрическом пространстве (теорема Титце). В 1924 г. Урысон обобщил её на нормальные пространства.

В 1915 г. показал, что ограниченные полунепрерывные сверху функции на метрическом пространстве — это то же самое, что монотонные пределы непрерывных функций (обобщение теоремы Бэра, первоначально доказанной для $\mathbb{R}^n$).

В 1923 г. Титце аксиоматизировал открытые множества как основное понятие топологии (подход Хаусдорфа к определению топологического пространства основан на замкнутых множествах). Ввёл аксиомы отделимости, описывающие нормальные и вполне нормальные пространства. Топологическое пространство называтся *нормальным*, если: 1) его точки — замкнутые множества и 2) любые два непересекающихся замкнутых множества содержатся в непересекающихся открытых множествах.

9.40. Сергей Натанович Бернштейн (1880-1968)

В 1904 г. Бернштейн доказал, что если решение эллиптического уравнения с частными производными от двух переменных трижды дифференцируемо, то оно аналитическое. Это давало решение 19-й проблемы Гильберта.

В 1912 г. получил новое доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении произвольной непрерывной функции на отрезке многочленами. В этом доказательстве явно указывается последовательность многочленов, приближающая данную функцию. Эти многочлены теперь называют многочленами Бернштейна.

В 1912 г. доказал неравенство Бернштейна: если $P(z)$ — многочлен степени n, то $\max_{|z|\le 1}|P'(z)| \le n \max_{|z|\le 1}|P(z)|$ (максимумы в единичном круге на комплексной плоскости).

В 1915-1917 гг. Бернштейн доказал регулярность решения уравнения минимальной поверхности; в 1950 г. Э.Хопф исправил топологический пробел в доказательстве. Радо в 1927 г. получил теоретико-функциональное доказательство.

В 1917 г. Бернштейн предложил первое аксиоматическое построение теории вероятностей.

Значительная часть работ Бернштейна посвящена тому, что он называл конструктивной теорией функций (её основу составляет теория приближения функций).

9.41. Отто Тёплиц (1881-1940)

В 1910 г. совместно с Эрнстом Хеллингером (1883-1950) доказал теорему Хеллингера–Тёплица: если оператор в гильбертовом пространстве аддитивен, однороден и симметричен, то он ограничен.

В 1911 г. в связи с суммированием расходящихся рядов Тёплиц рассматривал квадратные матрицы (a_{ij}), элементы которых удовлетворяют соотношению $a_{ij} = a_{i-1,j-1}$. Матрицы такого вида называют тёплицевыми.

9.42. Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр (1881-1966)

Основные работы Брауэра по топологии опубликованы между 1909 и 1913 гг. В 1909 г. он построил пример кривой, которая делит плоскость на три открытых связных области и при этом является границей каждой из этих областей.

В 1910 г. Брауэр начал заниматься проблемой инвариантности размерности. Сначала он доказал, что пространство чётной размерности не может быть гомеоморфно пространству нечётной размерности, опираясь на различие топологических свойств сфер чётной и нечётной размерности. К середине года Брауэр получил искомое доказательство. Для доказательства инвариантности размерности Брауэр ввёл понятие степени отображения. Он также использовал симплициальные разбиения полиэдров и доказанную им теорему о существовании симплициальной аппроксимации. В это время Лебег уже тоже доказал инвариантность размерности другим способом. В 1913 г. Брауэр опубликовал статью об общем определении размерности. Там, в частности, он доказал свойство, на котором Лебег основывал своё определение размерности (Лебег долго не публиковал своё доказательство).

В 1910 г. Брауэр доказал также теорему о неподвижной точке непрерывного отображения замкнутого шара в себя. Но эту теорему, хотя и в другой форму, уже доказал в 1900 г. латвийский математик Пирс Боль.

В 1910 г. доказал, что на многомерной сфере чётной размерности не существует векторого поля без особых точек.

В 1911 г. доказал теорему Жордана–Брауэра, многомерное обобщение теоремы Жордана: если отображение $\varphi\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ является гомеоморфизмом сферы на свой образ, то образ сферы разбивает $\mathbb{R}^n$ на две части.

В 1912 г. Брауэр доказал топологическую инвариантность области. Если U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ — инъективное непрерывное отображение, то множество $V = f(U)$ открыто и отображение $f\colon U \to V$ — гомеоморфизм. Доказательство использует, в частности, теорему Брауэра о неподвижной точке.

В 1912 г. доказал, что гомотопический класс отображения двумерной сферы на себя характеризуется степенью отображения.

Брауэр основал новое направление в философии математики — интуиционизм. Интуиционизм отличается своим подходом к математическим доказательствам. Интуиционисты отказываются от неконструктивных доказательств, в частности, они отказываются от закона исключённого третьего, от использования бесконечных процессов и от утверждений о бесконечных множествах.

9.43. Эмми Нётер (1882-1935)

В 1915 г., используя теорию инвариантов, доказала теорему Нётер (опубликована в 1918 г.): динамическая система, на которую действует n-параметрическая группа Ли симметрий, имеет n инвариантов, сохраняющихся в процессе движения системы. Эта теорема прояснила связь между симметриями динамической системы и законами сохранения для этой системы.

Эмми Нётер разработала значительную часть понятий современной алгебры.

В 1915 г. доказала лемму Нётер о нормализации; эта лемму получена обобщением одной теоремы Гильберта.

В 1921 г. Нётер ввела понятие *модуля* и рассматривала векторые пространства как частный случай модулей.

В 1921 г. Нётер распространила теорию разложения в кольцах многочленов на общие кольца с условием обрыва возрастающих цепочек. Такие кольца получили называние *нётеровых*.

В 1921 г. обобщила на нётеровы кольца теорему Эмануэля Ласкера (1868–1941) о примарном разложении идеала, доказанную им в 1905 г. для колец полиномов (теорема Ласкера–Нётер).

В 1926 г. Нётер предложила рассматривать гомологии как группы, определив группу Бетти (группу гомологий) как факторгруппу группы циклов по группе границ. До этого гомологии описывались в терминах чисел Бетти (рангов групп гомологий) и коэффициентов кручения (периодических частей групп гомологий).

В 1927 г. показала, что теория разложения в кольцах целых в полях алгебраических чисел тоже укладывается в рамки общей теории для абстрактных колец. В частности, она описала коммутативные кольца, в которых любой ненулевой идеал однозначно представляется в виде произведения простых идеалов. Такие кольца теперь называют *дедекиндовыми областями*.

В 1927-1935 гг. Нётер занималась теорией некоммутативных алгебр. Независимо от Сколема (но позже его) доказала теорему, описывающую автоморфизмы простых алгебр (теорема Сколема–Нётер).

9.44. Пауль Кёбе (1882-1945)

В 1908 г. Кёбе одновременно с Пуанкаре доказал теорему униформизации. Впоследствии он в основном занимался изучением униформизации с разных сторон и разными методами.

9.45. Джозеф Веддербёрн (1882-1948)

В 1905 г. доказал, что любое конечное ассоциативное поле коммутативно, т.е. является полем (теорема Веддербёрна).

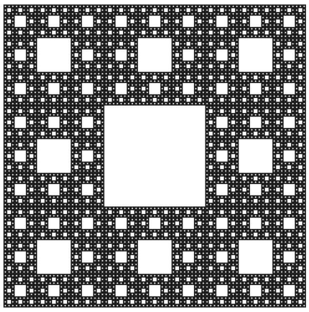

Рис. 9.3.

В 1907 г. Веддербёрн распространил классификацию алгебр, полученную Картаном, на алгебры над произвольным полем.

9.46. Вацлав Серпинский (1882-1969)

В 1915 г. построил так называемый ковёр Серпинского (рис. 9.3) — множество на плоскости, имеющее топологическую размерность 1. Это множество — фрактал, один из двумерных аналогов канторова множества.

В 1947 г. Серпинский доказал, что из обобщённой континуум-гипотезы следует аксиома выбора.

9.47. Николай Николаевич Лузин (1883-1950)

В 1912 г. Лузин построил пример тригонометрического ряда, коэффициенты которого монотонно стремятся к нулю и который почти всюду расходится.

В 1912 г. Лузин доказал, что измеримая функция непрерывна почти во всех точках своей области определения. Функция $f(x)$ измерима, если для любого числа c множество тех x, для которых $f(x) \le c$, измеримо.

Лебег ошибочно полагал, что проекция борелевского множества — борелевское множество. В 1916 г. Лузин и Суслин построили пример, показывающий, что это неверно. Этот пример привёл к созданию дескриптивной теории множеств.

9.48. Эрик Темпл Белл (1883-1960)

В 1927 г. Белл ввёл семейство многочленов

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{j_2} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}},$$

где суммирование ведётся по всем наборам целых неотрицательных чисел j_1, j_2, ..., j_{n-k+1}, для которых $j_1 + j_2 + \dots = k$ и $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \dots = n$. Эти многочлены, получившие название *многочлены Белла*, играют важную роль в комбинаторике. Они тесно связаны с разбиениями, т.е. с представлениями числа n в виде суммы k натуральных слагаемых. Пусть число n представлено в виде суммы k слагаемых, среди которых j_1 единиц, j_2 двоек и т.д. Рассмотрим теперь разбиения n-элементного множества на k подмножеств, среди которых j_1 одноэлементных, j_2 двухэлементных и т.д. Количество таких разбиений равно коэффициенту многочлена $B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1})$ при $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_{n-k+1}^{j_{n-k+1}}$.

Многочлены Белла связаны и с формулой Фаа ди Бруно, выражающей высшие производные композиции функций. Используя многочлены Белла, эту формулу можно записать в виде

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(g(x)) B_{n,k}(g'(x), g''(x), \dots, g^{(n-k+1)}(x)).$$

9.49. Эдуард Хелли (1884-1943)

В 1913 г. Хелли открыл теорему о пересечении выпуклых множеств в многомерном пространстве и сообщил её Радону. Эта теорема формулируется следующим образом: «Пусть семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ состоит из не менее чем $n+1$ множеств, причём либо это семейство конечное, либо каждое множество компактно. Тогда если каждые $n+1$ множеств семейства имеют общую точку, то и все множества семейства имеют общую точку.» Доказательство Хелли опубликовал в 1923 г. В 1930 г. Хелли обобщил эту теорему на множества более общего типа, заменив выпуклые множества на множества с тривиальными гомологиями.

В 1921 г. Хелли первым начал разрабатывать общую теорию бесконечномерных нормированных пространств; до него рассматривали только отдельные примеры: L^p, l_p, $C[a,b]$. Он использовал идею Минковского о соответствии между нормами и выпуклыми центрально симметричными телами в конечномерном случае. Хелли также первым обратил внимание на то, что в бесконечномерном случае двойственное к двойственному пространству может не совпадать с исходным пространством. В качестве примера такого пространства Хелли указал пространство последовательностей x_k, для которых сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, с нормой $\sup_n |\sum_{k=1}^{n} x_k|$.

9.50. Денеш Кёниг (1884-1944)

В 1912 г. Кёниг доказал, что проективное пространство $\mathbb{R}P^{2n}$ неориентируемо, а пространство $\mathbb{R}P^{2n+1}$ ориентируемо.

В 1931 г. доказал эквивалентность задач нахождения максимального паросочетания и минимального вершинного покрытия в двудольных графах (теорема Кёнига). Кёниг сформулировал эту теорему и на языке матриц: если прямоугольная матрица составлена из нулей и единиц, то минимальное число строк или столбцов, содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, которые можно выбрать так, чтобы никакие две из них не лежали в одной строке или одном столбце.

Покончил жизнь самоубийством, чтобы избежать антисемитских преследований.

9.51. Джордж Дэвид Биркгоф (1884-1944)

В 1913 г. Биркгоф доказал так называемую последнюю геометрическую теорему Пуанкаре.

В 1931 г. доказал индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа. Для сохраняющего меру преобразования $T\colon X \to X$ для почти всех x существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \cdots + f(T^{n-1}x)] = f^*(x),$$

причём, предельная функция f^* инвариантна, т.е. $f^*(Tx) = f^*(x)$ почти всюду.

9.52. Соломон Лефшец (1884-1972)

С 1923 по 1925 гг. опубликовал несколько статей, содержащих так называемую теорему Лефшеца о неподвижной точке. Сначала он доказал её для замкнутого ориентируемого многообразия X. Для двух отображений $f, g\colon X \to X$ он рассмотрел в $X \times X$ пересечение графиков $(x, f(x))$ и $(x, g(x))$, и вычислил индекс пересечения. Если индекс пересечения не равен 0, то $f(x) = g(x)$ для некоторой точки $x \in X$. Затем Лефшец перенёс теорему на ориентируемые многообразия с краем, а в 1929 г. Г.Хопф обобщил её на конечные полиэдры.

В 1924 г. обобщил на высшие размерности теорию Пикара исчезающих циклов комплексных поверхностей. Теория исчезающих циклов Пикара–Лефшеца изучает комплексные многообразия, исследуя особые точки голоморфных функций на этих многообразиях. Формула Пикара–Лефшеца описывает монодромию в особой точке.

Используя аналогичные методы, Лефшец начал исследовать гомологии любого неприводимого проективного алгебраического многообразия V размерности n. Доказал теорему Лефшеца о гиперплоских сечениях: если H — сечение V гиперплоскостью общего положения, то канонический гомоморфизм $H_i(H, \mathbb{Z}) \to H_i(V, \mathbb{Z})$, индуцированный вложением $H \to V$, биективен при $0 \le i \le n-2$ и сюръективен при $i = n-1$. Лефшец доказал также общие свойства чисел Бетти b_p алгебраического многообразия: 1) $b_{2p} > 0$; 2) $b_p \ge b_{p-2}$ при $p \le n$; 3) b_{2p+1} — чётное число (возможно, нуль).

В 1928 г. ввёл понятие относительных гомологий.

В 1930 г. в своей книге по топологии Лефшец ввёл гомологии с различными коэффициентами: целыми, рациональными, по модулю m. Идея введения таких гомологий была уже у Пуанкаре. Доказал теорему двойственности Лефшеца, обобщающую двойственность Пуанкаре на многообразия с краем.

В 1930-е гг. Лефшец связал индекс пересечения циклов в многообразии с произведением двойственных им коциклов в когомологиях. Для многообразий умножение в когомологиях двойственно пересечению циклов в гомологиях. Но индекс пересечения можно определить только для многообразий и только для циклов дополнительных размерностей, а умножение в когомологиях можно определить для произвольных пространств и для коциклов любой размерности.

В 1933 г. впервые дал чёткое определение сингулярных гомологий, на уровне неясных идей высказанное ещё в 1907 г. Деном и Хегором.

С именем Лефшеца связан принцип Лефшеца в алгебраической геометрии: любая теорема алгебраической геометрии, справедливая над полем комплексных чисел, в которой идёт речь о конечном наборе алгебраических многообразий и отображений, справедлива и над произвольным алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

9.53. Арно Данжуа (1884-1974)

В 1912 г. определил интеграл, позволяющий интегрировать функции, неинтегрируемые по Лебегу (интеграл Данжуа).

В 1932 г. доказал, что C^2-гладкий диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения топологически сопряжён повороту (теорема Данжуа). Привёл пример C^1-гладкого диффеоморфизма, для которого это неверно.

9.54. Альфред Хаар (1885-1933)

В 1933 г. построил инвариантную меру μ (мера Хаара) на любой локально компактной группе G, удовлетворяющей второй аксиоме счётности. При этом он опирался на работу Петера и Вейля.

Мера Хаара определена однозначно с точностью до положительного множителя. Эта мера обладает следующими свойстами: 1) она односторонне инвариантна, обычно считается, что она инвариантна относительно левых сдвигов, т.е. $\mu(gS) = \mu(S)$ для любого элемента $g \in G$; 2) конечна для любого компактного множества; 3) счётно аддитивна.

На группе Ли левоинвариантная мера строится с помощью левоинвариантной формы. Существование такой меры было известно до Хаара.

Идея построения меры Хаара следующая. Чтобы найти меру множества T, возьмём какое-нибудь множество U и рассмотрим число $[T : U]$ — наименьшее число сдвинутых множеств U, которыми можно покрыть T. По множествам U нужно перейти к пределу. Поэтому для нормировки меры фиксируем компактное множество A с непустой внутренностью и положим $\mu_A(T) = \lim_U \frac{[T:U]}{[A:U]}$, где предел берётся по системе уменьшающихся множеств U.

9.55. Герман Вейль (1885-1955)

В 1913 г. в книге «Идея римановой поверхности» Вейль впервые дал строгое определение римановой поверхности. Он описал конструкцию универсального накрытия, которая годится не только для поверхностей. Для накрытий Вейль рассмотрел группу преобразований накрытия, но не указал на связь с фундаментальной группой.

В 1915 г. Вейль исследовал распределение частот собственных колебаний двумерной мембраны и доказал следующий асимптотический закон. Пусть $N(\lambda)$ — количество собственных значений оператора Лапласа в ограниченной плоской области Ω, которые не меньше λ. Тогда $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{4\pi}$. Эта работа послужила основой для дальнейших многочисленных исследований спектральных свойств оператора Лапласа на римановых многообразиях.

В 1916 г. опубликовал статью «О равномерном распределении чисел по модулю 1». Она сыграла основополагающую роль в создании теории равномерного распределения. Кроме того, в этой статье разработаны способы оценки тригонометрических сумм. Вскоре Харди и Литтлвуд воспользовались этими оценками для обоснования созданного ими кругового метода. Доказано также обобщение теоремы Кронекера об аппроксимации.

В 1918 г. дал аксиоматику конечномерного векторного пространства над полем вещественных чисел, не зная об аналогичной работе Пеано.

Опубликованную в 1925 г. статью «Теория непрерывных представлений полупростых групп при помощи линейных преобразований» Вейль считал своим самым значительным вкладом в математику. Во многом эта работа была продолжением исследований Шура. В 1924 г. Шур обратил внимание на то, что инвариантное интегрирование по группе вращений $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$, которое Гурвиц применил в 1897 г. как аналог суммирования по элементам конечной группы, позволяет распространить на эту группу теорию Фробениуса о полной приводимости представлений конечных групп. Вейлю удалось видоизменить метод Шура так, что он стал пригоден для всех полупростых групп. Этот метод получил название унитарный трюк Вейля. Основная идея унитарного трюка тоже восходит к Гурвицу: он доказывал существование конечного базиса для некомпактной группы $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$, инвариантное интегрирование по которой применить нельзя, применяя инвариантное интегрирование по компактной подгруппе $\mathrm{SU}(n)$.

С помощью унитарного трюка Вейль доказал полную приводимость любого представления полупростой алгебры Ли. Вейль применил топологические рассмотрения. Чисто алгебраическое доказательство полной приводимости впервые получили в 1935 г. Казимир и Ван дер Варден в совместной работе.

Для унитарного трюка ему понадобилось доказать два свойства полупростых групп Ли: 1) универсальное накрытие полупростой группы Ли имеет конечное число листов (т.е. фундаментальная группа полупростой группы Ли конечна); 2) все максимальные торы (подгруппы, изоморфные тору) в полупростой группе Ли сопряжены. Вейль обнаружил важное значение компактной вещественной формы комплексной полупростой группы: изучение представлений комплексной полупростой группы сводится к изучению представлений компактной группы, на которой есть инвариантное интегрирование.

В этой работе введена группа Вейля преобразований подалгебры Картана алгебры Ли. Вейль представлял эти преобразования как отражения относительно гиперплоскостей, перпедикулярных корневым векторам. Отдельные элементы этой группы рассматривались ранее Киллингом и Э.Картаном, но именно Вейль рассмотрел всю группу и её реализацию как конечной группы, порождённой отражениями.

В 1927 г. совместно с Фрицем Петером развил метод построения неприводимых представлений с помощью регулярного представления и применил инвариантное интегрирование для построения полной системы линейных представлений компактной группы Ли. В результате они доказали теорему о полноте состемы ортогональных функций, образуемых коэффициентами неприводимых унитарных представлений компактной группы (теорема Петера–Вейля). Эта теорема аналогична разложению регулярного представления конечной группы на неприводимые составляющие.

Книги Вейля «Теория групп и квантовая механика» (1928) и «Классические группы, их инварианты и представления» (1939) оказали большое влияние на развитие теории представлений групп.

В 1939 г. опубликована статья об объёме труб (т.е. трубчатых ε-окрестностей вложенного подмногообразия). Эта работа фактически содержала многомерное обобщение формулы Гаусса–Бонне, выражающей интеграл гауссовой кривизны риманова многообразия через его эйлерову характеристику. Основной результат — независимость коэффициентов разложения по ε объёма трубы от вложения подмногообразия в евклидово пространство и явные выражения этих коэффициентов через компоненты тензора кривизны.

В 1942 г. Вейль получил новое доказательство второй теоремы Минковского о выпуклом теле.

В 1949 г. доказал неравенство Вейля между двумя видами собственных чисел линейного преобразования. Пусть λ_i и k_i — квадраты модулей собственных значений и собственные значения матриц A и A^*A соответственно, расположенные в порядке убывания. Тогда $\lambda_1^s + \dots + \lambda_m^s \le k_1^s + \dots + k_m^s$ для $m = 1, 2, \dots, n$, где n — порядок матрицы A. Неравенство Вейля — обобщение неравенства Шура для s-х степеней модулей собственных значений матрицы.

9.56. Мишель显 Планшерель (1885-1967)

В 1910 г. доказал теорему Планшереля: преобразование Фурье, определённое на пространстве быстро убывающих функций, единственным образом продолжается до изометричного отображения пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$.

9.57. Людвиг Бибербах (1886-1982)

В 1910 г. решил первую часть 18-й проблемы Гильберта: доказал, что число кристаллографических групп в евклидовом пространстве любой размерности конечно.

Вторая половина проблемы Гильберта такая: можно ли заполнить пространство равными фундаментальными областями, не связанными с кристаллографическими группами. Пример в трёхмерном пространстве построил К.Рейнхардт в 1928 г. В 1935 г. более простой пример на плоскости построил Генрих Хееш (1906-1995). В 1974 г. Роджер Пенроуз обнаружил неповторяющиеся замощения плоскости плитками двух разновидностей. Такие замощения привели к открытию квазикристаллов.

В 1916 г. Бибербах получил оценки для однолистных функций в единичном круге. Функция $w = f(z)$ однолистна в области D, если она принимает разные значения w при разных $z \in D$. Пусть функция $w = f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ однолистна в круге $|z| < 1$. Тогда $|a_2| \le 2$ и $f(z)$ принимает любое значение w, для которого $|w| < \frac{1}{4}$. Эти оценки неулучшаемы. Гипотеза Бибербаха: $|a_n| \le n$ для всех $n \ge 2$. Доказана в 1984 г. Луи де Бранжем (р. 1932).

9.58. Гуго Гизекинг (1887-1914)

В 1912 г. Гизекинг построил пример трёхмерного гиперболического многообразия. Берётся тетраэдр с вершинами на абсолюте в трёхмерном гиперболическом пространстве, его рёбра удаляются и некоторым образом отождествляются пары его граней. Многообразие Гизекинга неориентируемо и накрывается сферой, из которой вырезан узел восьмёрка.

9.59. Сриниваса Рамануджан (1887-1920)

В 1917 г. совместно с Харди получил асимптотическое выражение для числа разбиений $p(n)$.

В 1913 г. Рамануджан переоткрыл (без доказательства) так называемые тождества Роджерса–Рамануджана в теории разбиений, открытые Роджерсом в 1894 г. В 1919 г. Роджерс и Рамануджан опубликовали совместную статью с новым доказательством этих тождеств.

9.60. Эрих Гекке (1887-1947)

В 1917 г. Гекке доказал, что дзета-функция Дедекинда $\zeta_K(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость как мероморфная функция с простым полюсом в точке $s = 1$. Получил функциональное уравнение для дзета-функции Дедекинда.

В 1937 г. Гекке исследовал операторы $T(n)$, действующие на пространстве модулярных функций. Эти операторы коммутируют и удовлетворяют соотношениям 1) $T(m)T(n) = T(mn)$ для взаимно простых m и n; 2) $T(p)T(p^n) = T(p^{n+1}) + p^{2k-1}T(p^{n-1})$, если p простое и $n \geq 1$. Операторы T_n называют операторами Гекке, а порождённую ими алгебру называют алгеброй Гекке. Алгебра Гекке оказалась тесно связанной с теорией узлов.

9.61. Вальтер Майер (1887-1948)

В 1929 г., развивая идею Нётер об определении гомологий как групп (1926), Майер начал рассматривать цепные комплексы для определения гомологий. Он получил одно из утверждений о связи гомологий двух полиэдров, их объединения и пересечения. В 1930 г. Вьеторис дополнил это утверждение. Впоследствии эти утверждения были объединены в точную последовательность Майера–Вьеториса.

9.62. Харальд Бор (1887-1951)

Младший брат Нильса Бора. Между 1923 и 1926 гг. разработал теорию почти периодических функций (сначала он называл их быстропеpодическими). К этим функциям он пришёл, исследуя дзета-функцию Римана.

При сложении двух непрерывных периодических функций с разными периодами может получиться непериодическая функция. Но полученная функция $h(x)$ обладает следующим свойством. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $L > 0$, что в любом интервале длины L можно выбрать число τ, для которого $|h(x+\tau) - h(x)| < \varepsilon$ для всех x. Функции, обладающие таким свойством, называют почти периодическими. Непрерывная функция является почти периодической тогда и только тогда, когда её можно представить в виде равномерного предела последовательности конечных тригонометрических сумм.

9.63. Иоганн Радон (1887-1956)

В 1913 г. доказал для пространства $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега так называемую теорему Радона–Никодима. Эта теорема описывает общий вид меры, абсолютно непрерывной относительно другой меры. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ тогда и только тогда, когда $\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx)$ для некоторой измеримой функции $f(x)$. Функция f называется производной Радона–Никодима меры ν относительно меры μ. Отто Никодим (1887–1974) доказал эту теорему в общем случае в 1930 г.

В том же 1913 г. Радон получил многомерное обобщение представление Рисса функционала на пространстве непрерывных функция на отрезке.

В 1917 г. ввёл преобразование Радона. В двумерном случае это преобразование сопоставляет функции на плоскости её интегралы по всем прямым, а в многомерном случае — интегралы по гиперплоскостям. Преобразование Радона обратимо; именно на этом основаны применения преобразования Радона (например, в томографии).

В 1921 г. доказал теорему Радона, относящуюся к многомерной выпуклой геометрии: произвольное множество из $d + 2$ точек в d-мерном пространстве можно разделить на два непересекающихся подмножества, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

В 1922 г. получил решение задачи Гурвица о мультипликативных тождествах между квадратичными формами: для какого наибольшего $r = \rho(n)$ существует тождество вида

$$(x_1^2 + \cdots + x_r^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = (z_1^2 + \cdots + z_n^2),$$

где каждое z_i — это билинейная форма от x и y. В 1923 г. независимо решение получил сам Гурвиц. Числа $\rho(n)$, дающие ответ в этой задаче, называют числами Радона–Гурвица. Они определяются следующим образом. Если

$n = 2^b a$, где a нечётно, и $b = c + 4d$, где $0 \leq c < 4$, то $\rho(n) = 2^c + 8d$. Эти числа возникают во многих задачах, например, в задаче о линейно независимых векторных полях на сфере.

9.64. Эрвин Шрёдингер (1887-1961)

В 1926 г. опубликовал дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее изменение во времени квантового состояния системы. Уравнение Шрёдингера стало важным объектом исследований в математике.

9.65. Торальф Сколем (1887-1963)

В 1912 г. Сколем одним из первых начал изучать решётки. Решётка — это алгебраическая структура с двумя бинарными операциями, аналогичными операциям взятия верхней и нижней грани в упорядоченных множествах. Сколем первым описал свободную дистрибутивную решётку, порождённую n элементами.

В 1922 г. Сколем и Френкель независимо обнаружили пробел в системе аксиом теории множеств, предложенной Цермело: он не потребовал, что если совокупность эквивалентна множеству (т.е. между членами совокупности и множества есть взаимно однозначное соответствие), то эта совокупность является множеством. Сколем и Френкель усовершенствовали эту систему аксиом, добавив схему преобразования множеств. Сколем уточнил также, что такое «определённое свойство» у Цермело: это свойство, которое можно закодировать на языке логики первого полядка. Усовершенствованная таким образом система аксиом остаётся наиболее распространённой системой аксиом теории множеств.

В 1927 г. доказал теорему, описывающую автоморфизмы простых алгебр. Через несколько лет эту теорему независимо доказала Э.Нётер (теорема Сколема–Нётер).

9.66. Гуго Штейнгауз (1887-1972)

В 1927 г. совместно с Банахом доказал теорему Банаха–Штейнгауза: множество непрерывных линейных отображений, ограниченное в каждой точке банахова пространства, равномерно ограничено на единичном шаре.

9.67. Джеймс Уодделл Александер (1888-1971)

В 1915 г. Александер доказал независимость гомологий от триангуляции. Доказательство использует симплициальные отображения, симплициальную аппроксимацию и сингулярные цепи.

В 1919 г. доказал предположение Титце (1908) о том, что линзовые пространства $L(5, 1)$ и $L(5, 2)$, имеющие одинаковые фундаментальные группы, не гомеоморфны.

В 1920 г. доказал, что любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие можно представить как разветвлённое накрытие сферы S^3 с ветвлением над некоторым зацеплением.

В 1922 г. выяснил связь между гомологиями (с коэффициентами по модулю 2) компактного клеточного комплекса X и гомологиями $S^n \setminus X$, где S^n — сфера размерности n (двойственность Александера). В частности, гомологии $S^n \setminus X$ не зависят от того, как именно X вложен в сферу. В случае, когда $X = S^{n-1}$, это даёт обобщение теоремы Жордана о кривой на многомерные пространства

В 1923 г. доказал, что любой узел (и любое зацепление) можно представить в виде замыкания косы. Но это уже доказал Генрих Брунн в 1897 г. В том же 1923 г. Александер получил существенно более простое доказательство теоремы Титце о том, что гомеоморфизм шара на себя, сохраняющий ориентацию границы, изотопен тождественному гомеоморфизму. Для обоих утверждений доказательства Александера и использованные при этом идеи получили широкое распространение.

В 1924 г. доказал, что двумерная сфера, гладко вложенная в трёхмерную сферу, разделяет её на два шара, а гладко вложенный тор разделяёт трёхмерную сферу на две части, одна из которых — полноторие. Тогда же построил так называемую рогатую сферу Александера — двумерную сферу, непрерывно вложенную в трёмерную сферу так, что одна из частей, на которые она разделяет трёхмерную сферу, неодносвязна, а потому не гомеоморфна шару. Этот пример показывает, что для непрерывных вложений сферы неверен аналог теоремы Шёнфлиса для непрерывных замкнутых кривых.

В 1928 г. Александер построил топологический инвариант узлов и зацеплений — полином Александера. Полином Александера определён с точностью до умножения на $\pm t^n$. В примечаниях Александер отметил соотношение для некой нормализации полинома Александера, но сначала на это не обратили внимания. Много лет спустя аналогичное соотношение позволило Конвею определить полином Конвея.

В 1935 г. Александер дал определение специального вида когомологий для компактных метрических пространств. В 1948 г. Спеньер распространил это определение на любое топологическое пространство (когомологии Александера–Спеньера). Александер дал определение cup-умножения в когомологиях. В 1936 г. определение когомологий и умножения в когомологиях независимо от Александера дал Колмогоров. Умножение в когомологиях произвольного симплициального комплекса оказалось неожиданностью, потому что до этого умножение связывалось только с многообразиями, на основе пересечения циклов. Умножение в когомологиях давало дополнительную очень полезную структуру, и это сделало когомологии более мощным инструментом, чем гомологии.

9.68. Луис Джоэл Морделл (1888-1972)

В 1922 г. доказал теорему о конечности числа образующих группы точек эллиптической кривой (т.е. кривой рода 1) над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Такую гипотезу выдвинул и частично обосновал Пуанкаре. К рассуждениям Пуанкаре Морделл добавил оценки поведения при групповой операции *высоты* точек кривой (высота точки (x_0, x_1, x_2) с взаимно простыми однородными координатами — это наибольшее из чисел $|x_0|$, $|x_1|$, $|x_2|$).

В том же году сформулировал гипотезу Морделла: число точек кривой рода больше 1 над полем $\mathbb{Q}$ конечно. Эта гипотеза доказана Фальтингсом в 1983 г.

9.69. Рене Эжен Гато (1889-1914)

В 1913 г. распространил понятие производной на бесконечномерные пространства с нормой (производная Гато). Производная отображения $F\colon X \to Y$ по направлению h определяется как предел $\lim_{t\to 0} \frac{F(x+th)-F(x)}{t}$ (сходимость по норме).

9.70. Джакомо Альбанезе (1890-1948)

В 1924 г. Альбанезе доказал эквивалентность двух определений арифметического рода, данных Севери, для четырёхмерных алгебраических многообразий.

С именем Альбанезе связано так называемое многообразие Альбанезе. Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда существует абелево многообразие A и морфизм $\alpha\colon X \to A$ со следующим универсальным свойством: для любого комплексного тора T и любого морфизма $f\colon X \to T$ существует единственный морфизм $\tilde{f}\colon A \to T$, для которого $\tilde{f} \circ \alpha = f$. Абелево многооразие A, определённое этим условием однозначно с точностью до изоморфизма, называют многообразием Альбанезе.

9.71. Якоб Нильсен (1890-1959)

В 1913 г. Нильсен выяснял, какое наименьшее число неподвижных точек может иметь отображения тора T, гомотопное данному отображению $f\colon T \to T$. Для этого он поднял это отображение в универсальное накрытие тора (т.е. в плоскость). Так он получил оценку снизу, уже известную Брауэру. Но метод Нильсена можно было распространить на отображения конечного полиэдра $f\colon X \to X$ и определить число Нильсена $N(f)$. Любое отображение, гомотопное f, имеет по крайней мере $N(f)$ неподвижных точек.

В 1920-е гг. Ден описал группу гомеоморфизмов (с точностью до изотопии) двумерной ориентируемой поверхности, но не опубликовал эти результаты. Их с некоторыми дополнениями опубликовал в 1927 г. Нильсен, его ученик. Это описание получило название теорема Дена–Нильсена.

9.72. Рональд Эйлмер Фишер (1890-1962)

Фишер, по профессии биолог, внёс большой вклад в развитие прикладной математической статистики. Разработал метод оценки статистической значимости различий (точный тест Фишера).

9.73. Абрахам Френкель (1891-1965)

В 1914 г. Френкель дал определение кольца.

Дважды, в 1922 г. и в 1925 г., Френкель пытался улучшить систему аксиом Цермело, чтобы избежать парадоксов теории множеств. Цермело не потребовал, что если совокупность эквивалентна множеству (т.е. между членами совокупности и множества есть взаимно однозначное соответствие), то эта совокупность является множеством. Чтобы устранить этот пробел, Френкель ввёл аксиому подстановки: если каждый элемент множества заменить множеством, то в результате получится множество. Доказал независимость аксиомы выбора в системе аксиом Цермело. В 1922 г. Сколем модифицировал систему аксиом Цермело–Френкеля, и новую систему аксиом стали называть системой аксиом Цермело–Френкеля–Сколема. В этой системе аксиом независимость аксиомы выбора доказывается сложно; это сделал только Коэн в 1963 г.

9.74. Иван Матвеевич Виноградов (1891-1983)

В 1934 г. Виноградов существенно улучшил оценку Харди и Литлвуда для наименьшего числа $r(n)$ из проблемы Варинга (любое натуральное число можно представить в виде суммы не более $r(n)$ натуральных чисел в степени n). Метод Харди и Литлвуда основан на оценках тригонометрических сумм. В 1937 г., развивая метод Харди и Литлвуда, Виноградов доказал, что любое достаточно большое число есть сумма трёх простых чисел.

9.75. Леопольд Вьеторис (1891-2002)

В 1921 г. Вьеторис ввёл понятие направленной системы множеств и фактически ввёл понятие базиса фильтра и предела по базису фильтра, но это понятие стало широко применяться только после того, как его переоткрыл Г.Биркгоф в 1935 г.

В том же гожу доказал, что (в современной терминологии) компактное топологическое пространство нормально.

В 1927 г. впервые определил гомологии для пространств, отличных от полиэдров. Гомологии Вьеториса определены для произвольных подмножеств евклидова пространства (и даже метрического пространства).

В 1929 г. Майер получил одно из утверждений о связи гомологий двух полиэдров, их объединения и пересечения. В 1930 г. Вьеторис дополнил это утверждение. Впоследствии эти утверждения были объединены в точную последовательность Майера–Вьеториса.

9.76. Стефан Банах (1892-1945)

В 1922 г. доказал теорему Банаха о неподвижной точке. Эта теорема гарантирует существование и единственность неподвижной точки сжимающего отображения $T\colon X \to X$ метрического пространства с метрикой d. Отображение называют *сжимающим*, если существует число q, $0 \le q < 1$, для которого $d(T(x), T(x)) \le qd(x, x)$.

В 1923 г. Банах опубликовал свои исследования произвольных (не обязательно конечномерных) нормированных пространства (эти исследования он начал в 1920 г.). Банах ограничился полными пространствами (т.е. пространствами, в которых любая последовательность Коши имеет предел). Впоследствии Фреше предложил называть такие пространства *банаховыми*. Банах исследовал также непрерывные линейные отображения таких пространств.

В 1924 г. Банах совместно с Тарским привёл пример разбиения шара в трёхмерном пространстве на несколько частей, из которых можно сложить два точно таких же шара (парадокс Банаха–Тарского). Имеется в виду, что к каждой из этих частей применяется какое-то движение пространства, в результате получаются непересекающиеся множества, объединение которых — два шара того же радиуса. Построение примера основано на том, что в группе движений трёхмерного пространства есть свободная подгруппа с двумя образующими. При построении существенно используется аксиома выбора. Этот пример показывает, что нельзя определить меру, инвариантную относительно движений и конечно аддитивную, сразу на всех ограниченных множеств в пространстве; участвующие в этом примере множества неизмеримы по Лебегу. Банах показал, что для всех ограниченных множеств на прямой и на плоскости можно определить меру, инвариантную относительно движений и конечно аддитивную. Пример множества Витали, неизмеримого по Лебегу, показывает, что эта мера не может быть счётно аддитивной. Банах и Тарский воспользовались идеями построения более раннего парадокса Хаусдорфа.

В 1927 г. совместно со Штейнгаузом доказал теорему Банаха–Штейнгауза: множество непрерывных линейных отображений, ограниченное в каждой точке банахова пространства, равномерно ограничено на единичном шаре.

В 1929 г. ввёл понятие сублинейного функционала и доказал теорему Хана–Банаха для сублинейных функционалов (Хан доказал её в 1927 г. в частном случае — для норм). Функционал p на линейном пространстве *сублинейный*, если $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ и $p(rx) = rp(x)$ при $r > 0$. Пусть p — сублинейный функционал на L, L_0 — подпространство в L, $f_0 \in L_0^*$ мажорируется функционалом p, т.е. $f_0(x) \le p(x)$ для всех $x \in L_0$. Тогда f_0 обладает продолжением $f \in L^*$, также мажорируемым функционалом p.

В 1929 г. Банах доказал несколько теорем о банаховых пространствах. Важнейшие среди них — теорема о замкнутом графике (линейное отображение банаховых пространств, график которого замкнут, непрерывно) и теорема об ограниченном обратном отображении (у взаимно однозначного отображения банаховых пространств есть ограниченное обратное отображение).

В 1933 г. Банах и Станислав Мазур (1905-1981) построили первый пример недополняемого подпространства в банаховом пространстве. Они также доказали теорему Банаха–Мазура: любое вещественное сепарабельное банахово пространство можно изометрично вложить в пространство $C[0, 1]$ в качестве замкнутого подпространства.

Книга Банаха «Теория линейных операций» (1932) утвердила функциональный анализ как одну из важнейших областей современного анализа.

Во время оккупации Львова Банах работал кормителем вшей на заводе по производству противотифозной вакцины. В августе 1945 г. он умер от рака лёгких.

9.77. Торстен Карлеман (1892-1949)

В середине 20-х годов Карлеман разрабатывал теорию квазианалитических функций. Квазианалитические функции, определённые на отрезке $[a, b]$, обладают, в частности, тем свойством, что если в некоторой точке функция и все её производные равны нулю, то функция тождественно равна нулю на всём отрезке.

В 1926 г. доказал следующее неравенство, которое выполняется для любой последовательности неотрицательных чисел a_n (неравенство Карлемана):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\dots a_n)^{1/n} \leq e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Это неравенство понадобилось для доказательства теоремы Данжуа–Карлемана (эта теорема содержит различные достаточные условия квазианалитичности).

9.78. Ганс Радемахер (1892-1969)

В 1937 г. Радемахер получил сходящийся ряд для числа разбиение $p(n)$. До этого Харди и Рамануджан получили только асиптотическое выражение.

В 1954 г. получил обобщение формулы взаимности для сумм Дедекинда.

9.79. Герман Кюннет (1892-1975)

В 1923 г. Кюннет выразил числа Бетти произведения $X \times Y$ многообразий через числа Бетти многообразий X и Y, а в 1924 г. получил соответствующее выражение для коэффициентов кручения. Таким образом, Кюннет получил выражение гомологий произведения многообразия через гомологии множителей.

9.80. Марстон Морс (1892-1977)

В 1917 г. применил последовательность Туэ–Морса в дифференциальной геометрии, для построения геодезической специального вида на поверхности отрицательной кривизны. Эту последовательность описал Туэ в 1906 г. Она начинается с нуля, а затем на каждом шаге дописывается булево дополнение к получившемся последовательности: 0, 01, 0110, 01101001, и т.д.

В 1925-1931 гг. Морс разработал теорию, позволяющую получить информацию о глобальном строении многообразия, исходя из информации о локальном строении окрестностей критических точек функции на этом многообразии (теория Морса).

Критическая точка гладкой функции f на многообразии M — это точка, в которой обращаются в нуль все частные производные функции f. Критическая точка невырожденная, если определитель матрицы, составленной из вторых производных функции f, отличен от нуля.

О строении функции в окрестности невырожденной критической точки Морс доказал следующее утверждение (лемма Морса): в окрестности невырожденной критической точки p функции f на гладком многообразии существует локальная система координат (с началом координат в точке p), в которой $f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$. Число k — *индекс* критической точки p.

Морс описал, как меняется множество $M_a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$ при прохождении через критическую точку p. При описании с точностью до гомотопии приклеивается шар D^k, размерность которого равна индексу критической точки. А при описании с точностью до гомеоморфизма приклеивается ручка $D^k \times D^{n-k}$. Из такого разложения на ручки Морс вывел неравенства, связывающие числа Бетти многообразия и количества критических точек данного индекса (неравенства Морса).

В 1934-1938 гг. Морсу удадось применить разработанную им ранее для конечномерных многообразий теорию к (бесконечномерному) метрическому пространству $\Omega(M; p, q)$ кусочно гладких кривых, соединяющих две данные точки p и q многообразия M. Эти исследования Морса относятся к вариационному исчислению в целом — исследованию глобального поведения геодезических. В пространстве $\Omega(M; p, q)$ геодезические — это экстремальные точки функционала длины кривой. Геодезические связаны с топологической структурой пространства $\Omega(M; p, q)$, для их изучения можно применить неравенства Морса из теории Морса. Рассматривая геодезические вариации, Морс ввёл для каждой геодезической γ симметрическую билинейную форму, индекс которой конечен. Этот индекс равен количеству точек $\gamma(t)$, $0 < t < 1$, геодезической γ, сопряжённых с точкой $\gamma(0)$ вдоль γ. Основная теорема теории Морса: если точки p и q не сопряжены вдоль любой геодезической, то пространство $\Omega(M; p, q)$ имеет гомотопический тип счётного клеточного комплекса, в котором каждой геодезической из p в q с индексом λ отвечает одна клетка размерности λ. С помощью этой теории Морс доказал, что для любой римановой метрики на n-мерной сфере существует бесконечно много геодезических, соединяющих две данные точки.

9.81. Дмитрий Евгеньевич Меньшов (1892-1988)

В 1916 г. построил пример тригонометрического ряда, который почти всюду сходятся к нулю и у которого есть ненулевой коэффициент.

Предметный указатель