ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами

1. Основные определения. В математике встречаются самые разнообразные *множества.* Можно говорить о множестве граней многогранника, точек на прямой, множестве натуральных чисел и т. д. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «множество» его синонимами: совокупность, собрание элементов и т. п.

Роль, которую понятие множества играет в современной математике, определяется не только тем, что сама теория множеств стала в настоящее время весьма обширной и содержательной дисциплиной, но главным образом тем влиянием, которое теория множеств, возникшая в конце прошлого столетия, оказывала и оказывает на всю математику в целом. Не ставя своей задачей сколько-нибудь полное изложение этой теории, мы здесь лишь введем основные обозначения и приведем первоначальные теоретико-множественные понятия, используемые в дальнейшем.

Множества мы будем обозначать прописными буквами $A, B, \ldots$, а их элементы — малыми $a, b, \ldots$ Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$ (или $A \ni a$); запись $a \notin A$ (или $A \not\ni a$) означает, что элемент a не принадлежит A. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A *подмножеством* множества B и пишем $A \subset B$. Например, целые числа образуют подмножество в множестве всех действительных чисел.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого* множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Мы будем обозначать его символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными.*

2. Операции над множествами. Пусть A и B — произвольные множества; их *суммой*, или *объединением* $C = A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1).

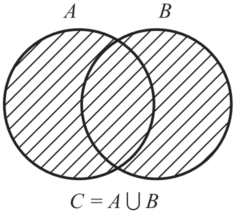


Рис. 1

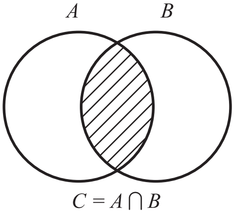


Рис. 2

Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α — произвольные множества, то их сумма $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α.

Назовем *пересечением* $C = A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B (рис. 2). Например, пересечение множества всех четных чисел и множества всех чисел, делящихся на три, состоит из всех целых чисел, делящихся без остатка на шесть. Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

Операции сложения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, т. е.

$$A \cup B = B \cup A, \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cap B = B \cap A, \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

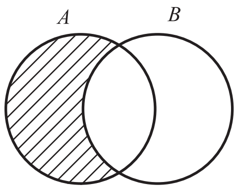
Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1}$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2}$$

Действительно, проверим, например, первое из этих равенств[1]). Пусть элемент x принадлежит множеству, стоящему в левой части

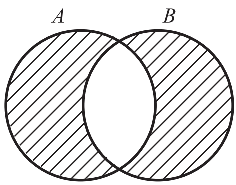
[1]) Равенство двух множеств $A = B$ понимается как тождественное равенство, т. е. оно означает, что каждый элемент множества A принадлежит B, и наоборот. Иначе говоря, равенство $A = B$ равносильно тому, что выполнены оба включения: $A \subset B$ и $B \subset A$.

равенства (1), т.е. $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что x входит в C и, кроме того, по крайней мере в одно из множеств A или B. Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, т.е. входит в правую часть рассматриваемого равенства. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in C$ и, кроме того, x входит в A или B, т.е. $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$. Равенство (1) доказано. Аналогично проверяется равенство (2).



$C = A \setminus B$

Рис. 3



$C = A \Delta B$

Рис. 4

Определим для множеств операцию вычитания. Назовем *разностью* $C = A \setminus B$ множеств A и B совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B (рис. 3). При этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$. Вместо $A \setminus B$ иногда пишут $A - B$.

Иногда (например, в теории меры) удобно рассматривать так называемую *симметрическую разность* двух множеств A и B, которая определяется как сумма разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ (рис. 4). Симметрическую разность C множеств A и B мы будем обозначать символом $A \vartriangle B$. Таким образом, по определению,

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Упражнение. Показать, что

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества S, например, различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $S \setminus A$ называют *дополнением* множества A и обозначают $\complement A$ или A'.

В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет так называемый принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях:

1. *Дополнение суммы равно пересечению дополнений*:

$$S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{3}$$

2. *Дополнение пересечения равно сумме дополнений*:

$$S \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{4}$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества S, совершенно автоматически может быть получено другое — двойственное — равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств — пересечениями, а пересечений — суммами. Примером использования этого принципа может служить вывод теоремы 3$'$ из теоремы 3 § 2 гл. II.

Приведем доказательство соотношения (3).

Пусть $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup_\alpha A_\alpha$, т. е. не входит ни в одно из множеств A_α. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $S \setminus A_\alpha$ и потому $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Обратно, пусть $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, т. е. x входит в каждое $S \setminus A_\alpha$; тогда x не входит ни в одно из множеств A_α, т. е. не принадлежит их сумме $\bigcup_\alpha A_\alpha$, а тогда $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Равенство (3) доказано. Соотношение (4) доказывается аналогично. (Проведите доказательство.)

Название «симметрическая разность» для операции $A \,\triangle\, B$ не совсем удачно; эта операция во многом аналогична операции взятия суммы множеств $A \cup B$. Действительно, $A \cup B$ означает, что мы связываем *неисключающим* «или» два утверждения: «элемент принадлежит A» и «элемент принадлежит B», а $A \,\triangle\, B$ означает, что те же самые два утверждения связываются *исключающим* «или»: элемент x принадлежит $A \,\triangle\, B$ тогда и только тогда, когда он принадлежит либо *только* A, либо *только* B. Множество $A \,\triangle\, B$ можно было бы назвать «суммой по модулю два» множеств A и B (берется объединение этих двух множеств, но элементы, которые при этом встречаются дважды, выбрасываются).

§ 2. Отображения. Разбиения на классы

1. Отображение множеств. Общее понятие функции. В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве определена функция f, если каждому числу

$x \in X$ поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При этом X называется *областью определения* данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, — ее *областью значений*.

Если же вместо числовых рассматривать множества какой угодно природы, то мы придем к самому общему понятию функции. Пусть M и N — два произвольных множества. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значения из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент y из N. Для множеств произвольной природы (как, впрочем, и в случае числовых множеств) вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое. При специализации природы множеств M и N возникают специальные типы функций, которые носят особые названия «вектор-функция», «мера», «функционал», «оператор» и т. д. Мы столкнемся с ними в дальнейшем.

Для обозначения функции (отображения) из M в N мы будем часто пользоваться записью $f\colon M \to N$.

Если a — элемент из M, то отвечающий ему элемент $b = f(a)$ из N называется *образом* a (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из M, образом которых является данный элемент $b \in N$, называется *прообразом* (или, точнее, *полным прообразом*) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть A — некоторое множество из M; совокупность $\{f(a)\colon a \in A\}$ всех элементов вида $f(a)$, где $a \in A$, называется *образом* A и обозначается $f(A)$. В свою очередь для каждого множества B из N определяется его (полный!) прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из M, образы которых принадлежат B. Может оказаться, что ни один элемент b из B не имеет непустого прообраза, тогда и прообраз $f^{-1}(B)$ будет пустым множеством.

Здесь мы ограничимся рассмотрением самых общих свойств отображений.

Введем следующую терминологию. Мы будем говорить, что f есть *отображение* множества M *«на»* множество N, если $f(M) = N$; такое отображение называют также *сюрьекцией*. В общем случае, т. е. когда $f(M) \subset N$, говорят, что f есть *отображение* M *«в»* N.

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется *инъекцией*. Отображение $f : M \to N$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием между* M *и* N.

Установим основные свойства отображений.

Теорема 1. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов*:
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Доказательство. Пусть элемент x принадлежит множеству $f^{-1}(A \cup B)$. Это означает, что $f(x) \in A \cup B$, т.е. $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$. Но тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$, т.е. $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$, т.е. $f(x)$ принадлежит хотя бы одному из множеств A или B, следовательно, $f(x) \in A \cup B$, но тогда $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Теорема 2. *Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов*:
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Доказательство. Если $x \in f^{-1}(A \cap B)$, то $f(x) \in A \cap B$, т.е. $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, т.е. $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$. Иначе говоря, $f(x) \in A \cap B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Теорема 3. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов*:
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Доказательство. Если $y \in f(A \cup B)$, то это означает, что $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B. Следовательно, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, т.е. $x \in A \cup B$ и, следовательно, $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

Теоремы 1, 2 и 3 остаются в силе для сумм и пересечений любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Заметим, что *образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов*. Например, пусть рассматриваемое отображение представляет собой проектирование плоскости на ось x. Тогда отрезки
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad y = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad y = 1$$
не пересекаются, а в то же время их образы совпадают.

Упражнение. Докажите, что прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Верно ли аналогичное утверждение для образа дополнения?

2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности. В самых различных вопросах встречаются разбиения тех или иных множеств на попарно непересекающиеся подмножества. Например, плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси x, трехмерное пространство можно представить как объединение концентрических сфер различных радиусов (начиная с $r = 0$), жителей данного города можно разбить на группы по их году рождения и т. п.

Каждый раз, когда некоторое множество M представлено тем или иным способом как сумма попарно непересекающихся подмножеств, мы говорим о *разбиении множества* M *на классы.*

Обычно приходится иметь дело с разбиениями, построенными на базе того или иного признака, по которому элементы множества M объединяются в классы. Например, множество всех треугольников на плоскости можно разбить на классы равных между собой или на классы равновеликих треугольников, все функции от x можно разбить на классы, собирая в один класс функции, принимающие в данной точке одинаковые значения, и т. д.

Признаки, по которым элементы множества разбиваются на классы, могут быть самыми разнообразными. Но все же такой признак не вполне произволен. Предположим, например, что мы захотели бы разбить все действительные числа на классы, включая число b в тот же класс, что и число a, в том и только в том случае, когда $b > a$. Ясно, что никакого разбиения действительных чисел на классы таким путем получить нельзя, так как если $b > a$, т. е. если b следует зачислить в тот же класс, что и a, то $a < b$, т. е. число a *нельзя* включить в тот же класс, что и b. Кроме того, так как a не больше, чем само a, то a *не должно попасть* в один класс с самим собой! Другой пример. Попробуем разбить точки плоскости на классы, относя две точки к одному классу в том и только том случае, когда расстояние между ними меньше 1. Ясно, что добиться этого нельзя, так как если расстояние от a до b меньше 1 и расстояние от b до c меньше 1, то это вовсе не означает, что расстояние от a до c меньше 1. Таким образом, зачисляя a в один класс с b, а b в один класс с c, мы получим, что в один и тот же класс могут попасть две точки, расстояние между которыми больше 1.

Приведенные примеры подсказывают условия, при которых тот или иной признак действительно позволяет разбить элементы некоторого множества на классы.

Пусть M — некоторое множество и пусть некоторые из пар (a, b) элементов этого множества являются «отмеченными»[1]). Если (a, b) — «отмеченная» пара, то мы будем говорить, что элемент a связан с b отношением φ, и обозначать это символом $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Например, если имеется в виду разбиение треугольников на классы равновеликих, то $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает «треугольник a имеет ту же площадь, что и треугольник b». Данное отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами.

1) Рефлексивность: $a \underset{\varphi}{\sim} a$ для любого элемента $a \in M$.
2) Симметричность: если $a \underset{\varphi}{\sim} b$, то $b \underset{\varphi}{\sim} a$.
3) Транзитивность: если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ и $b \underset{\varphi}{\sim} c$, то $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы отношение φ (признак!) позволяло разбить множество M на классы. В самом деле, всякое разбиение данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Действительно, если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает «a находится в том же классе, что и b», то отношение φ будет, как легко проверить, рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Обратно, пусть φ — некоторое отношение эквивалентности между элементами множества M и K_a — класс элементов x из M, эквивалентных данному элементу a: $x \underset{\varphi}{\sim} a$. В силу свойства рефлексивности элемент a сам принадлежит классу K_a. Покажем, что два класса K_a и K_b либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть некоторый элемент c принадлежит одновременно и K_a, и K_b, т. е. $c \underset{\varphi}{\sim} a$ и $c \underset{\varphi}{\sim} b$. Тогда в силу симметричности $a \underset{\varphi}{\sim} c$ и в силу транзитивности

$$a \underset{\varphi}{\sim} b. \tag{1}$$

Если теперь x — произвольный элемент из K_a, т. е. $x \underset{\varphi}{\sim} a$, то в силу (1) и свойства транзитивности $x \underset{\varphi}{\sim} b$, т. е. $x \in K_b$.

Точно так же доказывается, что всякий элемент $y \in K_b$ входит в K_a. Таким образом, два класса K_a и K_b, имеющих хотя бы один общий элемент, совпадают между собой. Мы получили разбиение множества M на классы по заданному отношению эквивалентности.

Понятие разбиения множества на классы тесно связано с рассмотренным в предыдущем пункте понятием отображения.

Пусть f — отображение множества A в множество B. Собрав в один класс все элементы из A, образы которых в B совпадают,

[1]) При этом элементы a и b берутся в определенном порядке, т. е. (a, b) и (b, a) — две, вообще говоря, различные пары.

мы получим, очевидно, некоторое разбиение множества A. Обратно, рассмотрим произвольное множество A и некоторое его разбиение на классы. Пусть B — совокупность тех классов, на которые разбито множество A. Ставя в соответствие каждому элементу $a \in A$ тот класс (т. е. элемент из B), к которому a принадлежит, мы получим отображение множества A на множество B.

Примеры. 1. Спроектируем плоскость xy на ось x. Прообразы точек оси x — вертикальные прямые. Следовательно, этому отображению отвечает разбиение плоскости на параллельные прямые.

2. Разобьем все точки трехмерного пространства на классы, объединив в один класс точки, равноудаленные от начала координат. Каждый класс представляет собой сферу некоторого радиуса. Совокупность всех этих классов можно отождествить с множеством всех точек, лежащих на луче $[0, \infty)$. Итак, разбиению трехмерного пространства на концентрические сферы отвечает отображение этого пространства на полупрямую.

3. Объединим в один класс все действительные числа с одинаковой дробной частью. Этому разбиению отвечает отображение прямой линии на окружность единичной длины.

Понятие эквивалентности является частным случаем более общего понятия бинарного отношения. Пусть M — произвольное множество. Обозначим через $M \times M$ или M^2 совокупность всех упорядоченных пар (a, b), где a, $b \in M$. Говорят, что в M задано *бинарное отношение* φ, если в M^2 выделено произвольное подмножество R_φ. Точнее говоря, мы скажем, что элемент a находится в отношении φ к элементу b — обозначение $a\varphi b$ — в том и только том случае, когда пара (a, b) принадлежит R_φ. Примером бинарного отношения может служить отношение тождества ε; именно, $a\varepsilon b$ в том и только том случае, если $a = b$; иначе говоря, это — отношение, задаваемое диагональю Δ в $M \times M$, т. е. подмножеством пар вида (a, a). Ясно, что всякое отношение эквивалентности φ в некотором множестве M есть бинарное отношение, подчиненное следующим условиям.

1) Диагональ Δ принадлежит R_φ (рефлексивность).
2) Если $(a, b) \in R_\varphi$, то и $(b, a) \in R_\varphi$ (симметричность).
3) Если $(a, b) \in R_\varphi$ и $(b, c) \in R_\varphi$, то и $(a, c) \in R_\varphi$ (транзитивность).

Итак, эквивалентность — это бинарное отношение, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и симметричности. В § 4 мы рассмотрим другой важный частный случай бинарного отношения — частичную упорядоченность.

§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества

1. Конечные и бесконечные множества. Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно, если не фактически, то хотя бы примерно, указать число элементов в данном множестве. Таковы, например, множество всех вершин некоторого многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данного числа, множество всех молекул воды на Земле и т. д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости, всех многочленов с рациональными коэффициентами и т. д. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т. д., причем после каждого такого шага в этом множестве еще останутся элементы.

Два конечных множества мы можем сравнивать по числу элементов и судить, одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Спрашивается, можно ли подобным же образом сравнивать бесконечные множества? Иначе говоря, имеет ли смысл, например, вопрос о том, чего больше: кругов на плоскости или рациональных точек на прямой, функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, или прямых в пространстве, и т. д.?

Посмотрим, как мы сравниваем между собой два конечных множества. Можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить и иначе, именно, попытаться установить *биекцию*, т. е. взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, иначе говоря, такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого, и наоборот. Ясно, что взаимно однозначное соответствие между двумя конечными множествами можно установить тогда и только тогда, когда число элементов в них одинаково. Например, чтобы проверить, одинаково ли число студентов в группе и стульев в аудитории, можно, не пересчитывая ни тех, ни других, посадить каждого студента на определенный стул. Если мест хватит всем и не останется ни одного лишнего стула, т. е. если будет установлена биекция между этими двумя множествами, то это и будет означать, что число элементов в них одинаково.

Заметим теперь, что если первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения конечных множеств, второй (установление взаимно однозначного соответствия) пригоден и для бесконечных.

2. Счетные множества. Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел. Назовем *счетным множеством* всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами. Иначе говоря, счетное множество — это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность: $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Приведем примеры счетных множеств.

1. *Множество всех целых чисел.* Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \ldots, \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots, \end{array}$$

вообще, неотрицательному числу $n \geqslant 0$ сопоставим нечетное число $2n+1$, а отрицательному $n < 0$ — четное число $2|n|$:

$$\begin{aligned} n &\leftrightarrow 2n+1 \quad \text{при} \quad n \geqslant 0, \\ n &\leftrightarrow 2|n| \qquad \text{при} \quad n < 0. \end{aligned}$$

2. *Множество всех четных положительных чисел.* Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множество* $2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ *степеней числа* 2. Здесь соответствие также очевидно. Каждому числу 2^n сопоставляется число n.

4. Рассмотрим более сложный пример, а именно, покажем, что *множество всех рациональных чисел* счетно. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$, $q > 0$. Назовем сумму $|p| + q$ *высотой* рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет только число $0/1$, высоту 2 — числа $1/1$ и $-1/1$, высоту 3 — числа $2/1$, $1/2$, $-2/1$ и $-1/2$ и т. д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сперва выпишем числа высоты 1, потом — числа высоты 2 и т. д. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Установим некоторые общие свойства счетных множеств.

1. *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Доказательство. Пусть A — счетное множество, а B — его подмножество. Занумеруем элементы множества A: $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ — те из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его члены $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ занумерованы числами $1, 2, \ldots$

2. *Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.*

Доказательство. Пусть A_1, $A_2, \ldots$ — счетные множества. Мы можем считать, что они попарно не пересекаются, так как иначе мы рассмотрели бы вместо них множества A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$ — каждое из которых не более чем счетно, — имеющие ту же самую сумму, что и множества A_1, $A_2, \ldots$ Все элементы множеств A_1, $A_2, \ldots$ можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,}
\end{array}$$

где в первой строке стоят элементы множества A_1, во второй — элементы множества A_2 и т. д. Занумеруем теперь все эти элементы «по диагоналям», т. е. за первый элемент примем a_{11}, за второй a_{12}, за третий a_{21} и т. д., двигаясь в порядке, указанном стрелками на следующей таблице:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \to & a_{12} & & a_{13} & \to & a_{14} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
\multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Ясно, что при этом каждый элемент каждого из множеств получит определенный номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми элементами всех множеств A_1, A_2, ..., и всеми натуральными числами. Наше утверждение доказано.

Упражнения. 1. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

2. Число ξ называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно.

3. Доказать, что множество всех рациональных интервалов (т. е. интервалов с рациональными концами) на прямой счетно.

4. Доказать, что множество всех точек плоскости, имеющих рациональные координаты, счетно.

Указание. Воспользоваться свойством 2.

3. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть M — бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент a_3, отличный от a_1 и от a_2 и т. д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за «нехватки» элементов, ибо M бесконечно), мы получаем счетное подмножество

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$$

множества M. Предложение доказано.

Это предложение показывает, что среди бесконечных множеств счетные являются «самыми маленькими». Ниже мы выясним, существуют ли несчетные бесконечные множества.

3. Эквивалентность множеств. Сравнивая те или иные бесконечные множества с натуральным рядом, мы пришли к понятию счетного множества. Ясно, что множества можно сравнивать не только с множеством натуральных чисел; установление взаимно однозначного соответствия (биекции) позволяет сравнивать между собой любые два множества. Введем следующее определение.

Определение. Два множества, M и N, называются эквивалентными (обозначение $M \sim N$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам как конечным, так и бесконечным. Два конечных множества эквивалентны между собой тогда (и только тогда), когда число элементов у них одинаково. Определение счетного множества можно теперь сформулировать следующим образом: *множество называется* *счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.* Ясно, что два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой; в частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

Примеры. 1. Множества точек на любых двух отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны между собой. Из рис. 5 ясно, как установить между ними биекцию. Именно, точки p и q соответствуют друг другу, если они являются проекциями одной и той же точки r вспомогательного отрезка ef.

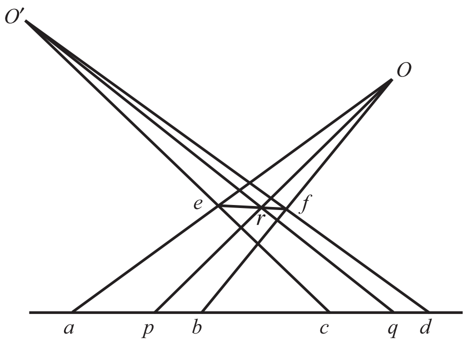


Рис. 5

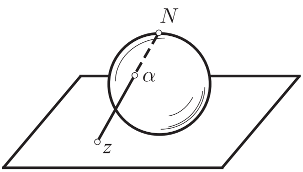


Рис. 6

2. Множество всех точек на расширенной комплексной плоскости эквивалентно множеству всех точек на сфере. Биекцию $\alpha \leftrightarrow z$ можно установить, например, с помощью стереографической проекции (рис. 6).

3. Множество всех чисел в интервале $(0, 1)$ эквивалентно множеству всех точек на прямой. Соответствие можно установить, например, с помощью функции

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Рассматривая примеры, приведенные здесь и в п. 2, можно заметить, что иногда бесконечное множество оказывается эквивалентным своей истинной части. Например, натуральных чисел оказывается «столько же», сколько и всех целых или даже всех рациональных; на интервале $(0, 1)$ «столько же» точек, сколько и на всей прямой, и т. д. Это явление характерно для бесконечных множеств. Действительно, в п. 2 (свойство 3) мы показали, что из всякого бесконечного множества M можно выбрать счетное подмножество; пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ такое подмножество.

Разобьем его на два счетных подмножества

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5, \ldots\} \quad \text{и} \quad A_2 = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\}$$

и установим между A и A_1 взаимно однозначное соответствие. Это соответствие можно затем продолжить до взаимно однозначного соответствия между множествами $A \cup (M \setminus A) = M$ и $A_1 \cup (M \setminus A) = M \setminus A_2$, отнеся каждому элементу из $M \setminus A$ сам этот элемент. Между тем множество $M \setminus A_2$ не совпадает с M, т. е. является собственным подмножеством для M. Мы получаем, таким образом, следующее предложение:

Всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Это свойство можно принять за определение бесконечного множества.

Упражнение. Доказать, что если M — произвольное бесконечное множество и A счетно, то $M \sim M \cup A$.

4. Несчетность множества действительных чисел. В п. 2 мы привели примеры счетных множеств. Число этих примеров можно было бы увеличить. Кроме того, как мы показали, сумма конечного или счетного числа счетных множеств снова есть счетное множество.

Естественно возникает вопрос: а существуют ли вообще несчетные множества? Положительный ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Доказательство. Предположим, что дано какое-то счетное множество (всех или только некоторых) действительных чисел α, лежащих на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \quad a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \ldots, \\ \alpha_2 = 0, \quad a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \ldots, \\ \alpha_3 = 0, \quad a_{31} a_{32} a_{33} \ldots a_{3n} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = 0, \quad a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{1}$$

Здесь a_{ik} — k-я десятичная цифра числа α_i. Построим дробь

$$\beta = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

диагональной процедурой Кантора, а именно: за b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{11}, за b_2 — произвольную цифру, не совпадающую с a_{22}, и т. д.; вообще, за b_n примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{nn}. Эта десятичная дробь не может совпасть ни с одной дробью, содержащейся в перечне (1). Действительно, от α_1 дробь β отличается по крайней мере первой цифрой, от α_2 — второй цифрой и т. д.; вообще, так как $b_n \neq a_{nn}$ для всех n, то дробь β отлична от любой из дробей α_i, входящих в перечень (1). Таким образом, никакое счетное множество действительных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, не исчерпывает этого отрезка.

Приведенное доказательство содержит небольшой «обман». Дело в том, что некоторые числа (а именно, числа вида $p/10^q$) могут быть записаны в виде десятичной дроби двумя способами: с бесконечным числом нулей или с бесконечным числом девяток; например,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5000\cdots = 0{,}4999\ldots$$

Таким образом, несовпадение двух десятичных дробей еще не гарантирует различия изображаемых ими чисел.

Однако если дробь β строить осторожнее, так, чтобы она не содержала ни нулей, ни девяток, полагая, например, $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$ и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$, то доказательство становится вполне корректным.

Упражнение. Показать, что числа, обладающие двумя различными десятичными разложениями, образуют счетное множество.

Итак, отрезок $[0, 1]$ дает пример несчетного множества. Приведем некоторые примеры множеств, эквивалентных отрезку $[0, 1]$.

1. Множество всех точек любого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b).
2. Множество всех точек на прямой.
3. Множество всех точек плоскости, пространства, поверхности сферы, точек, лежащих внутри сферы, и т. д.
4. Множество всех прямых на плоскости.
5. Множество всех непрерывных функций одного или нескольких переменных.

В случаях 1 и 2 доказательство не представляет труда (см. примеры 1 и 3 п. 3). В остальных случаях непосредственное доказательство довольно сложно.

Упражнение. Используя результаты этого пункта и упражнение 2 п. 2, доказать существование *трансцендентных* чисел, т. е. чисел, не являющихся алгебраическими.

5. Теорема Кантора–Бернштейна. Следующая теорема является одной из основных в теории множеств.

Теорема 2 (Кантор–Бернштейн). *Пусть A и B — два произвольных множества. Если существуют взаимно однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно однозначное отображение g множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что A и B не пересекаются. Пусть x — произвольный элемент из A. Положим $x = x_0$ и определим последовательность элементов $\{x_n\}$ следующим образом. Пусть элемент x_n уже определен. Тогда, если n четно, то за x_{n+1} примем элемент из B, удовлетворяющий условию $g(x_{n+1}) = x_n$ (если такой элемент существует), а если n нечетно, то x_{n+1} — элемент из A, удовлетворяющий условию $f(x_{n+1}) = x_n$ (если он существует).

Возможны два случая.

1°. При некотором n элемента x_{n+1}, удовлетворяющего указанным условиям, не существует. Число n называется *порядком элемента x*.

2°. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечна[1]). Тогда x называется *элементом бесконечного порядка*.

Разобьем теперь A на три множества: A_E, состоящее из элементов четного порядка, A_O — множество элементов нечетного порядка и A_I — множество всех элементов бесконечного порядка. Разбив аналогичным образом множество B, заметим, что f отображает A_E на B_O и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_O на B_E. Итак, взаимно однозначное отображение ψ, совпадающее с f на $A_E \cup A_I$ и с g^{-1} на A_O, есть взаимно однозначное отображение всего A на всё B.

6. Понятие мощности множества. Если эквивалентны два конечных множества, то они состоят из одного и того же числа элементов. Если же эквивалентные между собой множества M и N произвольны, то говорят, что M и N имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, мощность — это то общее, что есть у любых двух эквивалентных между собой множеств. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества. Мощность множества натуральных чисел (т. е. любого счетного множества) обозначается символом $\aleph_0$ (читается: «алеф нуль»). Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$, говорят, что они имеют *мощность*

[1]) При этом число *различных* элементов x_n может быть и конечно: они могут «зацикливаться», образуя *бесконечную последовательность*, содержащую лишь *конечное* число попарно различных элементов.

континуума. Эта мощность обозначается символом c (или символом $\aleph$).

Весьма глубокий вопрос о существовании мощностей, промежуточных между $\aleph_0$ и c, будет затронут ниже в § 4. Как правило, бесконечные множества, встречающиеся в анализе, или счетны, или имеют мощность континуума.

Для мощностей конечных множеств, т. е. для натуральных чисел, кроме понятия равенства имеются также понятия «больше» и «меньше». Попытаемся распространить эти последние на бесконечные мощности.

Пусть A и B — два произвольных множества, а $m(A)$ и $m(B)$ — их мощности. Тогда логически возможны следующие случаи:

1. A эквивалентно некоторой части множества B, а B эквивалентно некоторой части множества A.

2. A содержит некоторую часть, эквивалентную B, но в B нет части, эквивалентной A.

3. B содержит некоторую часть, эквивалентную A, но в A нет части, эквивалентной B.

4. Ни в одном из этих двух множеств нет части, эквивалентной другому.

В первом случае множества A и B в силу теоремы Кантора–Бернштейна эквивалентны между собой, т. е. $m(A) = m(B)$. Во втором случае естественно считать, что $m(A) > m(B)$, а в третьем, — что $m(A) < m(B)$. Наконец, в четвертом случае нам пришлось бы считать, что мощности множеств A и B несравнимы между собой. Но на самом деле этот случай невозможен! Это следует из теоремы Цермело, о которой речь будет идти в § 4.

Итак, *любые два множества A и B либо эквивалентны между собой (и тогда $m(A) = m(B)$), либо удовлетворяют одному из двух соотношений: $m(A) < m(B)$ или $m(A) > m(B)$.*

Мы отметили выше, что счетные множества — это «самые маленькие» из бесконечных множеств, а затем показали, что существуют и бесконечные множества, бесконечность которых имеет более «высокий порядок», — это множества мощности континуума. А существуют ли бесконечные мощности, превосходящие мощность континуума? Вообще, существует ли какая-то «наивысшая» мощность или нет? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть M — некоторое множество и пусть $\mathfrak{M}$ — множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M. Тогда $\mathfrak{M}$ имеет мощность бо́льшую, чем мощность исходного множества M.*

Доказательство. Легко видеть, что мощность $\mathfrak{m}$ множества $\mathfrak{M}$ не может быть меньше мощности m исходного множества M, действительно, «одноэлементные» подмножества из M образуют в $\mathfrak{M}$ часть, эквивалентную множеству M. Остается доказать, что мощности $\mathfrak{m}$ и m не совпадают. Пусть между элементами a, $b, \ldots$ множества M и какими-то элементами A, $B, \ldots$ множества $\mathfrak{M}$ (т.е. какими-то подмножествами из M) установлено взаимно однозначное соответствие

$$a \leftrightarrow A, \quad b \leftrightarrow B, \quad \ldots$$

Покажем, что оно наверняка не исчерпывает всего $\mathfrak{M}$. Именно, сконструируем такое множество $X \subset M$, которому не соответствует никакой элемент из M. Пусть X — совокупность элементов из M, не входящих в те подмножества, которые им соответствуют. Подробнее: если $a \leftrightarrow A$ и $a \in A$, то элемент a мы не включаем в X, а если $a \leftrightarrow A$ и $a \notin A$, то мы включаем элемент a в X. Ясно, что X есть подмножество множества M, т.е. некоторый элемент из $\mathfrak{M}$. Покажем, что подмножеству X не может соответствовать никакой элемент из M. Допустим, что такой элемент $x \leftrightarrow X$ существует; посмотрим, будет ли он содержаться в X или нет? Пусть $x \notin X$; но ведь по определению в X входит всякий элемент, не содержащийся в подмножестве, которое ему соответствует, следовательно, элемент x должен быть включен в X. Обратно, предположив, что x содержится в X, мы получим, что x не может содержаться в X, так как в X включены только те элементы, которые не входят в соответствующие им подмножества. Итак, элемент x, отвечающий подмножеству X, должен одновременно и содержаться, и не содержаться в X. Отсюда следует, что такого элемента вообще не существует, т.е. что взаимно однозначного соответствия между элементами множества M и всеми его подмножествами установить нельзя. Теорема доказана.

Итак, для любой мощности мы действительно можем построить множество большей мощности, затем еще большей и т.д., получая, таким образом, не ограниченную сверху шкалу мощностей.

Замечание. Мощность множества $\mathfrak{M}$ обозначают символом 2^m, где m — мощность M. (Читатель легко поймет смысл этого обозначения, рассмотрев случай конечного M.) Таким образом, предыдущую теорему можно выразить неравенством $m < 2^m$. В частности, при $m = \aleph_0$ получаем неравенство $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Покажем, что $2^{\aleph_0} = \aleph$, т.е. покажем, что *мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощности континуума.*

Разобьем подмножества натурального ряда на два класса, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{S}$, — на те (класс $\mathfrak{P}$), у которых дополнение бесконечно, и на те (класс $\mathfrak{S}$), у которых оно конечно. К классу $\mathfrak{S}$ относится, в частности, сам натуральный ряд, ибо его дополнение пусто. Число подмножеств в классе $\mathfrak{S}$ счетно (доказать). Класс $\mathfrak{S}$ не влияет на мощность множества $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{S}$.

Между подмножествами класса $\mathfrak{P}$ и действительными числами α из полусегмента $[0, 1)$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Именно, сопоставим подмножеству $A \in \mathfrak{P}$ число α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ с двоичным разложением

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \dots,$$

где $\varepsilon_n = 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит ли n множеству A или нет. Проверку деталей предоставляем читателю.

Упражнение. Доказать, что совокупность всех числовых функций (или вообще функций, принимающих значения в множестве, содержащем не менее двух элементов), определенных на некотором множестве M, имеет мощность бо́льшую, чем мощность множества M.

Указание. Воспользоваться тем, что множество всех индикаторов, т. е. функций на M, принимающих только два значения, 0 и 1, эквивалентно множеству всех подмножеств из M.

§ 4. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа

В этом параграфе изложен ряд понятий, связанных с идеей упорядоченности множеств. Мы ограничимся здесь самыми первоначальными сведениями; более подробное изложение можно найти в литературе, указанной в конце книги.

1. Частично упорядоченные множества. Пусть M — произвольное множество и φ — некоторое бинарное отношение в нем (определяемое некоторым множеством $R_\varphi \subset M \times M$). Мы назовем это отношение *частичной упорядоченностью*, если оно удовлетворяет условиям:

1) *рефлексивности*: $a\varphi a$,
2) *транзитивности*: если $a\varphi b$ и $b\varphi c$, то $a\varphi c$,
3) *антисимметричности*: если $a\varphi b$ и $b\varphi a$, то $a = b$.

Частичную упорядоченность принято обозначать символом $\leqslant$. Таким образом, запись $a \leqslant b$ означает, что пара (a, b) принадлежит соответствующему множеству R_φ. Про элемент a при этом говорят, что он *не превосходит* b или что он *подчинен* b. Множество, в котором задана некоторая частичная упорядоченность, называется *частично упорядоченным.*

Приведем примеры частично упорядоченных множеств.

1. Всякое множество можно тривиальным образом рассматривать как частично упорядоченное, если положить $a \leqslant b$ в том и только том случае, когда $a = b$. Иначе говоря, за частичную упорядоченность всегда можно принять бинарное отношение тождества ε. Этот пример не представляет, конечно, большого интереса.

2. Пусть M — множество всех непрерывных функций на отрезке $[\alpha, \beta]$. Положив $f \leqslant g$ в том и только том случае, когда $f(t) \leqslant g(t)$ для всех t ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$), мы получим, очевидно, частичную упорядоченность.

3. Множество всех подмножеств некоторого фиксированного множества частично упорядочено по включению: $M_1 \leqslant M_2$ означает, что $M_1 \subset M_2$.

4. Множество всех натуральных чисел частично упорядочено, если $a \leqslant b$ означает «b делится без остатка на a».

Пусть M — произвольное частично упорядоченное множество. В случае, когда $a \leqslant b$ и $a \neq b$, мы будем пользоваться символом $<$, т.е. писать $a < b$ и говорить, что *a меньше b* или что *a строго подчинено b*. Наряду с записью $a \leqslant b$ мы будем пользоваться равносильной записью $b \geqslant a$ и говорить при этом, что *b не меньше a* (*больше a*, если $b \neq a$) или что *b следует* за a. Элемент a называется *максимальным*, если из $a \leqslant b$ следует, что $b = a$. Элемент a называется *минимальным*, если из $c \leqslant a$ следует, что $c = a$.

Частично упорядоченное множество, для любых двух точек a, b которого найдется следующая за ними точка c ($a \leqslant c$, $b \leqslant c$), называется *направленным*.

2. Отображения, сохраняющие порядок. Пусть M и M' — два частично упорядоченных множества и пусть f есть отображение M в M'. Мы скажем, что это отображение *сохраняет порядок*, если из $a \leqslant b$, где $a, b \in M$, следует, $f(a) \leqslant f(b)$ (в M'). Отображение f называется *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств M и M', если оно биективно, а соотношение $f(a) \leqslant f(b)$ выполнено в том и *только том* случае, когда $a \leqslant b$. Сами множества M и M' называются при этом *изоморфными* между собой.

Пусть, например, M есть множество натуральных чисел, частично упорядоченное по «делимости» (см. пример 4 п. 1), а M' — то же самое множество, но упорядоченное естественным образом, т.е. так, что $b \geqslant a$, если $b - a$ — положительное число. Тогда отображение M на M', ставящее в соответствие каждому числу n его само, сохраняет порядок (но не является изоморфизмом).

Отношение изоморфизма между частично упорядоченными множествами представляет собой, очевидно, отношение эквивалентности (оно симметрично, транзитивно и рефлексивно). Следовательно, если у нас имеется какой-то запас[1]) частично упорядоченных множеств, то все эти множества можно разбить на классы изоморфных между собой. Ясно, что если нас интересует не природа элементов множества, а только имеющаяся в нем частичная упорядоченность, то два изоморфных между собой частично упорядоченных множества можно рассматривать просто как тождественные.

3. Порядковые типы. Упорядоченные множества. Про изоморфные между собой частично упорядоченные множества мы будем говорить, что они имеют один и тот же *порядковый тип*. Таким образом, порядковый тип — это то общее, что присуще любым двум изоморфным между собой частично упорядоченным множествам, подобно тому как мощность — это то общее, что присуще эквивалентным между собой множествам (рассматриваемым независимо от какого бы то ни было отношения порядка в них).

Пусть a и b — элементы частично упорядоченного множества. Может оказаться, что ни одно из соотношений $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ не имеет места. В этом случае элементы a и b называются *несравнимыми*. Таким образом, отношение порядка определено лишь для некоторых пар элементов, поэтому мы и говорим о частичной упорядоченности. Если же в частично упорядоченном множестве M несравнимых элементов нет, то множество M называется *упорядоченным* (*линейно упорядоченным, совершенно упорядоченным*). Итак, множество M упорядочено, если оно частично упорядочено и если для любых двух различных элементов $a, b \in M$ обязательно либо $a < b$, либо $b < a$.

Ясно, что всякое подмножество упорядоченного множества само упорядочено.

Множества, указанные в примерах 1–4 п. 1, являются лишь частично упорядоченными. Простейшими примерами линейно упорядоченных множеств могут служить натуральные числа, совокупность всех рациональных чисел, всех действительных чисел на отрезке $[0, 1]$ и т. п. (с естественными отношениями «больше» и «меньше», которые в этих множествах имеются).

[1]) Мы воздерживаемся от понятий вроде «все частично упорядоченные множества», так как они, подобно понятию «множество всех множеств», по существу, внутренне противоречивы и не могут быть включены в четкие математические концепции.

Поскольку упорядоченность есть частный случай частичной упорядоченности, к упорядоченным множествам применимо понятие отображения, сохраняющего порядок, и, в частности, понятие изоморфизма. Поэтому можно говорить о порядковом типе упорядоченного множества. Ряд натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots$ с естественным отношением порядка между его элементами представляет собой простейший пример бесконечного упорядоченного множества. Его порядковый тип принято обозначать символом ω.

Если два частично упорядоченных множества изоморфны между собой, то они, конечно, имеют одинаковую мощность (изоморфизм — это биекция), поэтому можно говорить о мощности, отвечающей данному порядковому типу (например, типу ω отвечает мощность $\aleph_0$). Однако обратное неверно; множество данной мощности может быть упорядочено, вообще говоря, многими разными способами. Лишь порядковый тип линейно упорядоченного *конечного* множества однозначно определяется числом n его элементов (и обозначается также через n). Уже для счетного множества натуральных чисел возможен, например, наряду с его «естественным» типом ω, такой тип:

$$1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots,$$

т. е. такой, когда любое четное число следует за любым нечетным, а нечетные и четные числа между собой упорядочены по возрастанию. Можно показать, что число различных порядковых типов, отвечающих мощности $\aleph_0$, бесконечно и даже несчетно.

4. Упорядоченная сумма упорядоченных множеств. Пусть M_1 и M_2 — два непересекающихся упорядоченных множества с порядковыми типами θ_1 и θ_2. В объединении $M_1 \cup M_2$ множеств M_1 и M_2 можно ввести порядок, считая, что два элемента из M_1 упорядочены как в M_1, два элемента из M_2 упорядочены как в M_2 и что *всякий* элемент из M_1 *предшествует* всякому элементу из M_2. (Проверьте, что это действительно линейная упорядоченность!) Такое упорядоченное множество мы будем называть *упорядоченной суммой* множеств M_1 и M_2 и обозначать $M_1 + M_2$. Подчеркнем, что здесь важен порядок слагаемых: сумма $M_2 + M_1$ не изоморфна, вообще говоря, сумме $M_1 + M_2$. Порядковый тип суммы $M_1 + M_2$ мы будем называть *упорядоченной суммой* порядковых типов θ_1 и θ_2 и обозначать $\theta_1 + \theta_2$.

Это определение легко распространяется на произвольное конечное число слагаемых $\theta_1, \ldots, \theta_m$.

Пример. Рассмотрим порядковые типы ω и n. Легко видеть, что $n + \omega = \omega$; действительно, если мы к натуральному ряду

$1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ припишем слева конечное число членов, то мы получим тот же порядковый тип ω. В то же время порядковый тип $\omega + n$, т. е. порядковый тип множества $1, 2, 3, \ldots,\ k, \ldots,\ a_1, \ldots, a_n$, не равен, очевидно, ω.

5. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитные числа. Выше мы ввели понятия частичной упорядоченности и упорядоченности. Введем еще более узкое, но весьма важное понятие полной упорядоченности.

Определение. Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество содержит наименьший (т. е. предшествующий всем элементам этого подмножества) элемент.

Если упорядоченное множество конечно, то оно, очевидно, и вполне упорядочено. Примером упорядоченного, но не вполне упорядоченного множества может служить отрезок $[0, 1]$. Само это множество содержит наименьший элемент — число 0, но его подмножество, состоящее из положительных чисел, наименьшего элемента не содержит.

Ясно, что *всякое* (*непустое*) *подмножество вполне упорядоченного множества само вполне упорядочено.*

Порядковый тип вполне упорядоченного множества называют *порядковым числом* (*трансфинитным порядковым числом* или, короче *трансфинитом*, когда хотят подчеркнуть, что речь идет о бесконечном множестве).

Натуральный ряд (с естественным отношением порядка) представляет собой множество не только упорядоченное, но и вполне упорядоченное. Таким образом, его порядковый тип ω есть порядковое число (трансфинит!). Порядковым числом будет и $\omega + k$, т. е. тип множества

$$1, \ldots, n, \ldots, a_1, \ldots, a_k.$$

Напротив, множество

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1 \tag{1}$$

упорядочено, но не вполне упорядочено. Здесь в каждом непустом подмножестве есть наибольший элемент (т. е. следующий за всеми), но, вообще говоря, нет наименьшего (например, наименьшего элемента нет во всем множестве (1)). Порядковый тип (не являющийся порядковым числом!) множества (1) принято обозначать символом ω^*.

Докажем следующий простой, но важный факт.

Лемма 1. *Упорядоченная сумма конечного числа вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

В самом деле, пусть M — произвольное подмножество упорядоченной суммы $M_1 + \dots + M_n$ вполне упорядоченных множеств; рассмотрим первое из множеств M_k, содержащее элементы из M. Пересечение $M \cap M_k$ является подмножеством вполне упорядоченного множества M_k и, значит, имеет первый элемент. Этот элемент будет первым элементом и всего M.

Следствие. *Упорядоченная сумма порядковых чисел является порядковым числом.*

Мы можем, таким образом, отправляясь от некоторого запаса порядковых чисел, строить новые порядковые числа. Например, отправляясь от натуральных чисел (т. е. конечных порядковых чисел) и порядкового числа ω, можно получить порядковые числа

$$\omega + n, \quad \omega + \omega, \quad \omega + \omega + n, \quad \omega + \omega + \omega \text{ и т. д.}$$

Читатель легко построит вполне упорядоченные множества, отвечающие этим трансфинитам.

Наряду с упорядоченной суммой порядковых типов можно ввести *упорядоченное произведение*. Пусть M_1 и M_2 — множества, упорядоченные по типам θ_1 и θ_2. Возьмем много экземпляров множества M_1 — по одному на каждый элемент M_2 — и заменим в множестве M_2 его элементы этими экземплярами M_1. Полученное множество называется упорядоченным произведением M_1 и M_2 и обозначается символом $M_1 \cdot M_2$. Формально $M_1 \cdot M_2$ строится как множество пар (a, b), где $a \in M_1$ и $b \in M_2$, причем $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$, если $b_1 < b_2$ (при любых a_1, a_2), и $(a_1, b) < (a_2, b)$, если $a_1 < a_2$.

Аналогично определяется упорядоченное произведение любого конечного числа сомножителей $M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_p$. Порядковый тип θ произведения $M_1 \cdot M_2$ упорядоченных множеств называется *произведением порядковых типов* θ_1 и θ_2:

$$\theta = \theta_1 \theta_2.$$

Как и упорядоченная сумма, упорядоченное произведение некоммутативно.

Лемма 2. *Упорядоченное произведение двух вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

Доказательство. Пусть M — некоторое подмножество произведения $M_1 \cdot M_2$; множество M есть множество пар (a, b). Рассмотрим все вторые элементы b пар, входящих в M. Они образуют некоторое подмножество в M_2. В силу полной упорядоченности M_2 это подмножество имеет первый элемент. Обозначим его b_0 и рассмотрим все пары вида (a, b_0), входящие в M. Их первые элементы a образуют некоторое подмножество в M_1. В силу полной упорядоченности M_1 среди них имеется первый элемент. Обозначим его a_0. Тогда пара (a_0, b_0), как легко видеть, и будет первым элементом M.

Следствие. *Упорядоченное произведение порядковых чисел является порядковым числом.*

Примеры. Легко видеть, что $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, $\omega + \omega + \omega = \omega \cdot 3$. Легко также построить множества, упорядоченные по типам $\omega \cdot n$, ω^2, $\omega^2 \cdot n$, ω^3, $\ldots$, $\omega^p, \ldots$ Все эти множества будут иметь счетную мощность.

Можно определить и другие действия над порядковыми типами, например, возведение в степень, и ввести в рассмотрение такие порядковые числа, как, скажем, ω^ω, ω^{ω^ω} и т. д.

6. Сравнение порядковых чисел. Если n_1 и n_2 — два конечных порядковых числа, то они или совпадают, или одно из них больше другого. Распространим это отношение порядка на трансфинитные порядковые числа. Введем для этого следующие понятия. Всякий элемент a линейно упорядоченного множества M определяет *начальный отрезок* P (совокупность элементов $< a$) и *остаток* Q (совокупность элементов $\geqslant a$).

Пусть α и β — два порядковых числа, а M и N — множества, типа α и β соответственно. Мы скажем, что $\alpha = \beta$, если множества M и N изоморфны, что $\alpha < \beta$, если M изоморфно какому-либо начальному отрезку множества N, и что $\alpha > \beta$, если, обратно, N изоморфно начальному отрезку множества M.

Теорема 1. *Любые два порядковых числа α и β связаны между собой одним и только одним из соотношений*:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta \quad \text{или} \quad \alpha > \beta.$$

Для доказательства установим прежде всего следующую лемму.

Лемма 3. *Если f — изоморфное отображение вполне упорядоченного множества A на какое-либо его подмножество B, то $f(a) \geqslant a$ для всех $a \in A$.*

Действительно, если бы имелись такие элементы $a \in A$, что $f(a) < a$, то среди них был бы первый (полная упорядоченность!). Пусть это — элемент a_0 и пусть $b_0 = f(a_0)$. Тогда $b_0 < a_0$ и, поскольку f — изоморфизм, $f(b_0) < f(a_0) = b_0$, т. е. a_0 не был бы первым среди элементов с указанным свойством.

Из этой леммы сразу же вытекает, что вполне упорядоченное множество не может быть изоморфно своему отрезку. Если бы A было изоморфно отрезку, определяемому элементом a, то выполнялось бы соотношение $f(a) < a$. Поэтому соотношения $\alpha = \beta$ и $\alpha < \beta$

не могут иметь места одновременно. Аналогично не может быть одновременно $\alpha = \beta$ и $\alpha > \beta$. Точно так же несовместны соотношения $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$, так как иначе мы получили бы (транзитивность!), что $\alpha < \alpha$, а это, как мы видели, невозможно. Итак, мы показали, что наличие одного из соотношений $\alpha \gtreqless \beta$ исключает два остальных. Покажем теперь, что одно из этих соотношений *всегда имеет место*, т. е. что любые два порядковых числа сравнимы.

Сначала для каждого порядкового числа α построим множество $W(\alpha)$, служащее его «стандартным представителем». Именно, примем за $W(\alpha)$ множество всех порядковых чисел, меньших α. Числа, входящие в $W(\alpha)$, все сравнимы между собой, а само множество $W(\alpha)$ (упорядоченное по величине порядковых чисел) имеет тип α. Действительно, если множество

$$A = \{\ldots, a, \ldots, b, \ldots\}$$

имеет тип α, то, по самому определению, порядковые числа, меньшие, чем α, взаимно однозначно отвечают начальным отрезкам множества A, а следовательно, и элементам этого множества. Иначе говоря, элементы множества, имеющего тип α, можно перенумеровать с помощью порядковых чисел, меньших α:

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots).$$

Пусть теперь α и β — два порядковых числа; тогда $A = W(\alpha)$ и $B = W(\beta)$ — множества типов α и β соответственно. Пусть, далее, $C = A \cap B$ — пересечение множеств A и B, т. е. совокупность порядковых чисел, меньших α и β одновременно. Множество C вполне упорядочено; обозначим его тип γ. Покажем, что $\gamma \leqslant \alpha$. Действительно, если $C = A$, то $\gamma = \alpha$, если же $C \neq A$, то C есть отрезок множества A и тогда

$$\gamma < \alpha.$$

В самом деле, при всех $\xi \in C$, $\eta \in A \setminus C$ числа ξ и η сравнимы, т. е. $\xi \lesseqgtr \eta$. Но соотношение $\eta < \xi < \alpha$ невозможно, так как тогда $\eta \in C$. Итак, $\xi < \eta$, откуда и видно, что C есть отрезок множества A и $\gamma < \alpha$. Кроме того, γ есть первый элемент множества $A \setminus C$. Итак,

$$\gamma \leqslant \alpha \quad \text{и аналогично} \quad \gamma \leqslant \beta.$$

При этом случай $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$ невозможен, так как тогда мы имели бы $\gamma \in A \setminus C$, $\gamma \in B \setminus C$, т. е. с одной стороны, $\gamma \notin C$, с другой стороны, $\gamma \in A \cap B = C$. Следовательно, возможны лишь случаи

$$\begin{array}{lll} \gamma = \alpha, & \gamma = \beta, & \alpha = \beta, \\ \gamma = \alpha, & \gamma < \beta, & \alpha < \beta, \\ \gamma < \alpha, & \gamma = \beta, & \alpha > \beta, \end{array}$$

т. е. α и β сравнимы. Теорема полностью доказана.

Каждому порядковому числу отвечает определенная мощность, а из сравнимости порядковых чисел следует, очевидно, и сравнимость соответствующих мощностей. Поэтому:

Если A и B — два вполне упорядоченных множества, то либо они эквивалентны между собой (*равномощны*)*, либо же мощность одного из них больше, чем мощность другого* (т. е. вполне упорядоченные множества не могут иметь несравнимых мощностей).

Рассмотрим совокупность всех порядковых чисел, отвечающих конечной или счетной мощности. Они образуют вполне упорядоченное множество. Нетрудно убедиться в том, что само это множество уже несчетно. Действительно, обозначим в соответствии с общепринятой символикой через ω_1 порядковый тип множества всех счетных трансфинитов. Если бы отвечающая ему мощность была счетной, то счетным было бы и множество, имеющее порядковый тип ω_1+1. Вместе с тем число ω_1 следует, очевидно, за всеми трансфинитами, отвечающими конечной или счетной мощности.

Обозначим мощность, отвечающую порядковому трансфиниту ω_1, символом $\aleph_1$. Легко видеть, что никаких мощностей m, удовлетворяющих неравенству

$$\aleph_0 < m < \aleph_1,$$

нет. Действительно, если бы такая мощность m существовала, то в множестве $W(\omega_1)$ всех порядковых трансфинитов, предшествующих ω_1, имелось бы подмножество мощности m. Это подмножество вполне упорядочено и несчетно. Но тогда его порядковый тип α предшествовал бы ω_1 и в то же время следовал за всеми счетными трансфинитами. Мы получили бы противоречие с определением ω_1.

7. Аксиома выбора, теорема Цермело и другие эквивалентные им утверждения. Сравнимость вполне упорядоченных множеств по мощности подсказывает следующую постановку вопроса: нельзя ли всякое множество вполне упорядочить каким-либо образом? Положительный ответ означал бы, в частности, что несравнимых мощностей вообще не существует. Такой ответ дал Цермело, доказав, что *каждое множество может быть вполне упорядочено.* Доказательство этой теоремы (мы не будем воспроизводить его здесь, см., например, [2]) существенно опирается на так называемую *аксиому выбора*, состоящую в следующем.

Пусть A — некоторое множество индексов α и пусть для каждого α задано некоторое произвольное множество M_α. Тогда, как утверждает аксиома выбора, *можно построить функцию φ на A, относящую каждому $\alpha \in A$ некоторый элемент m_α из соответствующего множества M_α.* Иными словами, можно составить некоторое множество, выбрав из каждого M_α по одному и только одному элементу.

Теория множеств в той форме, в которой мы ее излагаем, восходит к Кантору и Цермело и является «наивной» теорией множеств. Аксиома выбора, называемая также аксиомой Цермело, возникшая в рамках наивной теории множеств вместе с другими вопросами, такими, как континуум-гипотеза, т. е. вопрос о совпадении мощности континуума с первой несчетной мощностью $\aleph_1$, привела к многочисленным спорам и к длинной серии работ по математической логике и основаниям математики. Были построены аксиоматические теории множеств Гёделя–Бернайса и Цермело–Френкеля. В рамках этих теорий была установлена непротиворечивость и независимость аксиомы выбора. Мы отсылаем читателя к специальным работам: *А. Френкель* и *И. Бар-Хиллел.* Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966; *П. Дж. Коэн.* Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969. Заметим, что отказ от аксиомы выбора существенно обедняет теоретико-множественные построения.

Вместе с тем критика наивной теории множеств и попытки обойтись без аксиомы выбора повели к созданию таких замечательных теорий, как теория рекурсивных функций, и таких понятий, как понятие вычислимого числа.

Сформулируем некоторые предложения, каждое из которых эквивалентно аксиоме выбора (т. е. каждое из них может быть доказано, если принять аксиому выбора, и обратно, аксиому выбора можно доказать, допустив справедливость какого-либо из этих предложений). Прежде всего ясно, что таким предложением является сама теорема Цермело. Действительно, если предположить, что каждое из множеств M_α вполне упорядочено, то для построения функции φ, существование которой утверждается аксиомой выбора, достаточно в каждом M_α взять первый элемент.

Для формулировки других предложений, эквивалентных аксиоме выбора, введем следующие понятия. Пусть M — частично упорядоченное множество. Всякое его подмножество A, в котором любые два элемента сравнимы между собой (в смысле введенной в M частичной упорядоченности), будем называть *цепью.* Цепь называется *максимальной*, если она не содержится в качестве собственного подмножества ни в какой другой цепи, принадлежащей M. Далее, назовем в частично упорядоченном множестве M элемент a *верхней гранью* подмножества $M' \subset M$, если любой элемент $a' \in M'$ подчинен a.

Теорема Хаусдорфа. *В частично упорядоченном множестве всякая цепь содержится в некоторой его максимальной цепи.*

Следующее предложение представляет собой, пожалуй, наиболее удобную из всех формулировок, эквивалентных аксиоме выбора.

Лемма Цорна. *Если всякая цепь в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M подчинен некоторому максимальному.*

Доказательство равносильности всех приведенных утверждений (аксиома выбора, теорема Цермело, теорема Хаусдорфа, лемма Цорна) имеется, например, в книге *А. Г. Курош.* Лекции по общей алгебре. — М.: Физматгиз, 1962; см. также [8]. Мы не будем его здесь воспроизводить.

Если множество верхних граней подмножества A имеет наименьший элемент a, то a называют *точной верхней гранью* подмножества A, аналогично определяется *точная нижняя грань.* Частично упорядоченное множество, всякое непустое *конечное* подмножество которого обладает точной верхней гранью и точной нижней гранью, называется *решеткой*, или *структурой.*

8. Трансфинитная индукция. Широко распространенный метод доказательства тех или иных утверждений — это метод математической индукции. Он, как известно, состоит в следующем. Пусть имеется некоторое утверждение $P(n)$, которое формулируется для каждого натурального числа n, и пусть известно, что:

1) утверждение $P(1)$ верно;

2) из того, что $P(k)$ верно для всех $k \leqslant n$, следует, что $P(n+1)$ верно.

Тогда утверждение $P(n)$ верно для всех $n = 1, 2, \ldots$ Действительно, в противном случае среди тех n, для которых $P(n)$ неверно, нашлось бы наименьшее число, скажем, n_1. Очевидно, что $n_1 > 1$, т. е. $n_1 - 1$ тоже натуральное число, и мы приходим к противоречию с условием 2).

Аналогичный прием может быть использован с заменой натурального ряда любым вполне упорядоченным множеством. В этом случае он носит название *трансфинитной индукции.* Таким образом, метод трансфинитной индукции состоит в следующем. Пусть дано некоторое вполне упорядоченное множество A (если угодно, его можно считать множеством всех порядковых трансфинитов, меньших некоторого данного) и пусть $P(a)$ — некоторое утверждение, формулируемое для каждого $a \in A$ и такое, что $P(a)$ верно для первого элемента из A и верно для a, если оно верно для всех элементов, предшествующих a. Тогда $P(a)$ верно для всех $a \in A$. Действительно, если бы существовали элементы в A, для которых $P(a)$ не имеет места, то в множестве таких элементов нашелся бы первый, скажем, a^*, и мы пришли бы к противоречию, поскольку для всех $a < a^*$ утверждение $P(a)$ было бы верно.

Так как в силу теоремы Цермело всякое множество можно вполне упорядочить, трансфинитная индукция может быть, в принципе, применена к любому множеству. Однако практически бывает удобнее пользоваться заменяющей ее леммой Цорна, которая опирается лишь на наличие частичной упорядоченности в рассматриваемом множестве. А некоторая частичная упорядоченность рассматриваемых объектов в задачах, требующих применения леммы Цорна, обычно возникает естественным образом, «сама собой».

§ 5. Системы множеств [1])

1. Кольцо множеств. *Системой множеств* называется всякое множество, элементы которого сами представляют собой какие-либо множества. Если не оговорено противное, мы будем рассматривать системы таких множеств, каждое из которых является подмножеством некоторого фиксированного множества X. Системы множеств мы будем обозначать прописными готическими буквами. Основной интерес для нас будут представлять системы множеств, удовлетворяющие (по отношению к введенным в § 1 операциям) некоторым определенным условиям замкнутости.

Определение 1. Непустая система множеств $\mathfrak{R}$ называется *кольцом*, если она обладает тем свойством, что из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует $A \vartriangle B \in \mathfrak{R}$ и $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Так как для любых A и B

$$A \cup B = (A \vartriangle B) \cup (A \cap B) \quad \text{и} \quad A \setminus B = A \vartriangle (A \cap B),$$

то из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ вытекает также принадлежность к $\mathfrak{R}$ множеств $A \cup B$ и $A \setminus B$. Таким образом, кольцо множеств есть система множеств, замкнутая по отношению к взятию суммы и пересечения, вычитанию и образованию симметрической разности. Очевидно, что кольцо замкнуто и по отношению к образованию любых конечных сумм и пересечений вида

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

[1]) Рассматриваемые в этом параграфе понятия понадобятся нам в гл. V при изложении общей теории меры. Поэтому чтение данного параграфа может быть отложено. Читатель, решивший ограничиться при изучении теории меры мерой на плоскости (§ 1 гл. V), может этот параграф пропустить совсем.

Любое кольцо содержит пустое множество $\varnothing$, так как всегда $A \setminus A = \varnothing$. Система, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Множество E называется *единицей* системы множеств $\mathfrak{S}$, если оно принадлежит $\mathfrak{S}$ и если для любого $A \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство

$$A \cap E = A.$$

Таким образом, единица системы множеств $\mathfrak{S}$ есть не что иное, как максимальное множество этой системы, содержащее все другие входящие в $\mathfrak{S}$ множества.

Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй* множеств.

Примеры. 1. Для любого множества A система $\mathfrak{M}(A)$ всех его подмножеств представляет собой алгебру множеств с единицей $E = A$.

2. Для любого непустого множества A система $\{\varnothing, A\}$, состоящая из множества A и пустого множества $\varnothing$, образует алгебру множеств с единицей $E = A$.

3. Система всех конечных подмножеств произвольного множества A представляет собой кольцо множеств. Это кольцо будет алгеброй в том и только том случае, когда множество A само конечно.

4. Система всех ограниченных подмножеств числовой прямой является кольцом множеств, не содержащим единицы.

Из определения кольца множеств непосредственно вытекает

Теорема 1. *Пересечение* $\mathfrak{R} = \bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha$ *любого множества колец есть кольцо.*

Установим следующий простой, но важный для дальнейшего факт.

Теорема 2. *Для любой непустой системы множеств* $\mathfrak{S}$ *существует одно и только одно кольцо* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, *содержащее* $\mathfrak{S}$ *и содержащееся в любом кольце* $\mathcal{R}$, *содержащем* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Легко видеть, что кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ определяется системой $\mathfrak{S}$ однозначно. Для доказательства его существования рассмотрим объединение $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$ всех множеств A, входящих в $\mathfrak{S}$, и кольцо $\mathfrak{M}(X)$ всех подмножеств множества X. Пусть Σ — совокупность всех колец множеств, содержащихся в $\mathfrak{M}(X)$ и содержащих $\mathfrak{S}$. Пересечение $\mathfrak{P} = \bigcap\limits_{\mathfrak{R} \in \Sigma} \mathfrak{R}$ всех этих колец и будет, очевидно, искомым кольцом $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

Действительно, каково бы ни было кольцо $\mathfrak{R}^*$, содержащее $\mathfrak{S}$, пересечение $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{M}(X)$ будет кольцом из Σ и, следовательно, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*$, т. е. $\mathfrak{P}$ действительно удовлетворяет требованию минимальности. Это кольцо называется *минимальным кольцом* над $\mathfrak{S}$ или кольцом, *порожденным* $\mathfrak{S}$, и обозначается $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

2. Полукольцо множеств. В ряде вопросов, например, в теории меры, наряду с понятием кольца важную роль играет более общее понятие полукольца множеств.

Определение 2. Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *полукольцом*, если она содержит пустое множество $\varnothing$, замкнута по отношению к образованию пересечений и обладает тем свойством, что из принадлежности к $\mathfrak{S}$ множеств A и $A_1 \subset A$ вытекает возможность представления A в виде $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, где A_k — попарно непересекающиеся множества из $\mathfrak{S}$, первое из которых есть заданное множество A_1.

В дальнейшем всякий набор попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$, объединение которых есть заданное множество A, мы будем называть *конечным разложением* множества A.

Всякое кольцо множеств $\mathfrak{R}$ является полукольцом, так как если A и $A_1 \subset A$ входят в $\mathfrak{R}$, то имеет место разложение

$$A = A_1 \cup A_2, \quad \text{где} \quad A_1 = A \setminus A_1 \in \mathcal{R}.$$

Примером полукольца, не являющегося кольцом множеств, может служить совокупность всех интервалов (a, b), отрезков $[a, b]$ и полуинтервалов $[a, b)$ и $(a, b]$ на числовой прямой [1]). Еще одним примером служит совокупность всех «полуоткрытых» прямоугольников $a < x \leqslant b$, $c < y \leqslant d$ на плоскости или совокупность всех полуоткрытых параллелепипедов в пространстве.

Установим следующие свойства полуколец множеств.

Лемма 1. *Пусть множества $A_1, \ldots, A_n$, A принадлежат полукольцу $\mathfrak{S}$, причем множества A_i попарно не пересекаются и все содержатся в A. Тогда набор множеств A_i $(i = 1, \ldots, n)$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{S}$ до конечного разложения*

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \quad s \geqslant n,$$

множества A.

[1]) При этом в число интервалов включается, конечно, «пустой» интервал (a, a), а в число отрезков — отрезок, состоящий из одной точки $[a, a]$.

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ справедливость утверждения леммы вытекает из определения полукольца. Предположим, что это утверждение справедливо для $n = m$ и рассмотрим $m+1$ множество $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$, удовлетворяющих условиям леммы. По сделанному предположению

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m \cup B_1 \cdots \cup B_p,$$

где все множества B_q $(q = 1, \ldots, p)$ принадлежат $\mathfrak{S}$. Положим $B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q$. По определению полукольца, имеется разложение $B_q = B_{q1} \cup \cdots \cup B_{qr}$, где все B_{qj} принадлежат $\mathfrak{S}$. Легко видеть, что

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} \Big(\bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj} \Big).$$

Таким образом, утверждение леммы доказано для $n = m + 1$, а следовательно, и вообще для всех n.

Лемма 2. *Какова бы ни была конечная система множеств $A_1, \ldots, A_n$, принадлежащих полукольцу $\mathfrak{S}$, в $\mathfrak{S}$ найдется такая конечная система попарно непересекающихся множеств $B_1, \ldots, B_t$, что каждое A_k может быть представлено в виде суммы*

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

некоторых из множеств B_s.

Доказательство. При $n = 1$ лемма тривиальна, так как достаточно положить $t = 1$, $B_1 = A_1$. Допустим, что она справедлива для $n = m$, и рассмотрим в $\mathfrak{S}$ некоторую систему множеств $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$. Пусть $B_1, \ldots, B_t$ — множества из $\mathfrak{S}$, удовлетворяющие условиям леммы по отношению к $A_1, \ldots, A_m$. Положим

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s.$$

В силу леммы 1 имеет место разложение

$$A_{m+1} = \bigcup_{s=1}^{t} B_{s1} \cup \bigcup_{p=1}^{q} B'_p, \quad B'_p \in \mathfrak{S}, \tag{1}$$

а в силу самого определения полукольца имеет место разложение

$$B_s = B_{s1} \cup \cdots \cup B_{sf_s}, \quad B_{sj} \in \mathfrak{S}.$$

Легко видеть, что

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{f_s} B_{sj}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

и что множества

$$B_{sj},\ B'_p$$

попарно не пересекаются. Таким образом, множества B_{sj}, B'_p удовлетворяют условиям леммы по отношению к $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$.

3. Кольцо, порожденное полукольцом. Мы уже видели в п. 1, что для каждой системы множеств $\mathfrak{S}$ существует единственное минимальное кольцо, содержащее $\mathfrak{S}$. Однако для произвольной системы $\mathfrak{S}$ фактическое построение кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ по $\mathfrak{S}$ довольно сложно. Оно становится вполне обозримым в том важном случае, когда $\mathfrak{S}$ представляет собой полукольцо. Это построение дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{S}$ — полукольцо, то $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ совпадает с системой $\mathfrak{Z}$ множеств A, допускающих конечные разложения*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

на множества $A_k \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Покажем, что система $\mathfrak{Z}$ образует кольцо. Если A и B — два произвольных множества из $\mathfrak{Z}$, то имеют место разложения

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \qquad A_i \in \mathfrak{S}, \quad B_j \in \mathfrak{S}.$$

Так как $\mathfrak{S}$ — полукольцо, то множества

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

тоже входят в $\mathfrak{S}$. В силу леммы 1 имеют место разложения

$$A_i = \bigcup_{j} C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}; \quad B_j = \bigcup_{i} C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}, \tag{2}$$

где D_{ik}, $E_{jl} \in \mathfrak{S}$. Из равенств (2) вытекает, что множества $A \cap B$ и $A \vartriangle B$ допускают разложения

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} C_{ij}, \quad A \vartriangle B = \bigcup_{i,k} D_{ik} \cup \bigcup_{j,l} E_{jl}$$

и, следовательно, входят в $\mathfrak{Z}$. Таким образом, $\mathfrak{Z}$ действительно представляет собой кольцо; его минимальность среди всех колец, содержащих $\mathfrak{S}$, очевидна.

4. σ-алгебры. В различных вопросах, в частности, в теории меры, приходится рассматривать суммы и пересечения не только конечного, но и счетного числа множеств. Поэтому целесообразно, помимо понятия кольца множеств, ввести еще следующие понятия.

Определение 3. Кольцо множеств называется *σ-кольцом*, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n, \ldots$ содержит сумму

$$S = \bigcup_n A_n.$$

Определение 4. Кольцо множеств называется *δ-кольцом*, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, \ldots$ $\ldots, A_n, \ldots$ содержит пересечение

$$D = \bigcap_n A_n.$$

Естественно назвать *σ-алгеброй* σ-кольцо с единицей и *δ-алгеброй* δ-кольцо с единицей. Легко, однако, видеть, что эти два понятия совпадают: каждая σ-алгебра является в то же время δ-алгеброй, а каждая δ-алгебра — σ-алгеброй. Это вытекает из соотношений двойственности (см. § 1)

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n), \qquad \bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

Простейшим примером σ-алгебры является совокупность всех подмножеств некоторого множества A.

Если имеется некоторая система множеств $\mathfrak{S}$, то всегда существует хотя бы одна σ-алгебра, содержащая эту систему. Действительно, положим

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$$

и рассмотрим систему $\mathfrak{B}$ всех подмножеств множества X. Ясно, что $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{S}$. Если $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — произвольная σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{S}$, и $\widetilde{X}$ — ее единица, то каждое $A \in \mathfrak{S}$ содержится в $\widetilde{X}$ и, следовательно, $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \widetilde{X}$. Назовем σ-алгебру $\mathfrak{B}$ *неприводимой* (по отношению к системе $\mathfrak{S}$), если $\widetilde{X} = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$. Иначе говоря, неприводимая σ-алгебра — это σ-алгебра, не содержащая точек, не входящих ни в одно из $A \in \mathfrak{S}$. Естественно в каждом случае рассмотрением только таких σ-алгебр и ограничиваться.

Для неприводимых σ-алгебр имеет место теорема, аналогичная теореме 2, доказанной выше для колец.

Теорема 4. *Для любой непустой системы множеств $\mathfrak{S}$ существует неприводимая (по отношению к этой системе) σ-алгебра*

$\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$, *содержащая* $\mathfrak{S}$ *и содержащаяся в любой* σ*-алгебре, содержащей* $\mathfrak{S}$.

Доказательство проводится в точности тем же методом, что и доказательство теоремы 2; σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ называется *минимальной* σ*-алгеброй над системой* $\mathfrak{S}$.

В анализе важную роль играют так называемые *борелевские множества*, или *B-множества* — множества на числовой прямой, принадлежащие минимальной σ-алгебре над совокупностью всех сегментов $[a, b]$.

5. Системы множеств и отображения. Отметим следующие факты, которые нам понадобятся при изучении измеримых функций.

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на множестве M и принимающая значения из множества N, и пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая система подмножеств множества M. Обозначим через $f(\mathfrak{M})$ систему всех образов $f(A)$ множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{N}$ — некоторая система множеств, содержащихся в N, и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ — система всех прообразов $f^{-1}(A)$ множеств, входящих в $\mathfrak{N}$. Справедливы следующие утверждения, проверка которых предоставляется читателю:

1) Если $\mathfrak{N}$ есть кольцо, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть кольцо.
2) Если $\mathfrak{N}$ есть алгебра, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть алгебра.
3) Если $\mathfrak{N}$ есть σ-алгебра, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть σ-алгебра.
4) $\mathfrak{R}(f^{-1}(\mathfrak{B})) = f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{B}))$.
5) $\mathfrak{B}(f^{-1}(\mathfrak{B})) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$.

Останутся ли эти утверждения справедливыми, если f^{-1} заменить на f, а $\mathfrak{N}$ — на $\mathfrak{M}$?