Оглавление

1 Линейное пространство

1.1 Определение и примеры

Линейное пространство является обобщением понятия множества векторов (двумерных или трехмерных). Необходимость такого обобщения вызвана тем фактом, что во многих разделах математики и прикладных наук большое число объектов обладают свойствами векторов: их можно складывать, умножать на число или друг на друга, причем, эти операции обладают теми же свойствами, что и аналогичные операции для векторов; для этих объектов можно вводить понятие линейной независимости и базисы. Таким образом, возникает возможность изучить свойства указанных объектов с единых позиций, не отвлекаясь на их частные особенности.

Чтобы реализовать такое обобщение, прежде всего необходимо перечислить небольшое число самых общих свойств векторов (которые и делают, собственно, векторы тем, что они собой представляют), из которых следуют все остальные их свойства.

Множество объектов $\mathcal{L}$ называется ***линейным пространством***, а его элементы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — ***векторами***, если в $\mathcal{L}$ определены две операции над векторами:

1) первая операция ставит в соответствие любым двум векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ третий вектор, называемый их ***суммой*** и обозначаемый $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ (операция ***сложения*** векторов);

2) вторая операция ставит в соответствие любому вектору $\mathbf{x}$ и числу λ вектор, называемый ***произведением*** $\mathbf{x}$ на λ и обозначаемый $\lambda\mathbf{x}$ (операция ***умножения*** вектора на число); причем, эти операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (коммутативность сложения).
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (ассоциативность сложения).
3. $\exists(\mathbf{o})\forall(\mathbf{x})\ \mathbf{x}+\mathbf{o}=\mathbf{x}$ (существование нулевого вектора).
4. $\forall(\mathbf{x})\exists(-\mathbf{x})\ \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{o}$ (существование вектора, противоположного вектору $\mathbf{x}$).
5. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (произведение единицы на вектор не изменяет последний).
6. $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$ (ассоциативность умножения на число).
7. $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов).
8. $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел).

Вектор $\mathbf{o}$ называется ***нулевым вектором***, вектор $-\mathbf{x}$ — вектором, ***противоположным*** вектору $\mathbf{x}$. Сумму векторов $\mathbf{x}$ и $-\mathbf{y}$ будем называть ***разностью векторов*** и обозначать $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Если числа, на которые умножаются векторы, действительны, $\mathcal{L}$ будем называть ***действительным*** линейным пространством; если эти числа комплексные, то — ***комплексным*** линейным пространством. Если будет предполагаться, что $\mathcal{L}$ может быть как действительным, так и комплексным, то будем его именовать просто линейным пространством.

Из введенных аксиом получаем следующие утверждения.

1°. *Нулевой вектор — единственный.*

Действительно, предположим, что существуют два нулевых вектора $\mathbf{o}_1$ и $\mathbf{o}_2$. Тогда по третьей аксиоме $\mathbf{o}_1+\mathbf{o}_2=\mathbf{o}_1=\mathbf{o}_2$.

2°. *Вектор* $\mathbf{x}$ *имеет единственный, противоположный ему, вектор* $-\mathbf{x}$.

Если предположить, что вектор $\mathbf{x}$ имеет два различных противоположных вектора $-\mathbf{x}_1$ и $-\mathbf{x}_2$, то по второй, третьей и четвертой аксиомам должно выполняться, что

$$(-\mathbf{x}_1)+\mathbf{x}+(-\mathbf{x}_2)=((-\mathbf{x}_1)+\mathbf{x})+(-\mathbf{x}_2)=\mathbf{o}+(-\mathbf{x}_2)=-\mathbf{x}_2,$$

и

$$(-\mathbf{x}_1) + \mathbf{x} + (-\mathbf{x}_2) = (-\mathbf{x}_1) + (\mathbf{x} + (-\mathbf{x}_2)) = (-\mathbf{x}_1) + \mathbf{o} = -\mathbf{x}_1.$$

Значит, векторы $(-\mathbf{x}_1)$ и $(-\mathbf{x}_2)$ не могут быть различными.

3° *Вектор* $\mathbf{o}$ *противоположен сам себе.*

Следует из того, что $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$.

4° *Вектор* $\mathbf{x}$ *противоположен вектору* $-\mathbf{x}$*:* $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Прямо следует из первой и четвертой аксиом.

5° *Справедливо равенство* $0\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

В самом деле, $0\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (0+1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.

6° *Справедливо равенство* $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Действительно, $(-1)\mathbf{x}+\mathbf{x} = (-1+1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Следовательно, $(-1)\mathbf{x}$ — вектор, противоположный вектору $\mathbf{x}$, а так как такой вектор по доказанному в 2 единственен, то $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

7° *Произведение любого числа на нулевой вектор равно нулевому вектору:* $\lambda\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

Следует из цепочки равенств: $\lambda\mathbf{o} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

8° *Если* $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$*, то либо* $\lambda = 0$*, либо* $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Пусть, например, $\lambda \neq 0$. Умножим равенство $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{o}$ на λ^{-1}: $1\mathbf{x} = \mathbf{o}$, то есть $\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Рассмотрим примеры векторных пространств, многие из которых имеют важное самостоятельное значение в различных разделах математики.

Пример 1.1 (Обычные векторы)**.** *Так как обычные векторы, изученные в разделе векторной алгебры, с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства, то множества векторов на плоскости и в пространстве образуют линейные пространства.*

Координатная форма записи векторов в двумерном пространстве имеет вид двоек чисел: (a_1, a_2); в трехмерном пространстве — троек чисел: (a_1, a_2, a_3). Множество неизвестных в алгебраическом уравнении, множество свободных членов в правых частях системы алгебраических уравнений, множество коэффициентов при неизвестных в одном и том же уравнении такой системы могут быть представлены n числами: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По аналогии с двойками и тройками чисел такую запись будем называть **n-*кой чисел***. Множество показателей работы предприятия; множество характеристик работы транспорта; множество величин, описывающих состояние погоды, тоже могут быть записаны в виде n-ок чисел.

Пример 1.2 (Пространство $\mathbf{R}^n$). *Показать, что множество всех n-ок чисел является линейным пространством.*

Решение. Прежде всего введем операции сложения n-ок чисел (векторов) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в таком пространстве:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\end{aligned}$$

и умножения n-ки чисел на число:

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Если нулевым вектором считать n-ку $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots 0)$, а вектором, противоположным вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, вектор $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, то все аксиомы линейного пространства будут выполнены. Например, седьмая аксиома:

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \\ &= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) = \\ &= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \ldots, \lambda(x_n + y_n)) = \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) = \\ &= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Проверку остальных аксиом выполните самостоятельно. Линейное пространство всех n-ок чисел обозначается $\mathbf{R}^n$. □

Рассмотрим множество многочленов степени не выше n-ой:

$$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n, \tag{1.1}$$

для которых сложение и умножение на число определены обычным образом:

$$
\begin{aligned}
P_n(t) + Q_n(t) &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n) + \\
&+ (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n) = \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_n + b_n)t^n; \\
\lambda P_n(t) &= \lambda(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n) = \\
&= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2 + \ldots + (\lambda a_n)t^n.
\end{aligned}
$$

Пример 1.3. *Показать, что множество всех многочленов степени не выше n-й является линейным пространством.*

Решение. Операции сложения многочленов и умножения многочлена на число выполняются фактически над коэффициентами многочленов, поэтому каждый многочлен можно заменить m-кой чисел $(m = n + 1)$ и выполнять соответствующие действия над m-ками чисел. Но, как было показано, m-ки чисел образуют линейное пространство, значит и множество многочленов степени не выше n-ой является линейным пространством. □

Пример 1.4. *Если не ограничивать степень многочлена каким-либо числом, то многочлен* (1.1) *уже нельзя записать m-ой чисел, а только с помощью бесконечного вектора вида* $\mathbf{x} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. *Будет ли множество всех многочленов линейным пространством?*

Решение. Введем для таких векторов, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, являющихся бесконечными последовательностями, операции сложения и умножения на число:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = \\
&= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots), \\
\lambda \mathbf{x} &= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Если в качестве нулевого вектора выбрать бесконечную последовательность нулей $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots)$, а вектором, противоположным вектору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, считать вектор $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n, \ldots)$, то так же, как и для n-ок чисел, нетрудно увидеть, что все аксиомы линейного пространства будут выполнены. Значит, множество всех многочленов тоже является линейным пространством. □

Пример 1.5. *Множество функций вида $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$, очевидно, является линейным пространством с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. Нулевым вектором в этом пространстве можно считать функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a,b]$, а вектором, противоположным функции $f(x)$, — функцию $-f(x)$.*

Пример 1.6. *Множество матриц размера $m \times n$ (из m строк и n столбцов) образуют линейное пространство, причем сложение матриц и умножение матрицы на число определяются обычным способом. Роль нулевого вектора играет нулевая матрица, а роль матрицы, противоположной матрице A, — матрица $-A$. Очевидно, все аксиомы линейного пространства выполняются.*

1.2 Линейная независимость

Важным понятием в теории линейных пространств является понятие линейной независимости векторов, которая, вообще говоря, означает, что ни один ненулевой вектор из данной совокупности векторов нельзя представить в виде суммы произведений остальных векторов на некоторые числа. Такая сумма векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ называется ***линейной комбинацией векторов***:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n,$$

где $\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — числа, называемые ***коэффициентами линейной комбинации***. Линейная комбинация векторов называется ***тривиальной***, если все ее коэффициенты равны нулю; в противном случае она называется ***нетривиальной***. Точное определение линейной независимости таково: векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ называются ***линейно независимыми***, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору. В противном случае они называются ***линейно зависимыми***.

Если векторы линейно зависимы, найдется их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{o}. \tag{1.3}$$

Это значит, что хотя бы один коэффициент линейной комбинации (например, без потери общности, λ_1) не равен нулю. Тогда вектор $\mathbf{x}_1$ можно выразить через остальные векторы:

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{x}_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{x}_n, \tag{1.4}$$

то есть представить его в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Если же векторы линейно независимы, это сделать не удастся, так как в равенстве (1.3) все коэффициенты линейной комбинации равны нулю.

Бесконечная система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ называется ***линейно независимой***, если любая конечная подсистема этих векторов линейно независима. В противном случае бесконечная система векторов называется ***линейно зависимой***.

Теорема 1.1. *Если среди векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ есть нулевой вектор, то вся система векторов линейно зависима.*

Доказательство. Пусть, например, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$, тогда для нетривиальной линейной комбинации получаем $1\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \ldots + 0_n\mathbf{x}_n = \mathbf{o}$, что означает линейную зависимость векторов. □

Теорема 1.2. *Если среди векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ некоторые образуют линейно зависимую систему, то и вся система $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно зависима.*

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, $k < n$, линейно зависимы, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k$, равная нулевому вектору. Но тогда и нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{x}_k + 0\mathbf{x}_{k+1} + \ldots + 0\mathbf{x}_n$ тоже равна нулевому вектору. Значит, система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно зависима. □

Следствие 1.1. *Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы, то и любая их подсистема линейно независима.*

Для обычных векторов на плоскости в разделе векторной алгебры доказывается теорема о том, что любой вектор может быть представлен единственным образом в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов. Из следующих утверждений будет вытекать, что на плоскости любая система из числа векторов, большего двух, линейно зависима.

Теорема 1.3. *Два вектора на плоскости линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{o}$. Пусть, например, $\mu \neq 0$, тогда $\mathbf{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\mathbf{a}$. Значит, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Обратно. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Если вектор $\mathbf{a}$ нулевой, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы, и теорема доказана.

Если же $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, то, как было показано в разделе векторной алгебры, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, где λ — некоторое число. Значит, нетривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору: $\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$, и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. □

Следствие 1.2. *Два вектора на плоскости линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.*

Точно так же для векторов в пространстве доказывалось, что любой вектор может быть представлен единственным образом в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов. Из доказываемых ниже теорем получается, что в пространстве любая система из числа векторов, большего трех, линейно зависима.

Теорема 1.4. *Три вектора в пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. Тогда один из них является линейной комбинацией двух других векторов (см. (1.4)): $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то после совмещения их начал, они окажутся на одной и той же прямой, но тогда и вектор $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ окажется на той же прямой. Значит, все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ будут не только компланарны, но даже и коллинеарны. Если же векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, то после совмещения начал всех трех векторов векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не будут лежать на одной и той же прямой. Следовательно, через три точки — их общее начало и концы — можно будет провести плоскость. Тогда в этой плоскости будут также лежать векторы $\lambda\mathbf{a}$ и $\mu\mathbf{b}$, а также параллелограмм, построенный на них. Но его диагональ как раз будет вектором $\mathbf{c}$ (сложение векторов по правилу параллелограмма). Значит, все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ будут лежать в одной плоскости, что означает их компланарность.

Обратно. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Если какие-нибудь два из этих векторов коллинеарны, то по предыдущей теореме они линейно зависимы, а, значит, все три вектора тоже линейно зависимы по теореме 1.2. Если же никакие два вектора не коллинеарны, то по теореме о разложении на плоскости $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$, или $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{o}$ и, следовательно, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы. □

Следствие 1.3. *Три вектора в пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.*

1.2. Линейная независимость

Теорема 1.5. *В линейном пространстве* $\mathbf{R}^n$ *любые* n *векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель* Δ*, составленный из этих векторов, не равен нулю.*

Доказательство. Предположим, что векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы. Тогда линейная однородная система уравнений

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{o} \tag{1.5}$$

относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ имеет единственное решение $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\ldots$, $\lambda_n = 0$. Это означает, что ее главный определитель Δ не равен нулю.

Обратно, если этот определитель не равен нулю, то система уравнений (1.5) относительно неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ имеет единственное решение. Но одно решение имеется всегда: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\ldots$, $\lambda_n = 0$. Следовательно, других решений быть не может, и векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы. □

Теорема 1.6. *В линейном пространстве* $\mathbf{R}^n$ *любая система из* $(n+1)$*-го вектора линейно зависима.*

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$. Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно зависимы, то по теореме 1.2 линейно зависимы и векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$, и теорема доказана.

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы и вектор $\mathbf{x}_{n+1} \neq \mathbf{o}$ (иначе вся система векторов линейно зависима и теорема доказана). Тогда система уравнений

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n+1}$$

имеет единственное решение, так как в силу предыдущей теоремы ее главный определитель не равен нулю, причем, это решение ненулевое, потому что в противном случае вектор $\mathbf{x}_{n+1}$ окажется нулевым, что противоречит предположению. Последнее равенство означает линейную зависимость векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$. □

В пространстве многочленов степени не выше n-ой любой многочлен может быть представлен m-кой ($m = n+1$) своих коэффициентов, поэтому в соответствии с только что доказанной теоремой система из $(n+1)$-го многочлена линейно независима, если составленный из соответствующих m-ок определитель не равен нулю. Из этой же теоремы следует, что любые

$n+2$ многочлена линейно зависимы в этом пространстве. В частности, линейно независимой является система $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2, \ldots$, $\mathbf{x}_n = t^n$, так как ей соответствуют m-ки, образующие определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Линейная независимость этой системы следует также из того, что многочлен $\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n$ может равняться нулю лишь тогда, когда все его коэффициенты равны нулю.

В пространстве всех многочленов существует бесконечная линейно независимая система векторов $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n = t^n, \ldots$. Действительно, любая конечная подсистема таких векторов имеет вид $\mathbf{x}_k = t^\alpha$, $\mathbf{x}_l = t^\beta$, $\ldots$, $\mathbf{x}_s = t^\gamma$, где все показатели α, β, $\ldots$, γ различны и принадлежат расширенному множеству натуральных чисел $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть $\xi = \max(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$. Как было показано, система векторов $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_\xi = t^\xi$ линейно независима, а тогда линейно независима и система векторов $\mathbf{x}_k = t^\alpha$, $\mathbf{x}_l = t^\beta$, $\ldots$, $\mathbf{x}_s = t^\gamma$ (следствие 1.1).

Так как многочлены $\mathbf{x}_1 = 1$, $\mathbf{x}_2 = t$, $\mathbf{x}_3 = t^2, \ldots$, $\mathbf{x}_n = t^n, \ldots$ непрерывны, то они дают пример линейно-независимой системы векторов и в пространстве всех непрерывных функций.

В пространстве всех матриц размера $m \times n$ линейно независимую систему из mn векторов образуют матрицы $\mathbf{A}_{ij}$, у которых элемент $a_{ij} = 1$, а остальные элементы равны нулю. В самом деле,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{O}$$

($\mathbf{O}$ — нулевая матрица), если только все $\lambda_{ij} = 0$. При этом для любой матрицы $\mathbf{A}$ размера $m \times n$ справедливо равенство

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathbf{A}_{ij},$$

которое означает, что система из $mn+1$ матрицы уже будет линейно зависимой.

1.3 Базис

Базисы позволяют записывать векторы линейного пространства в компонентной (координатной) форме так же, как записываются обычные векторы.

Базисом в линейном пространстве называется конечная упорядоченная система линейно независимых векторов, обладающая тем свойством, что любой вектор линейного пространства является их линейной комбинацией.

Базис из n векторов будем обозначать $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$, а векторы $\mathbf{e}_i$ называть базисными. Если базис существует, линейное пространство называется ***конечномерным*** (**n-*мерным***), а число n — ***размерностью*** пространства. Если же для любого n в линейном пространстве существует система из n линейно независимых векторов, то линейное пространство называется ***бесконечномерным***.

В n-мерном пространстве любой вектор можно записать в виде линейной комбинации векторов базиса, которая называется ***разложением вектора по базису***, а коэффициенты линейной комбинации — ***коэффициентами разложения***:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = [\mathbf{x}]^T[\mathbf{e}].$$

Числа x_1,...,x_n называются ***компонентами*** или ***координатами*** вектора $\mathbf{x}$, а запись $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}]_\mathbf{e}$ означает представление компонент вектора в виде матрицы размера $n \times 1$, то есть в виде вектора-столбца (с добавлением обозначения базиса, если это существенно):

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Базис будем записывать таким же образом:

$$[\mathbf{e}] = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда выражение $[\mathbf{x}]^T[\mathbf{e}]$ — это просто умножение двух матриц:

$$[\mathbf{x}]^T[\mathbf{e}] = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Теорема 1.7. *Координаты вектора в n-мерном пространстве определяются однозначно.*

Доказательство. Предположим, что имеется два разложения одного и того же вектора по базису:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n; \ \mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Вычитая из одного равенства другое, получаем

$$(x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{o}.$$

Так как векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы, то это равенство возможно только при нулевых коэффициентах линейной комбинации: $x_1 = y_1$, ..., $x_n = y_n$. □

Теорема 1.8. *В конечномерном пространстве два различных базиса всегда состоят из одного и того же количества векторов.*

Доказательство. Пусть в линейном пространстве существуют два базиса $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ и $< \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m >$, причем, $m > n$. Разложим векторы $\mathbf{f}_i$, $i = \overline{1, m}$, по векторам первого базиса:

$$\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \ i = \overline{1, m}, \tag{1.6}$$

где α_{ij} — коэффициенты разложения вектора $\mathbf{f}_i$ по базису $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$. Составим из коэффициентов разложения матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как $m > n$, то строки матрицы, рассматриваемые как n-ки чисел в пространстве $\mathbf{R}^n$ линейно зависимы в силу теоремы 1.6. Это значит, что существует их нетривиальная линейная комбинация с коэффициентами λ_1, ..., λ_m, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}) + \ldots + \lambda_m(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn}) = (0, \ldots, 0),$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\alpha_{ij} = 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{1.7}$$

Составим нетривиальную линейную комбинацию для векторов базиса $< \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m >$ и преобразуем ее с помощью формулы (1.6):

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij} \right) \mathbf{e}_j = \mathbf{o},$$

так как выражения в круглых скобках равны 0 в силу равенств (1.7). Значит, векторы $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ линейно зависимы и не могут образовывать базис. Следовательно, $m = n$. □

Теорема 1.9. *В n-мерном пространстве каждая упорядоченная система из n линейно независимых векторов является базисом.*

Доказательство. Если эти векторы не составляют базис, то в пространстве существует $n+k$, $k \geq 1$, независимых векторов. Если это справедливо для любого k, пространство бесконечномерно, что́ противоречит условию теоремы. Пусть имеется $n + k$ независимых векторов, а любые $n + k + 1$ векторов линейно зависимы. Тогда базис состоит из $n + k$ векторов, а это противоречит теореме 1.8. □

Используя результаты предыдущего п., отметим, что базисом пространства обычных векторов на плоскости является любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, принадлежащих плоскости; размерность пространства равна 2.

Базис обычных векторов в пространстве образует любая тройка некомпланарных векторов; размерность пространства равна 3.

Базис пространства $\mathbf{R}^n$ — любые n векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, для которых состоящий из них определитель $\neq 0$; размерность пространства равна n. Отметим, что в базисе

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \tag{1.8}$$

вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ имеет компоненты, совпадающие с набором чисел, определяющих n-ку.

В пространстве многочленов степени не выше n-ой базисом является упорядоченное множество $< 1, t, t^2, \ldots, t^n >$, размерность пространства равна $n + 1$.

Пространства всех многочленов и функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, бесконечномерны.

В пространстве матриц размера $m \times n$ базисом является упорядоченное множество

$$< \mathbf{A}_{11}, \ldots, \mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{21}, \ldots, \mathbf{A}_{2n}, \ldots, \mathbf{A}_{m1}, \ldots, \mathbf{A}_{mn} >;$$

размерность пространства равна mn.

Рассмотрим, какой вид в n-мерном пространстве с базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ принимают свойства векторов, представленных своими компонентами.

Пусть $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = (y_1, \ldots, y_n)$.

1°. *Чтобы сложить (вычесть) два вектора, нужно сложить (вычесть) их соответствующие компоненты:*

$$\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = (x_1 \pm y_1, \ldots, x_n \pm y_n).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \pm \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \pm (y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = \\ &= (x_1 \pm y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n \pm y_n)\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

2°. *Чтобы умножить вектор на число, нужно на это число умножить все его компоненты:*

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

В самом деле,

$$\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = (\lambda x_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\lambda x_n)\mathbf{e}_n.$$

3°. *Вектор тогда и только тогда имеет нулевые компоненты, когда он нулевой:*

$$\mathbf{o} = (0, \ldots, 0).$$

Для нулевого вектора $\mathbf{o} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (x_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - x_n)\mathbf{e}_n = 0\mathbf{e}_1 + \ldots + 0\mathbf{e}_n$.

Наоборот, если $\mathbf{z} = 0\mathbf{e}_1 + \ldots + 0\mathbf{e}_n$, то

$$\forall(\mathbf{y})\ \mathbf{z} + \mathbf{y} = (0 + y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (0 + y_n)\mathbf{e}_n = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n = \mathbf{y}.$$

Это значит, что $\mathbf{z} = \mathbf{o}$.

4°. *Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

Следует из того, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{o} \Longleftrightarrow (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{o}.$$

По предыдущему свойству $x_1 - y_1 = 0, \ldots$, $x_n - y_n = 0$, или $x_1 = y_1$, $\ldots$, $x_n = y_n$.

1.3. Базис

2 Геометрия линейного пространства

2.1 Аффинное пространство

В обычном геометрическом пространстве сначала вводится понятие точки, а затем на основе этого понятия — понятие вектора как упорядоченной пары точек. В теории линейных пространств поступают наоборот: на основе уже имеющегося понятия вектора линейного пространства вводится понятие точки, а затем другие, связанные с ним понятия.

Пусть имеется n-мерное линейное пространство. Его элементы были названы векторами. Можно вспомнить, что в обычных геометрических пространствах каждый вектор определялся двумя точками: своим началом и концом, а каждая точка представляла собой конец радиус-вектора. Основное отличие радиус-векторов от прочих векторов состоит в том, что все радиус-векторы выходят из одной и той же точки (начала координат). Но, вообще говоря, в векторной алгебре рассматриваются свободные векторы, не привязанные к какой-либо конкретной точке. Поэтому можно сказать, что точке сопоставлен целый класс равных друг другу векторов, или, по-другому, один и тот же свободный вектор.

Поступим наоборот: вектору сопоставим точку. Именно, ***точкой*** A линейного пространства назовем некоторый вектор $\mathbf{x}_A$. Такую точку нельзя построить даже в обычном геометрическом пространстве, так как для построения нужна система координат. Но сначала убедимся в том, что введенное понятие точки оправдывает наше интуитивное представление о точках и векторах, а затем введем систему координат.

Прежде всего каждой паре точек A и B поставим в соответствие вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$. Тем самым каждая упорядоченная пара разных точек A и B будет определять единственный вектор $\mathbf{z}$, причем, точка A будет считаться началом вектора $\mathbf{z}$, а точка B — его концом.

Из этого определения следуют два важных утверждения, которые часто принимают в качестве аксиом точечно-векторного пространства.

1° *Для любой точки A и любого вектора $\mathbf{x}$ существует единственная точка B такая, что $\mathbf{AB} = \mathbf{x}$ (вектор и его начало однозначно определяют конец вектора).*

Действительно, в качестве точки B достаточно взять точку $B = \mathbf{x}_A + \mathbf{x}$, потому что тогда $\mathbf{AB} = (\mathbf{x}_A + \mathbf{x}) - \mathbf{x}_A = \mathbf{x}$.

2° *Для любых трех точек A, B и C выполнено равенство $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC}$ (сложение векторов по правилу треугольника).*

В самом деле, $\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B) = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A = \mathbf{AC}$.

Линейное n-мерное пространство, дополненное точками, которые удовлетворяют этим утверждениям, называется ***аффинным*** (или ***точечно-векторным***) n-мерным пространством.

Рассмотрим еще несколько следствий.

3° *Если $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \mathbf{x}$, то $B = C$.*

Это сразу вытекает из первого утверждения.

4° *Для любой точки A вектор $\mathbf{AA} = \mathbf{o}$.*

Действительно, из второго утверждения следует, что $\mathbf{AA} + \mathbf{AC} = \mathbf{AC}$. Но таким свойством обладает только нулевой вектор, поэтому $\mathbf{AA} = \mathbf{o}$.

5° *Вектором, противоположным вектору $\mathbf{AB}$, является вектор $\mathbf{BA}$.*

Снова используя второе утверждение, получаем $\mathbf{AB} + \mathbf{BA} = \mathbf{AA} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_A = \mathbf{o}$. Значит, $\mathbf{BA} = -\mathbf{AB}$.

6° *Для любых четырех точек A, B, A', B' равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathbf{AA'} = \mathbf{BB'}$ (для любого вектора $\mathbf{AB}$ из любой точки A' можно отложить равный ему вектор $\mathbf{A'B'}$, см. рис. 2.1).*

Это вытекает из равенства $\mathbf{AB} + \mathbf{BB'} = \mathbf{AB'} = \mathbf{AA'} + \mathbf{A'B'}$.

Теперь введем систему координат. ***Декартовой системой координат*** в аффинном n-мерном пространстве называется совокупность точки O (***начала координат***) и базиса $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$, который будем называть ***декартовым базисом***. В декартовом базисе каждой точке пространства A соответствует единственный вектор (радиус-вектор) $\mathbf{OA} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, координаты которого называются ***координатами*** точки A, так что точку можно записывать как $A(x_1, \ldots, x_n)$. Поскольку вектор $\mathbf{OO} = \mathbf{o} = 0\mathbf{e}_1 + \ldots + 0\mathbf{e}_n$, точка O имеет нулевые координаты.

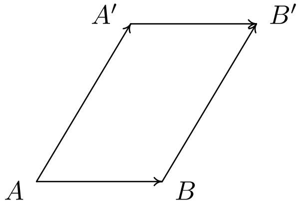

Рис. 2.1: К следствию 6

Если $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $B(y_1, \ldots, y_n)$ — две точки аффинного пространства, то в силу равенства $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$ имеем $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n$. Таким образом, чтобы получить координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

Как известно, в трехмерном пространстве прямая с направляющим вектором $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \mathbf{o}$, проходящая через точку $M_0(x^0, y^0, z^0)$, задается системой уравнений

$$\frac{x - x^0}{a_1} = \frac{y - y^0}{a_2} = \frac{z - z^0}{a_3}.$$

По аналогии в декартовой системе координат аффинного пространства ***прямой*** с направляющим вектором $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \neq \mathbf{o}$, проходящей через точку $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, называют множество точек $M(x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{x_1 - x_1^0}{a_1} = \cdots = \frac{x_n - x_n^0}{a_n}.$$

Если приравнять все эти отношения одному и тому же параметру t, то систему можно переписать так:

$$x_1 - x_1^0 = a_1 t, \ldots, x_n - x_n^0 = a_n t.$$

Если теперь ввести радиус-векторы точек $\mathbf{r} = \mathbf{OM} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то совокупность полученных выражений можно заменить одним векторным уравнением

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t,$$

которое называется ***векторным уравнением прямой***.

Плоскость в аналитической геометрии описывается, например, своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. В аффинном пространстве плоскости соответствует ***гиперплоскость***, которой называется множество точек $M(x_1,\ldots,x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$A_1x_1+\cdots+A_nx_n+A=0$$

при условии, что вектор ***нормали*** $\mathbf{n}=(A_1,\cdots,A_n)\neq\mathbf{o}$.

2.2 Евклидово пространство

Введенные понятия еще не позволяют находить расстояния между точками в аффинном пространстве или углы между векторами и другими геометрическими объектами в пространстве линейном. Чтобы это стало возможным, нужно ввести еще одну операцию — скалярное умножение векторов. В данном п. будем рассматривать только действительные линейные пространства. Обобщая свойства скалярного умножения обычных векторов, ***скалярным умножением*** векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейного пространства называют операцию, ставящую в соответствие этим векторам действительное число $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, называемое ***скалярным произведением*** векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, и обладающую следующими свойствами.

1°. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0$, *причем, если* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=0$, *то* $\mathbf{x}=\mathbf{o}$.

2°. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$.

3°. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}$.

4°. $(\alpha\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$.

Здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — произвольные векторы, α — произвольное число. Для краткости будем далее обозначать $\mathbf{x}^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$.

Линейное пространство, в котором имеется операция скалярного умножения векторов, называется ***евклидовым*** пространством. Аффинное n-мерное пространство, если в нем определено скалярное произведение векторов, будем называть ***евклидовым аффинным пространством***.

Докажем следствия, вытекающие из этих аксиом.

1°. $\mathbf{x}\cdot(\alpha\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$.

Действительно, на основании второй и четвертой аксиом $\mathbf{x}\cdot(\alpha\mathbf{y})=$ $=(\alpha\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}=\alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x})=\alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$.

2°. $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$.

Следует из $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{y}+\mathbf{z})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{z}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$.

3°. $\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\mathbf{x}_k\right)\cdot\mathbf{y} = \sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\mathbf{x}_k\cdot\mathbf{y})$, $\mathbf{x}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\mathbf{y}_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}_k)$.

4°. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{o} = 0$.

Так как $\mathbf{o} = 0\mathbf{x}$, то $\mathbf{x}\cdot\mathbf{o} = \mathbf{x}\cdot(0\mathbf{x}) = 0(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) = 0$.

Длиной (***модулем***) вектора $\mathbf{x}$ называется корень квадратный из скалярного произведения вектора на себя. Обозначается длина вектора евклидова пространства так же, как и длина обычного вектора: $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$. Из первой аксиомы скалярного произведения и следствия 4 вытекает, что длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда вектор нулевой. В евклидовом аффинном пространстве длина вектора $\mathbf{AB}$ определяет расстояние между точками A и B.

С длиной вектора связаны следующие утверждения.

Теорема 2.1 (Неравенство Коши-Буняковского)**.**

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы евклидова пространства, а α и β — произвольные числа. Тогда в силу первой аксиомы скалярного произведения справедливо неравенство

$$(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})\cdot(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha^2\mathbf{x}^2+2\alpha\beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+\beta^2\mathbf{y}^2 \geq 0, \tag{2.2}$$

причем, равенство нулю имеет место только, когда $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y} = \mathbf{o}$. Положив в последнем неравенстве $\alpha = \mathbf{y}^2$, а $\beta = -(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^2(\mathbf{y}^2)^2 - 2\mathbf{y}^2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2\mathbf{y}^2 &= \mathbf{y}^2[\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2] = \\ &= \mathbf{y}^2[\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2] \geq 0,\end{aligned}$$

откуда и следует доказываемое неравенство при $\mathbf{y}\neq\mathbf{o}$. При $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ неравенство (2.1) очевидно. □

Следствие 2.1. *Равенство в формуле* (2.1) *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы. Тогда при $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$ имеем $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$ и (2.2) превращается в строгое неравенство, а вместе с ним становится строгим неравенством и (2.1).

Обратно. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно зависимы. Значит, существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору: $\alpha\mathbf{x} + +\beta\mathbf{y} = \mathbf{o}$. Умножая это равенство поочередно на $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, получим систему однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha\mathbf{x}^2 + \beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = 0, \\ \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) + \beta\mathbf{y}^2 = 0. \end{cases}$$

Так как она имеет ненулевое решение относительно α и β, то ее определитель равен нулю: $\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 = 0$. □

Теорема 2.2 (Неравенство Минковского)**.**

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — произвольные векторы евклидова пространства. Тогда в силу неравенства (2.1) и из того, что $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \mathbf{y}^2 \leq \mathbf{x}^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + \mathbf{y}^2 = \\ = |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,\end{aligned}$$

откуда и следует доказываемое неравенство. □

Теорема 2.3.

$$|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{2.4}$$

Доказательство. На основании неравенства Минковского

$$|\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y}| \Longleftrightarrow |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

□

Следствие 2.2.

$$||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из (2.4) сразу следует, что $|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, или $-|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|$. Вместе с (2.4) это дает $-|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, что и требовалось доказать. □

Неравенства (2.3) и (2.5) называются неравенствами треугольника: если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ представляют различные стороны в треугольнике, то неравенства означают, что сторона треугольника не больше суммы и не меньше модуля разности двух его других сторон.

Неравенство Коши-Буняковского позволяет ввести понятие угла между двумя векторами в евклидовом пространстве. Таким углом называется число φ, $0 \le \varphi \le \pi$, удовлетворяющее равенству

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}. \tag{2.6}$$

Неравенство Коши-Буняковского гарантирует, что введенная величина может действительно считаться косинусом некоторого угла, то есть будет выполняться $|\cos\varphi| \le 1$.

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называют ***ортогональными*** и пишут $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, если $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$. Нулевой вектор считается ортогональным любому вектору.

Теорема 2.4. *Только нулевой вектор ортогонален любому вектору.*

Доказательство. Если $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ для любого вектора $\mathbf{y}$, то, взяв $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, получим $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$, что по первой аксиоме скалярного произведения возможно лишь для нулевого вектора. □

Базис в евклидовом пространстве называется ***ортогональным***, если векторы базиса попарно ортогональны.

Теорема 2.5. *Попарно ортогональные и ненулевые векторы линейно независимы.*

Доказательство. Предположим противное: что векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_m$ попарно ортогональны и ненулевые, но линейно зависимы. Тогда найдется их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{o},$$

причем, для определенности пусть $\lambda_1 \ne 0$. Умножим обе части равенства на $\mathbf{x}_1$:

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_1) + \ldots + \lambda_m(\mathbf{x}_m\cdot\mathbf{x}_1) = 0.$$

В силу попарной ортогональности векторов полученное равенство упрощается до $\lambda_1(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1) = 0$. Так как вектор $\mathbf{x}_1$ ненулевой, то $\lambda_1 = 0$, что противоречит предположению. □

Ортогональный базис в евклидовом пространстве называется ***ортонормированным***, если векторы базиса имеют единичную длину. Из только что доказанной теоремы следует, что ортонормированный базис состоит из линейно независимых векторов.

Пусть $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ — базис евклидова пространства и пусть в этом базисе $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n) \cdot (y_1\mathbf{e}_1 + \cdots y_n\mathbf{e}_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j). \tag{2.7}$$

Если базис $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ ортонормированный, то $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ $(i \neq j)$, а $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$, и поэтому формула (2.7) становится такой:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \tag{2.8}$$

В матричной форме формулу (2.8) можно записать как $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{x}]^T[\mathbf{y}]$.

Пример 2.1. *В линейном пространстве $\mathbf{R}^n$ в качестве скалярного произведения векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ принимают величину $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.*

Решение. Нетрудно проверить, что эта величина удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. В ортонормированном базисе (1.8) она вычисляется по формуле, совпадающей с формулой (2.8). □

Пример 2.2. *В пространстве многочленов степени не выше n-ой скалярное произведение многочленов $\mathbf{x} = P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ и $\mathbf{y} = Q_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$ можно определить так:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n. \tag{2.9}$$

Решение. Выполнение аксиом скалярного произведения так же очевидно, как и в предыдущем примере. В ортонормированном базисе $< 1, t, t^2, \ldots, t^n >$ вычисление скалярного произведения фактически производится по формуле (2.9). □

Пример 2.3. *В пространстве всех многочленов в качестве скалярного произведения многочленов $\mathbf{x} = P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ и $\mathbf{y} = Q_m(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_m t^m$ можно принять величину*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_k b_k,$$

где $k = \min(n, m)$.

Пример 2.4. *В пространстве матриц размера $m \times n$ скалярное произведение двух матриц $\mathbf{x} = \{a\}_{ij}$ и $\mathbf{y} = \{b\}_{ij}$ задается формулой*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}. \tag{2.10}$$

Решение. И в этом примере очевидно выполнение аксиом скалярного произведения. Отметим, что скалярное произведение матриц (умножаются соответствующие элементы матриц) отличается от обычного произведения матриц. Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе

$$< \mathbf{A}_{11}, \dots, \mathbf{A}_{1n}, \mathbf{A}_{21}, \dots, \mathbf{A}_{2n}, \dots, \mathbf{A}_{m1}, \dots, \mathbf{A}_{mn} >$$

совпадает с формулой (2.10). □

В евклидовом аффинном пространстве можно говорить об углах между прямыми и гиперплоскостями, их параллельности или перпендикулярности.

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейного пространства называют ***коллинеарными*** и пишут $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$, если они линейно зависимы. Очевидно, нулевой вектор коллинеарен любому вектору. В частности, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ненулевые, найдется число $\lambda \neq 0$ такое, что $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$. Если пространство n-мерно, то компоненты коллинеарных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ пропорциональны:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}, \tag{2.11}$$

причем, если $x_i = y_i = 0$, то i-е отношение отбрасывают, а, если $x_i \neq 0$, $y_i = 0$, считают, что пропорция не выполняется (то есть в этом случае $\mathbf{x} \nparallel \mathbf{y}$).

Углом между прямыми

$$l_1 : \frac{x_1 - x_1^1}{a_0} = \dots = \frac{x_n - x_n^1}{a_n}, \tag{2.12}$$

$$l_2 : \frac{x_1 - x_1^2}{b_0} = \dots = \frac{x_n - x_n^2}{b_n}$$

называется угол между их направляющими векторами $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$; параллельность и перпендикулярность прямых также определяются соответствующими понятиями для их нормалей:

$$\cos \widehat{l_1, l_2} = \cos \widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|},$$

$$l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = 0.$$

Точно так же ***углом между гиперплоскостями***

$$p_1 : A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + A = 0 \tag{2.13}$$

$$p_2 : B_1 x_1 + \cdots + B_n x_n + B = 0$$

называется угол между их нормалями $\mathbf{n}_1 = (A_1, \ldots, A_n)$ и $\mathbf{n}_2 = (B_1, \ldots, B_n)$; гиперплоскости параллельны или перпендикулярны, если их нормали соответственно коллинеарны или ортогональны:

$$\cos \widehat{p_1, p_2} = \cos \widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2} = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|},$$

$$p_1 \parallel p_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_n}{B_n},$$

$$p_1 \perp p_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n = 0.$$

Уравнение гиперплоскости (2.13) можно записать в виде, который называется ***векторным уравнением гиперплоскости***:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} + A = 0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Расстояние от точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ до гиперплоскости (2.13) находится по формуле

$$d = \frac{|A_1 x_1^0 + \cdots + A_n x_n^0 + A|}{\sqrt{A_1^2 + \cdots + A_n^2}}. \tag{2.14}$$

Углом между прямой (2.12) и гиперплоскостью (2.13) называется число φ, $0 \le \varphi \le \pi/2$, удовлетворяющее равенству

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{a}||\mathbf{n}_1|}.$$

Пример 2.5. *Будут ли ортогональны векторы* $\mathbf{x} = (1, 0, 3, -2, 1)$ *и* $\mathbf{y} = (-3, 1, 2, 0, -4)$ *в пространстве* $\mathbf{R}^5$*?*

Решение. Найдем скалярное произведение этих векторов по формуле (2.8):

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 1\cdot(-3) + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-4) = -1 \neq 0.$$

Так как скалярное произведение не равно нулю, то векторы не ортогональны. □

Пример 2.6. *Проверить коллинеарность векторов* $\mathbf{x} = 9t - 6t^2 + 15t^3$ *и* $\mathbf{y} = 6t - 4t^2 + 10t^3$ *в пространстве многочленов степени не выше третьей.*

Решение. Используем формулу (2.11):

$$\frac{0}{0} = \frac{9}{6} = \frac{-6}{-4} = \frac{15}{10}.$$

Пропорция выполняется (все отношения, кроме первого, равны 1,5, а первое можно отбросить), значит, векторы-многочлены коллинеарны. □

Пример 2.7. *Найти угол между векторами*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

в пространстве матриц размера 2×2.

Решение. Вычислим скалярное произведение векторов по формуле (2.10):

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1) - 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 1\cdot 5 =$$
$$= -1 - 8 + 6 + 5 = 2.$$

Найдем длины векторов:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} =$$
$$= \sqrt{1\cdot 1 - 2\cdot(-2) + 3\cdot 3 + 1\cdot 1)} = \sqrt{15},$$
$$|\mathbf{y}| = \sqrt{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}} =$$
$$= \sqrt{-1\cdot(-1) + 4\cdot 4 + 2\cdot 2 + 5\cdot 5} = \sqrt{46}.$$

Остается применить формулу (2.6):

$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{15}\sqrt{46}} \approx 0,076139;$$
$$\varphi \approx 85^\circ 38'.$$

□

Пример 2.8. *Найти расстояние от точки* $M_0(0;-1;2;3;0;-3)$ *до гиперплоскости* $2x_1 + 4x_2 - x_5 + 3x_6 + 1 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.14):

$$d = \frac{|2\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + 3^2}} =$$
$$= \frac{12}{\sqrt{30}} \approx 2{,}19.$$

□

3 Линейные операторы

3.1 Линейный оператор и его матрица

Как в математике, так и в технических науках часто возникает необходимость преобразовать линейное пространство: повернуть, сдвинуть, сжать и т.п. Эти действия выполняют специальные объекты, действующие в линейном пространстве, называемые операторами или преобразованиями.

Оператором (преобразованием) $\mathcal{A}$, действующим в линейном пространстве $\mathcal{L}$, называется правило, по которому каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие определенный вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$. Вектор $\mathbf{y}$ называется ***образом*** вектора $\mathbf{x}$, а вектор $\mathbf{x}$ — ***прообразом*** вектора $\mathbf{y}$ для оператора $\mathcal{L}$. Связь между образом и прообразом записывается в виде: $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$.

Оператор $\mathcal{A}$ называется ***линейным***, если он обладает свойством

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{y}$$

(линейный оператор от линейной комбинации векторов равен линейной комбинации их образов), которое называется ***свойством линейности***. Из этого свойства при $\alpha = 1$, $\beta = 1$ следует, что линейный оператор от суммы векторов равен сумме их образов, а при $\beta = 0$ получаем, что постоянный множитель можно выносить за знак оператора. Далее рассматриваются только линейные операторы.

Оператор называется ***тождественным*** и обозначается $\mathcal{E}$, если он не изменяет вектор: $\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Нулевым называется оператор $\mathcal{O}$, который любой вектор преобразует в нулевой: $\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Пусть в n-мерном линейном пространстве с базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ действует линейный оператор $\mathcal{A}$. Обозначим образы базисных векторов для оператора $\mathcal{A}$ волной: $\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{A}\mathbf{e}_1$,...,$\widetilde{\mathbf{e}}_n = \mathcal{A}\mathbf{e}_n$, а их разложения по векторам базиса следующим образом:

$$\widetilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i, \; j = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Пусть $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$, причем,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i. \tag{3.3}$$

Используя свойство линейности оператора $\mathcal{A}$ и разложения (3.1) и (3.2), можно получить еще одно разложение вектора $\mathbf{y}$ по базису:

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathcal{A}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \widetilde{\mathbf{e}}_j = \tag{3.4}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}\, \mathbf{e}_i.$$

Фигурной скобкой обведен коэффициент этого разложения. Однако разложение любого вектора по базису единственно и поэтому, сравнивая формулы (3.3) и (3.4), приходим к выводу, что

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Введем матрицу $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ и с помощью произведения матриц запишем последнее равенство в матричной форме:

$$[\mathbf{y}] = \mathbf{A}[\mathbf{x}]. \tag{3.5}$$

Таким образом, в данном базисе матрица $\mathbf{A}$ выполняет над вектором $\mathbf{x}$ такое же действие, что и оператор $\mathcal{A}$, так как их результатом является вектор $\mathbf{y}$. Матрица $\mathbf{A}$ называется ***матрицей линейного оператора*** (в базисе $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$). Ее столбцами, как это видно из формулы (3.1), являются образы базисных векторов в координатной форме. Отметим, что действие оператора на вектор никак не связано с базисом линейного пространства, например, это действие можно описать словами: <заменить вектор $\mathbf{x}$ противоположным ему вектором>. В то же время матрица линейного оператора тесно связана с базисом: в различных базисах один и тот же линейный оператор может представляться различными своими матрицами.

Нетрудно видеть, что тождественному оператору соответствует единичная матрица, а нулевому — нулевая.

Формулу (3.1) с использованием операции умножения матриц можно записать в виде

$$[\widetilde{\mathbf{e}}] = \mathbf{A}^T[\mathbf{e}]. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Матрица линейного оператора в данном базисе определена однозначно.*

Доказательство. Пусть в данном базисе n-го пространства линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет две матрицы: $\mathbf{A}$ и $\widetilde{\mathbf{A}}$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется $\mathbf{A}[\mathbf{x}] = \widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{x}]$, или $(\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}})[\mathbf{x}] = [\mathbf{o}]$. Будем подставлять в это равенство векторы (1.8). Эти подстановки поочередно покажут, что столбцы матрицы $\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}}$ состоят из нулей. Следовательно, $\mathbf{A} - \widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{O}$ и, значит, $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}}$. □

Теорема 3.2. *Каждая квадратная матрица размера n может рассматриваться как матрица некоторого линейного оператора.*

Доказательство. Пусть задана матрица квадратная матрица $\mathbf{A}$ размера n. Выберем некоторое n-мерное пространство с базисом $\mathbf{e} = <\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n>$. Обозначим через $\mathcal{A}$ линейный оператор со следующим действием: $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}$. Очевидно, такой оператор будет линейным, так как

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}) = \mathbf{A}(\alpha[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} + \beta[\mathbf{z}]_{\mathbf{e}}) = \alpha\mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} + \beta\mathbf{A}[\mathbf{z}]_{\mathbf{e}} = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{z}$$

для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$. □

Пример 3.1. *В пространстве $\mathbf{R^2}$ линейный оператор $\mathcal{A}$ каждый вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ преобразует следующим образом:*

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2).$$

Найти матрицу этого оператора в базисах

$$\mathbf{e} =< \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 >,\ \mathbf{e}_1 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1) \tag{3.7}$$

и

$$\widetilde{\mathbf{e}} =< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2 >,\ \widetilde{\mathbf{e}}_1 = (0, 1),\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = (1, 0). \tag{3.8}$$

Решение. Найдем образы базисных векторов в первом базисе:

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \mathcal{A}(1,0) = (1-0,0) = (1,0) = \mathbf{e}_1,$$
$$\mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \mathcal{A}(0,1) = (0-1,1) = (-1,1) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Значит, матрица оператора в первом базисе имеет вид

$$\mathbf{A} = (\mathcal{A}\mathbf{e}_1\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находим матрицу оператора во втором базисе:

$$\mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{A}(0,1) = (-1,1) = \widetilde{\mathbf{e}}_1 - \widetilde{\mathbf{e}}_2,\ \mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_2 = \mathcal{A}(1,0) = (1,0) = \widetilde{\mathbf{e}}_2,$$
$$\widetilde{\mathbf{A}} = (\mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_1\ \mathcal{A}\widetilde{\mathbf{e}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видно, что в различных базисах матрицы линейного оператора различны. В первом базисе вектор $\mathbf{x}$ имеет разложение $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Тогда

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 - x_2, x_2),$$

то есть умножение матрицы линейного оператора на вектор производит с ним то же действие, что и сам оператор. Убедитесь самостоятельно, что во втором базисе умножение $\widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$ выполняет то же действие. $\square$

Пример 3.2. *Пусть оператор $\mathcal{A}$ выполняет поворот обычной плоскости xOy, рассматриваемой как пространство $\mathbf{R}^2$, на угол φ против часовой стрелки. Таким образом, каждый вектор этого пространства будет повернут на угол φ. Найти матрицу этого оператора в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1 = (1;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1)$.*

Доказательство. Данный оператор линеен, так как все равно: повернуть ли сначала векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а затем построить линейную комбинацию повернутых векторов, или сначала построить линейную комбинацию векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а затем повернуть ее на угол φ (см рис. 3.1). Найдем образы векторов базиса. Эти образы являются единичными векторами $\widetilde{\mathbf{e}}_1$, $\widetilde{\mathbf{e}}_2$, полученными поворотом на угол φ против часовой стрелки векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ (см. рис. 3.2). Из рисунка видно, что $\widetilde{\mathbf{e}}_1$, $\widetilde{\mathbf{e}}_2$ имеют следующие координаты в заданном базисе:

$$\widetilde{\mathbf{e}}_1 = \mathcal{A}\mathbf{e}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \widetilde{\mathbf{e}}_2 = \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \tag{3.9}$$

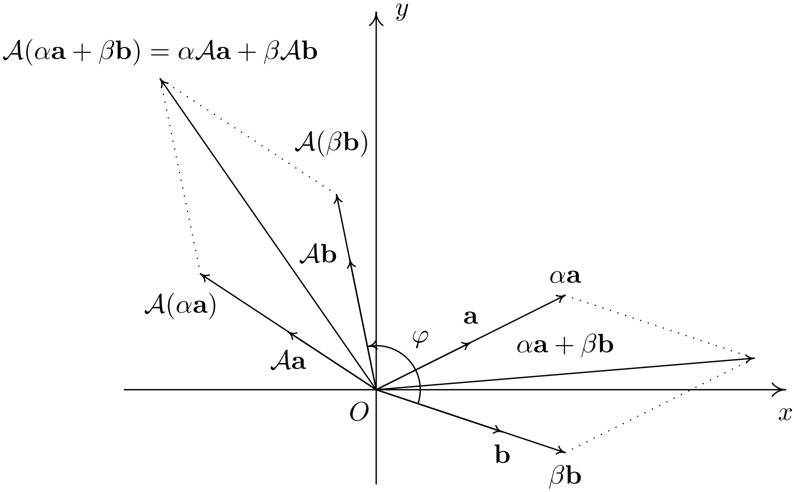

Рис. 3.1: Поворот на угол φ

следовательно, матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

С помощью этой матрицы поворот любого вектора $\mathbf{x}=(x,y)$ (а, значит, и радиус-вектора, а, значит, и любой точки) на угол φ можно выполнить по формуле (3.5):

$$[\mathbf{y}]=\begin{pmatrix}\widetilde{x}\\ \widetilde{y}\end{pmatrix}=\mathbf{A}^T[\mathbf{x}]=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}x\cos\varphi+y\sin\varphi\\ -x\sin\varphi+y\cos\varphi\end{pmatrix},$$

или в координатной форме:

$$\widetilde{x}=x\cos\varphi+y\sin\varphi,$$
$$\widetilde{y}=-x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

□

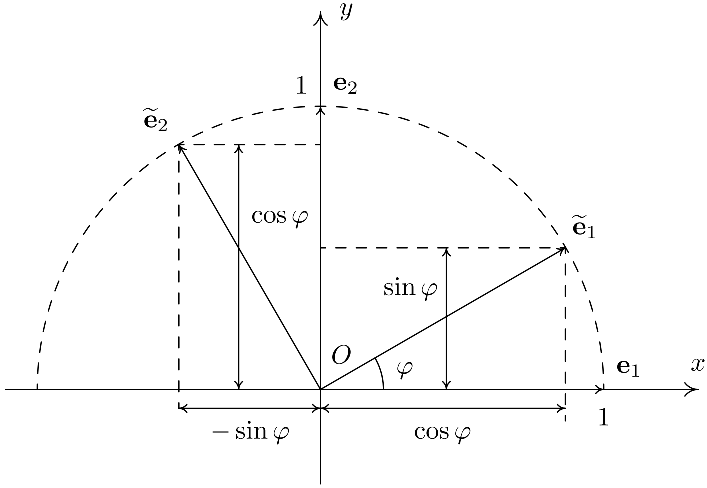

Рис. 3.2: Поворот базиса

Пример 3.3. *Оператор $\mathcal{A}$, действуя на вектор $\mathbf{x}$ обычной декартовой плоскости, рассматриваемой как пространство $\mathbf{R}^2$, зеркально отражает его относительно прямой l с направляющим вектором $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $|\mathbf{s}| = 1$. Проверить линейность этого оператора и найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 1)$.*

Решение. На рис. 3.3 видно, что сумма вектора $\mathbf{x}$ и его образа $\mathbf{y}$ при таком действии оператора лежит на прямой l, относительно которой происходит зеркальное отражение, и длина суммы в два раза больше проекции вектора $\mathbf{x}$ на эту прямую. Алгебраически этот факт можно записать так: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}$. Отсюда можно найти образ $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{x}$. Оператор $\mathcal{A}$ линеен, так как

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}) &= 2[(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}) \cdot \mathbf{s}]\mathbf{s} - \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{z} = \\
&= 2(\alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} + \beta\mathbf{z} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{z} = \\
&= \alpha[2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{x}] + \beta[2(\mathbf{z} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{z}] = \alpha\mathcal{A}\mathbf{x} + \beta\mathcal{A}\mathbf{z}.
\end{aligned}$$

В координатной форме действие оператора записывается следующим

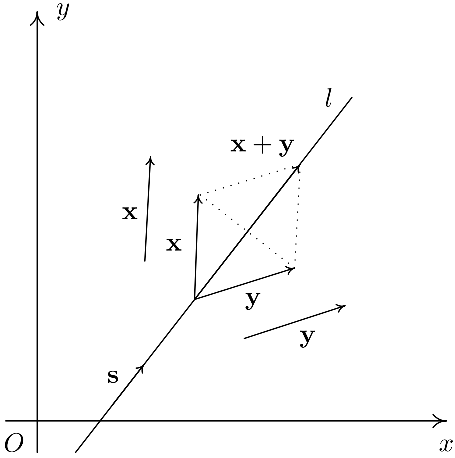

Рис. 3.3: Зеркальное отражение

образом ($\mathbf{x} = (x, y), \mathbf{y} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$):

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= (\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}(x, y) = \\ &= 2[(x, y) \cdot (s_1, s_2)](s_1, s_2) - (x, y) = (2xs_1 + 2ys_2)(s_1, s_2) - (x, y) = \\ &= (2xs_1^2 + 2ys_1s_2 - x, 2xs_1s_2 + 2ys_2^2 - y).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Применяя эту формулу к векторам $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, получаем

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \mathcal{A}(1, 0) = (2s_1^2 - 1, 2s_1s_2),\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \mathcal{A}(0, 1) = (2s_1s_2, 2s_2^2 - 1). \tag{3.11}$$

Значит, матрица данного линейного оператора имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2s_1^2 - 1 & 2s_1s_2 \\ 2s_1s_2 & 2s_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Пример 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ называется* ***гомотетией*** *с коэффициентом λ, если для любого вектора $\mathbf{x}$ линейного пространства $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, ($\lambda \neq 0$). Гомотетия называется также растяжением ($\lambda > 1$) или сжатием ($0 < \lambda < 1$). Проверить линейность этого оператора в n-мерном пространстве и найти его матрицу в базисе (1.8).*

3.1. Линейный оператор и его матрица

Решение. Линейность оператора гомотетии следует из выполнения свойства

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\lambda(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha(\lambda\mathbf{x})+\beta(\lambda\mathbf{y})=\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}+\beta\mathcal{A}\mathbf{y}.$$

Образы базисных векторов имеют вид

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_1=\lambda\mathbf{e}_1=(\lambda,0,\ldots,0),\ \mathcal{A}\mathbf{e}_2=\lambda\mathbf{e}_2=(0,\lambda,\ldots,0),\ \ldots\ ,$$
$$\mathcal{A}\mathbf{e}_n=\lambda\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,\lambda),$$

поэтому матрица такого оператора в требуемом базисе получается диагональной:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ldots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}.$$

□

3.2 Действия с операторами

Оказывается, не только линейные операторы выполняют действия, но и над ними тоже можно выполнять действия.

Пусть операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ действуют в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Тогда их ***суммой*** называют оператор, обозначаемый $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и равный сумме действий операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{x}=\mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{B}\mathbf{x}.$$

Произведением оператора $\mathcal{A}$ на число λ, называется оператор $\lambda\mathcal{A}$, умножающий образ вектора $\mathbf{x}$ на число λ:

$$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x}=\lambda(\mathcal{A}\mathbf{x}).$$

Нетрудно убедиться в линейности обоих операторов. Множество линейных операторов с введенными операциями сложения операторов и умножения оператора на число само является линейным пространством. Действительно, нулевой оператор $\mathcal{O}$, который может считаться нулевым вектором в пространстве линейных операторов, уже был введен в предыдущем п. Оператором, противоположным оператору $\mathcal{A}$, будем считать оператор $-\mathcal{A}=(-1)\mathcal{A}$. Тогда аксиомы линейного пространства, введенные в разделе 1.1, будут в терминах операторов выглядеть так:

1. $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$.
2. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$.
3. $\exists(\mathcal{O})\forall(\mathcal{A})\ \mathcal{A}+\mathcal{O}=\mathcal{A}$.
4. $\forall(\mathcal{A})\exists(-\mathcal{A})\ \mathcal{A}+(-\mathcal{A})=\mathcal{O}$.
5. $1\cdot\mathcal{A}=\mathcal{A}$.
6. $\lambda(\mu\mathcal{A})=(\lambda\mu)\mathcal{A}$.
7. $\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\lambda\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}$.
8. $(\lambda+\mu)\mathcal{A}=\lambda\mathcal{A}+\mu\mathcal{A}$.

Самостоятельно проверьте, что все они выполняются. Если пространство $\mathcal{L}$ n-мерно, то пространство линейных операторов имеет размерность n^2.

Если $\mathcal{A}\mathbf{x}=\mathbf{o}$ только для вектора $\mathbf{x}=\mathbf{o}$, то оператор $\mathcal{A}$ называется ***невырожденным***; в противном случае он называется ***вырожденным***. Определитель матрицы $\mathbf{A}$ невырожденного оператора отличен от нуля, иначе система уравнений $\mathbf{A}[\mathbf{x}]=\mathbf{o}$ будет иметь и ненулевые решения.

В следующей таблице, кроме рассмотренных, показаны и другие часто используемые операторы и действия над ними. Для n-мерного пространства приведены и матрицы операторов, причем, операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют, соответственно, матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Последние три оператора действуют в евклидовом пространстве, а сведения об их матрицах справедливы только для ортонормированных базисов.

Отметим, что для каждого оператора существует единственный сопряженный ему оператор, а для каждого невырожденного оператора существует обратный ему оператор. Например, ортогональный оператор является невырожденным.

Пример 3.5. *Пусть плоскость xOy сначала поворачивается на угол φ (оператор $\mathcal{A}$), а затем над ней производится гомотетия с коэффициентом λ (оператор $\mathcal{B}$). Найти линейный оператор, выполняющий перечисленные действия в указанном порядке.*

Решение. Оператор, реализующий заданную последовательность действий, является произведением операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$: $(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})\mathbf{x}=\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x})$ (см. табл.).

3.2. Действия с операторами

Название оператора	**Обозна-чение**	**Определяющее свойство**	**Матрица**
Тождественный оператор	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$	$\mathbf{E}$
Нулевой оператор	$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{o}$	$\mathbf{O}$
Сумма операторов	$\mathcal{A} + \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}$	$\mathbf{A} + \mathbf{B}$
Произведение оператора на число	$\lambda\mathcal{A}$	$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x})$	$\lambda\mathbf{A}$
Произведение операторов	$\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$	$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\mathbf{x} = \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x})$	$\mathbf{BA}$
Обратный оператор	$\mathcal{A}^{-1}$	$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$	$\mathbf{A}^{-1}$
Оператор, сопряженный оператору $\mathcal{A}$	$\mathcal{A}^*$	$\mathcal{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}^*\mathbf{y}$	$\mathbf{A}^T$
Самосопряженный оператор	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
Ортогональный оператор	$\mathcal{A}$	$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$	$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Важно то, что полученные в примерах 3.2 и 3.4 матрицы операторов позволяют найти и матрицу $\mathbf{C}$ искомого оператора:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cos\varphi & -\lambda\sin\varphi \\ \lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda\mathbf{A}.$$

Используя эту матрицу, можно находить результат преобразования сразу, а не поочередно применяя поворот и гомотетию. □

Поскольку ортогональный оператор является одним из самых важных операторов, действующих в евклидовом пространстве, рассмотрим некоторые его свойства.

Лемма 3.1. *Если в евклидовом пространстве для всех векторов* $\mathbf{x}$ *выполняется* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$, *то* $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Доказательство. Если $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{z}) = 0$. Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{y}-\mathbf{z}$, тогда $(\mathbf{y}-\mathbf{z})\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{z}) = 0$. По первой аксиоме евклидова пространства это возможно только в случае, если $\mathbf{y}-\mathbf{z} = \mathbf{o}$, то есть, когда $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. □

Теорема 3.3. *Оператор $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение векторов: $\mathcal{A}\mathbf{x}\cdot\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда он ортогонален.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение векторов. Тогда

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}\cdot\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A})\mathbf{y}.$$

Из леммы сразу получаем, что $\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Значит, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ и поэтому оператор $\mathcal{A}$ ортогонален.

Пусть теперь оператор $\mathcal{A}$ ортогонален. Используя определения сопряженного и ортогонального операторов, получаем

$$\mathcal{A}\mathbf{x}\cdot\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(\mathcal{A}^*\circ\mathcal{A})\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(\mathcal{A}^{-1}\circ\mathcal{A})\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathcal{E}\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.$$

□

Следствие 3.1. *Ортогональный оператор сохраняет длины векторов, а в евклидовом аффинном пространстве — расстояние между точками.*

Следствие 3.2. *В евклидовом аффинном пространстве ортогональный оператор сохраняет углы между прямыми и гиперплоскостями, а, значит, их параллельность и перпендикулярность.*

Следствие 3.3. *Ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный.*

Доказательство. Пусть $<\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n>$ — ортонормированный базис, а $<\widetilde{\mathbf{e}}_1,\ldots,\widetilde{\mathbf{e}}_n>$ — набор векторов, в который этот базис переводится ортогональным оператором. Из предыдущих следствий получаем, что векторы $\widetilde{\mathbf{e}}_1,\ldots,\widetilde{\mathbf{e}}_n$ ортогональны и имеют единичную длину, а тогда из теорем 2.5 и 1.8 вытекает, что $<\widetilde{\mathbf{e}}_1,\ldots,\widetilde{\mathbf{e}}_n>$ — ортонормированный базис. □

Матрица ортогонального оператора, как это указано в таблице операторов, обладает свойством $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Такая матрица называется ***ортогональной***.

Теорема 3.4. *Если оператор $\mathcal{A}$ переводит хоть один ортонормированный базис $<\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n>$ в ортонормированный базис $<\widetilde{\mathbf{e}}_1,\ldots,\widetilde{\mathbf{e}}_n>$, то такой оператор ортогонален.*

3.2. Действия с операторами

Доказательство. Обозначим

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

В силу ортонормированности базисов $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\widetilde{\mathbf{e}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$. Поэтому

$$\widetilde{\mathbf{e}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{e}}_j = \mathcal{A}\mathbf{e}_i \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Из этого равенства вычтем равенство $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0;\ i = \overline{1,n}; \\ \mathbf{e}_i \cdot ((\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j) = 0;\ i = \overline{1,n}; \\ \mathbf{e}_i \cdot (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j = 0;\ i = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Если хотя бы для одного j выполняется $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j \neq \mathbf{o}$, то из (3.12) следует, что вектор $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j$ ортогонален n векторам $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. Тогда в силу теоремы 2.5 получаем, что в n-мерном пространстве существует базис из $(n+1)$-го вектора: $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j$. Поскольку такое невозможно, то все векторы $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_j$, $j = \overline{1,n}$, нулевые. Но тогда и оператор $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E}$ тоже нулевой. Действительно, для любого вектора $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ будет выполняться

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{x} = (\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = \\ = x_1(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{e}_n = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Но, если $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$, то $\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$, что и требовалось доказать. □

Теорема 3.5. *Определитель матрицы ортогонального оператора равен* ± 1.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица ортогонального оператора. Тогда, как указано в таблице операторов, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Если умножить обе части этого равенства на $\mathbf{A}$ слева, получим $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$. Учитывая, что $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$, $|\mathbf{E}| = 1$, приходим к уравнению $|\mathbf{A}|^2 = 1$. Это и означает, что $|\mathbf{A}| = \pm 1$. □

Пример 3.6. *В примере 3.2 было показано, что поворот плоскости на угол φ является линейным оператором и преобразует ортонормированный базис $\mathbf{e}_1 = (1; 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 1)$ в ортонормированный базис (3.9). Поэтому поворот является ортогональным оператором.*

3.2. Действия с операторами

Пример 3.7. *В примере 3.3 линейный оператор осевой симметрии на плоскости переводил ортонормированный базис* $\mathbf{e}_1 = (1;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1)$ *в ортонормированный базис* (3.11)*. Ортонормированность последнего следует из того, что*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{e}_1 \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_2 &= (2s_1^2 - 1, 2s_1s_2) \cdot (2s_1s_2, 2s_2^2 - 1) = \\
&= 4s_1^3s_2 - 2s_1s_2 + 4s_1s_2^3 - 2s_1s_2 = 4s_1s_2(s_1^2 + s_2^2 - 1) = 0, \\
|\mathcal{A}\mathbf{e}_1| &= (2s_1^2 - 1)^2 + (2s_1s_2)^2 = 4s_1^4 - 4s_1^2 + 1 + 4s_1^2s_2^2 = \\
&= 4s_1^2(s_1^2 + s_2^2 - 1) + 1 = 1, \\
|\mathcal{A}\mathbf{e}_2| &= (2s_1s_2)^2 + (2s_2^2 - 1)^2 = 4s_1^2s_2^2 + 4s_2^4 - 4s_2^2 + 1 = \\
&= 4s_2^2(s_1^2 + s_2^2 - 1) + 1 = 1,
\end{aligned}$$

потому что для единичного вектора (s_1, s_2) *выполняется* $s_1^2 + s_2^2 = 1$. *Следовательно, оператор симметрии тоже ортогонален.*

Пример 3.8. *В примере 3.4 оператор* $\mathcal{A}$ *не ортогонален, потому что он переводит ортонормированный базис* (1.8) *только в ортогональный базис, но не в ортонормированный (длины новых базисных векторов в общем случае равны* $|\lambda|$*, а не 1).*

Следующая теорема показывает, что любой ортогональный оператор на плоскости сводится к уже рассмотренным операторам поворота и осевой симметрии.

Теорема 3.6. *Ортогональный оператор на плоскости — это либо поворот вокруг начала координат на некоторый угол, либо зеркальное отражение относительно некоторой прямой.*

3.3 Переход к новому базису

Пусть в n-мерном пространстве невырожденный линейный оператор $\mathcal{S}$ переводит базис $\mathbf{e} =< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ в базис $\widetilde{\mathbf{e}} =< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$. Первый базис условно будем называть старым, а второй — новым. Пусть вектор $\mathbf{x}$ в старом базисе имеет представление $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = [\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}^T[\mathbf{e}]$. Какие компоненты $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$ этот вектор будет иметь в новом базисе? Обозначим через $\mathbf{S}$, $|\mathbf{S}| \neq 0$, матрицу оператора $\mathcal{S}$ в старом базисе и применим формулу (3.6): $[\widetilde{\mathbf{e}}] = \mathbf{S}^T[\mathbf{e}]$. Получим

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T[\widetilde{\mathbf{e}}] = [\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T\mathbf{S}^T[\mathbf{e}] = (\mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}})^T\mathbf{e}, \tag{3.13}$$

где $[\mathbf{x}]^T_{\widetilde{\mathbf{e}}} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ — представление вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе. Сравнивая формулу (3.13) с разложением $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]^T_{\mathbf{e}}[\mathbf{e}]$ и, учитывая однозначность разложения вектора по базису, приходим к выводу, что

$$[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}. \tag{3.14}$$

Эта формула называется ***переходом от новых компонент вектора к старым***. Обратный переход получим, если умножим обе части последнего равенства на матрицу $\mathbf{S}^{-1}$, обратную матрице $\mathbf{S}$:

$$[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{S}^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}. \tag{3.15}$$

Пример 3.9. *Для примера 3.1, найти компоненты вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* (3.8)*, если в базисе* (3.7) *он имеет представление* $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Решение. Сначала найдем матрицу оператора, переводящего базис (3.7) в базис (3.8). Очевидно, столбцами такой матрицы являются векторы базиса (3.8):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрицей, обратной к матрице $\mathbf{S}$, будет она сама и поэтому по формуле (3.15), находим координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе:

$$[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, переход к новому базису означает просто перестановку компонент вектора. □

Теперь дополнительно предположим, что в n-мерном пространстве, кроме оператора $\mathcal{S}$, действует оператор $\mathcal{A}$, имеющий матрицу $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e}$. Изучим, как изменится эта матрица при переходе к базису $\widetilde{\mathbf{e}}$. Пусть $\mathbf{y}$ — образ вектора $\mathbf{x}$ для оператора $\mathcal{A}$: $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$. В силу формулы (3.14) $[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$, $[\mathbf{y}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{S}[\mathbf{y}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$ и поэтому

$$\mathbf{S}[\mathbf{y}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = [\mathbf{y}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}} = \mathbf{AS}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}.$$

Умножая обе части этого равенства слева на $\mathbf{S}^{-1}$, находим, что $[\mathbf{y}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}$. Следовательно,

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} \tag{3.16}$$

есть матрица оператора $\mathcal{A}$ в новом базисе (см. теорему 3.1).

Пример 3.10. *Для примера 3.1 найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе* (3.8).

Решение. В предыдущем примере матрица $\mathbf{S}$ перехода от старого к новому базису была найдена и оказалось равной своей обратной матрице. Поэтому

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим эту матрицу на вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = [\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}}^T = (x_2, x_1)^T$:

$$\widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{x}]_{\widetilde{\mathbf{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= x_2\widetilde{\mathbf{e}}_1 + (x_1 - x_2)\widetilde{\mathbf{e}}_2 = (x_1 - x_2, x_2).$$

□

3.4 Линейные подпространства и СЛАУ

Непустое множество $\mathcal{L}'$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ называется ***линейным подпространством***, если любая линейная комбинация векторов из $\mathcal{L}'$ принадлежит $\mathcal{L}'$. Нетрудно заметить, что нулевой вектор как произведение $0\mathbf{x}$ принадлежит $\mathcal{L}'$, и вектор, противоположный вектору $\mathbf{x}$, как произведение $(-1)\mathbf{x}$ тоже принадлежит $\mathcal{L}'$. Поэтому все аксиомы линейного пространства для $\mathcal{L}'$ выполняются и, значит, линейное подпространство само является линейным пространством.

Ясно, что размерность подпространства не превосходит размерности самого пространства, так как векторы, линейно независимые в подпространстве, останутся таковыми и во всем пространстве.

Пример 3.11. *В обычном пространстве все прямые и плоскости, проходящие через начало координат, являются линейными подпространствами. В пространстве многочленов степени не выше n линейные подпространства образуют многочлены степени не выше k $(k < n)$.*

Рассмотрим теперь решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с точки зрения теории линейных пространств. Пусть имеется однородная СЛАУ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

которую можно записать кратко в матричной форме как

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}, \tag{3.18}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.7. *Если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — решения однородной СЛАУ (3.17), то их линейная комбинация $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ тоже будет решением этой СЛАУ.*

Доказательство. Для доказательства достаточно подставить указанную линейную комбинацию в левую часть уравнения (3.18):

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \alpha\mathbf{o} + \beta\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$

□

Таким образом, решения однородной СЛАУ образуют линейное пространство (выполнение аксиом линейного пространства следует из их выполнения для n-ок чисел и того, что $\mathbf{o}$ и $-\mathbf{x}$ являются решениями однородной СЛАУ, если $\mathbf{x}$ является таким решением).

Определим размерность этого пространства.

Теорема 3.8. *Если ранг матрицы системы равен r, то система имеет $n - r$ линейно-независимых решений.*

Доказательство. Как известно, с помощью элементарных преобразований матрицу системы (3.17) можно привести к ступенчатому виду ($c_{11} \neq$ $\neq 0,\ldots,c_{rr} \neq 0$):

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & c_{1r+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2r} & c_{2r+1} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & c_{rr} & c_{rr+1} & \ldots & c_{rn} \end{pmatrix},$$

которому соответствует СЛАУ, эквивалентная системе (3.17):

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1r}x'_r & + & c_{1r+1}x'_{r+1} + \ldots + c_{1n}x'_n = 0, \\ c_{22}x'_2 + \ldots + c_{2r}x'_r & + & c_{2r+1}x'_{r+1} + \ldots + c_{2n}x'_n = 0, \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ c_{rr}x'_r & + & c_{rr+1}x'_{r+1} + \ldots + c_{rn}x'_n = 0. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

Неизвестные $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ называют ***свободными неизвестными***, а неизвестные $x'_1, \ldots x'_r$ — ***базисными***. Запишем $n-r$ решений системы (3.19), выбрав свободные неизвестные так, чтобы $x'_{r+i} = 1$ в решении $\mathbf{x}_i$, а в остальных решениях, чтобы $x'_{r+i} = 0$. Базисные неизвестные найдем по свободным, применив обратный ход метода Гаусса к системе (3.19):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \ldots \\ x_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ \ldots \\ x_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \mathbf{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r1} \\ \ldots \\ x_{n-rr} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Эти решения линейно независимы, ибо, если $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_{n-r}\mathbf{e}_{n-r} = \mathbf{o}$, то, используя последние $n-r$ компонент векторов, получим $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$. □

Любая система из $n-r$ линейно-независимых решений однородной системы (3.17) называется ее ***фундаментальной системой решений***.

Теорема 3.9. *Упорядоченная система решений (3.20) однородной СЛАУ с матрицей системы ранга r является базисом линейного пространства решений этой СЛАУ.*

Доказательство. Линейная независимость решений (3.20) была показана в предыдущей теореме.

Пусть

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— произвольное решение системы (3.17). Рассмотрим вектор-столбец

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - x_{r+1}\mathbf{e}_1 - \ldots - x_n\mathbf{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} x_{r+1}x_{11} \\ \ldots \\ x_{r+1}x_{1r} \\ x_{r+1} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{r+2}x_{21} \\ \ldots \\ x_{r+2}x_{2r} \\ 0 \\ x_{r+2} \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} - \cdots - \begin{pmatrix} x_n x_{n-r1} \\ \ldots \\ x_n x_{n-rr} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

Так как $\mathbf{y}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}, \mathbf{e}_1$, ...,$\mathbf{e}_{n-r}$, то $\mathbf{y}$ будет решением системы (3.17), а, значит, и системы (3.19). Подставляя в последнюю систему компоненты этого решения $x'_1 = y_1$, ..., $x'_r = y_r$, $x'_{r+1} = 0$, ..., $x'_n = 0$, получим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1r}y_r = 0, \\ \qquad\qquad c_{22}y_2 + \ldots + c_{2r}y_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_{rr}y_r = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Поэтому $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ и из равенства (3.21) находим, что

$$\mathbf{x} = x_{r+1}\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_{n-r}.$$

Последнее равенство означает, что произвольно взятое решение однородной СЛАУ является линейной комбинацией ее решений (3.20). Следовательно, эти решения образуют базис линейного пространства решений однородной СЛАУ. □

Следствие 3.4. *Размерность пространства решений однородной СЛАУ равна $n - r$, если ранг матрицы системы равен r.*

3.4. Линейные подпространства и СЛАУ

Следствие 3.5. *Любая упорядоченная фундаментальная система решений однородной СЛАУ является базисом линейного пространства ее решений (см. теорему 1.9).*

Следствие 3.6. *Пространство решений однородной СЛАУ является $(n-r)$-мерным подпространством линейного пространства n-ок чисел.*

Пусть $\mathbf{x}_1$, ...,$\mathbf{x}_{n-r}$ — фундаментальная система решений однородной системы (3.17). Из вышеизложенного следует, что вектор-столбец

$$\overline{\mathbf{x}} = C_1\mathbf{x}_1 + \ldots + C_{n-r}\mathbf{x}_{n-r} \tag{3.22}$$

будет решением этой системы при любых значениях постоянных C_1, ...,C_{n-r}, и, с другой стороны, любое решение системы можно получить из формулы (3.22) при некоторых значениях этих постоянных. Решение (3.22) называется ***общим решением*** однородной СЛАУ.

Рассмотрим теперь неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.23}$$

где не все b_i равны нулю. Эту систему можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{3.24}$$

$\mathbf{b}^T = (b_1, \ldots, b_m)$. Однородная СЛАУ (3.17) называется ***соответствующей*** неоднородной СЛАУ (3.23).

Теорема 3.10. *Пусть $\widetilde{\mathbf{x}}$ — какое-нибудь (частное) решение неоднородной СЛАУ (3.23), а $\overline{\mathbf{x}}$ — общее решение соответствующей однородной СЛАУ. Тогда вектор-столбец*

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} \tag{3.25}$$

будет решением неоднородной СЛАУ (3.23) и, наоборот, любое решение этой СЛАУ будет иметь вид (3.25).

Доказательство. Покажем, что вектор столбец (3.25) является решением неоднородной системы. Для этого подставим его в левую часть уравнения (3.24):

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \equiv \mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{o} + \mathbf{b} \equiv \mathbf{b},$$

так как $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{o}$, а $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b}$, потому что $\overline{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{\mathbf{x}}$, соответственно, решения однородной и неоднородной СЛАУ. Значит, $\mathbf{x}$ — решение неоднородной СЛАУ.

Пусть теперь $\mathbf{y}$ — произвольное решение СЛАУ (3.23). Покажем, что оно имеет вид (3.25). Возьмем еще одно решение $\widetilde{\mathbf{x}}$ системы (3.23). Тогда, так как $\mathbf{A}\mathbf{y} \equiv \mathbf{b}$ и $\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b}$, то, вычитая друг из друга эти равенства, получаем $\mathbf{A}(\mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{o}$. Таким образом, вектор-столбец $\mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{x}}$ является решением однородной СЛАУ. Но все ее решения можно представить в виде (3.22) и поэтому $\mathbf{y} - \widetilde{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$. Следовательно, $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}}$. □

Решение неоднородной СЛАУ (3.25) называется ее ***общим решением***. Поэтому доказанную теорему можно переформулировать так: *общее решение неоднородной СЛАУ есть сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной СЛАУ.*

Пример 3.12. *Найти общее решение СЛАУ*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + x_5 & = & 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = & 16, \\ x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 9x_5 & = & 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 & = & 18. \end{array}\right.$$

Решение. Применим к заданной системе метод Гаусса. Для этого умножим первое уравнение последовательно на -2, -3, -1, -4 и результаты умножений прибавим соответственно ко второму, третьему, четвертому и пятому уравнениям:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 2, \\ -x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 9x_5 & = & 10, \\ -2x_2 - 11x_3 - 4x_4 - 13x_5 & = & 10, \\ x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 4x_5 & = & 0, \\ -3x_2 - 19x_3 - 6x_4 - 17x_5 & = & 10. \end{array}\right.$$

Теперь второе уравнение умножим последовательно на -2, 1, -3 и результаты умножений прибавим соответственно к третьему, четвертому и пятому уравнениям:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 2, \\ -x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 9x_5 & = & 10, \\ -5x_3 + 5x_5 & = & -10, \\ 5x_3 - 5x_5 & = & 10, \\ -10x_3 + 10x_5 & = & -20. \end{array}\right.$$

Наконец, третье уравнение прибавим к четвертому и, умножив на -2, прибавим к пятому; отбросив тождества $0 = 0$, получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 2, \\ -x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 9x_5 & = & 10, \\ -5x_3 + 5x_5 & = & -10. \end{array}\right. \tag{3.26}$$

Решая однородную систему, соответствующую заданной, получим СЛАУ, отличающуюся от системы (3.26) только нулями в правых частях уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 0, \\ -x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 9x_5 & = & 0, \\ -5x_3 + 5x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

Очевидно, ранг матрицы системы равен 3 и ее можно переписать следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & -3x_4 - 5x_5, \\ -x_2 - 3x_3 & = & 2x_4 + 9x_5, \\ -5x_3 & = & -5x_5. \end{array}\right. \tag{3.27}$$

Базисные неизвестные — x_1, x_2, x_3, свободные — x_4 и x_5. Следовательно, решения однородной системы образуют двумерное линейное пространство. Чтобы найти базис (3.20) в этом пространстве, возьмем $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ и применим к системе (3.27) обратный ход метода Гаусса. Получим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$. Точно так же решая при $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, найдем, что $x_1 = 15$, $x_2 = -12$, $x_3 = 1$. Следовательно, искомый базис имеет вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, общее решение однородной системы будет таким:

$$\overline{\mathbf{x}} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2.$$

Неоднородную систему (3.26) перепишем аналогично системе (3.27), разделив последнее уравнение на (-5):

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 2 - 3x_4 - 5x_5, \\ -x_2 - 3x_3 & = & 10 + 2x_4 + 9x_5, \\ x_3 & = & 2 + x_5. \end{array}\right.$$

Найдем ее частное решение при $x_4 = x_5 = 0$. Получим $x_3 = 2$, $x_2 = -16$, $x_1 = 26$. Это решение тоже можно записать в виде вектора-столбца

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 26 \\ -16 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение заданной СЛАУ имеет вид

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 \\ -16 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Придавая различные значения константам C_1 и C_2, можно получить все возможные решения СЛАУ. □

3.5 Собственные векторы

Важное значение имеют векторы, действие линейного оператора на которые сводится к их умножению на некоторое число. Образ вектора получается коллинеарным самому вектору, то есть образ вектора оказывается лежащим на той же прямой, на которой находится исходный вектор. Таким образом, ни один вектор этой прямой линейный оператор не в состоянии с нее переместить — действие оператора не изменяет эту прямую. В результате при выполнении некоторых условий все такие прямые для данного оператора оказываются естественными осями координат, то есть в этой системе координат матрица линейного оператора и уравнения связанных с ним геометрических объектов приобретают наиболее простой (канонический) вид.

Ненулевой вектор $\mathbf{x}$ называется ***собственным*** вектором линейного оператора $\mathcal{A}$, если

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = p\mathbf{x}, \tag{3.28}$$

где p — число, называемое ***собственным числом***, или ***собственным значением*** линейного оператора. Видно, что действительно $\mathcal{A}\mathbf{x} \parallel p\mathbf{x}$.

Например, собственными векторами тождественного и нулевого операторов являются все векторы линейного пространства, а собственными значениями, соответственно, 1 и 0.

Если вектор $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то $\mu\mathbf{x}$ тоже будет собственным вектором этого оператора, так как $\mathcal{A}(\mu\mathbf{x}) = \mu(\mathcal{A}\mathbf{x}) = \mu(p\mathbf{x}) = p(\mu\mathbf{x})$. Это и означает, что все векторы прямой, на которой находится вектор $\mathbf{x}$, оператор не в состоянии с нее переместить. Значит, и вся прямая остается под действием оператора неизменной.

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ действует в n-мерном пространстве с базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ и $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — его матрица в этом базисе. Тогда равенство (3.28) для собственного вектора $\mathbf{x}$, имеющего в данном базисе координаты $[\mathbf{x}] = (x_1, \ldots, x_n)^T$, можно переписать так:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}] = p[\mathbf{x}].$$

Вектор $\mathbf{x}$ и число p, удовлетворяющие такому равенству, называются ***собственным вектором*** и ***собственным числом (значением)*** матрицы $\mathbf{A}$. Последнее равенство перепишем как

$$(\mathbf{A} - p\mathbf{E})[\mathbf{x}] = [\mathbf{o}],$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица n-го порядка, а затем представим в координатной форме

$$\left\{\begin{array}{l} (a_{11} - p)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - p)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - p)x_n = 0. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

Поскольку собственный вектор не равен нулю по определению, эта однородная СЛАУ должна иметь ненулевое решение. Но тогда ее определитель должен равняться нулю:

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = 0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{cccc} a_{11} - p & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{22} & \ldots & a_{nn} - p \end{array}\right| = 0. \tag{3.30}$$

Раскрывая его, получим многочлен n-ой степени относительно p, который обозначается $\varphi(p)$ и называется ***характеристическим многочленом матрицы*** $\mathbf{A}$. Следовательно, уравнение (3.30), называемое ***характеристическим уравнением матрицы*** $\mathbf{A}$, имеет корнями ее собственные значения. Отметим, что в комплексном n-ом пространстве имеется всегда n (возможно, комплексных) собственных значений матрицы $\mathbf{A}$, а в действительном пространстве их вообще может не быть.

Теорема 3.11. *Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.*

Доказательство. Пусть $\varphi(p) = |\mathbf{A} - p\mathbf{E}|$ — характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$ в базисе $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$. Возьмем еще один базис $< \widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n >$, в который первый базис переходит с помощью матрицы $\mathbf{S}$, $|\mathbf{S}| \neq 0$, то есть справедлива формула (3.16), где $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матрица оператора $\mathcal{A}$ во втором базисе. Тогда

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathbf{A}} - p\mathbf{E}| &= |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} - p\mathbf{E}| = |\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}^{-1}p\mathbf{E}\mathbf{S}| = \\
&= |\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A} - p\mathbf{E})\mathbf{S}| = |\mathbf{S}^{-1}||\mathbf{A} - p\mathbf{E}||\mathbf{S}| = |\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \varphi(p).
\end{aligned}
$$

□

Эта теорема позволяет назвать $\varphi(p)$ ***характеристическим многочленом***, а уравнение (3.30) — ***характеристическим уравнением оператора*** $\mathcal{A}$.

Из всего сказанного получается следующий алгоритм вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве. Сначала следует выбрать некоторый базис и в этом базисе найти матрицу $\mathbf{A}$ линейного оператора, затем решить характеристическое уравнение (3.30). Его корни дадут собственные числа линейного оператора. Пусть p_i — найденное таким образом собственное число. Подставляя его вместо p в СЛАУ (3.29) и решая ее, нужно получить собственный вектор $\mathbf{x}_i$ (в выбранном базисе), соответствующий собственному значению p_i. Вообще говоря, таким образом можно найти n собственных значений и столько же соответствующих им собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Пример 3.13. *Найти собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей*

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Решение. Найдем характеристический многочлен оператора (матрицы):

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}-p\mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} 2-p & -1 & -2 \\ -1 & 5-p & 1 \\ -2 & 1 & 2-p \end{vmatrix} = \\
&= (2-p)^2(5-p)+2+2-4(5-p)-2(2-p) = \\
&= (4-4p+p^2)(5-p)+4-20+4p-4+2p = \\
&= 20-20p+5p^2-4p+4p^2-p^3+6p-20 = \\
&= -p^3+9p^2-18p.
\end{aligned}
$$

Следовательно, характеристическое уравнение матрицы имеет вид

$$p(p^2-9p+18)=0.$$

Его корни $p_1=0$, $p_2=3$, $p_3=6$ будут собственными значениями линейного оператора. Найдем соответствующие им собственные векторы.

Для этого составим систему вида (3.29):

$$
\left\{
\begin{aligned}
(2-p)x_1-x_2-2x_3&=0,\\
-x_1+(5-p)x_2+x_3&=0,\\
-2x_1+x_2+(2-p)x_3&=0,
\end{aligned}
\right. \tag{3.31}
$$

подставим в нее $p=p_1=0$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
2x_1-x_2-2x_3&=0,\\
-x_1+5x_2+x_3&=0,\\
-2x_1+x_2+2x_3&=0,
\end{aligned}
\right.
$$

и решим. Если первое уравнение прибавить к третьему, получим равенство $0=0$, которое можно отбросить. Умножив второе уравнение на 2 и прибавив к первому, придем к системе

$$
\left\{
\begin{aligned}
9x_2&=0,\\
-x_1+5x_2+x_3&=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ее решением будет $x_2=0$, $x_1=\alpha$, $x_3=\alpha$. Следовательно, собственный вектор в данном случае будет таким: $[\mathbf{x}_1]=(\alpha,0,\alpha)^T$, $\alpha\neq 0$. Подставим теперь в систему (3.31) $p=3$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
-x_1-x_2-2x_3&=0,\\
-x_1+2x_2+x_3&=0,\\
-2x_1+x_2-x_3&=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Применив к системе метод исключения неизвестных, получим

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение системы будет таким: $x_2 = \beta$, $x_3 = -\beta$, $x_1 = \beta$. Соответствующий собственный вектор: $[\mathbf{x}_2] = (\beta, \beta, -\beta)^T$, $\beta \neq 0$. Подстановка в систему (3.31) $p = p_3 = 6$ дает СЛАУ

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \end{cases}$$

которая преобразуется к виду

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая, находим $x_3 = \gamma$, $x_2 = 2\gamma$, $x_1 = -\gamma$. Получаем третий собственный вектор $[\mathbf{x}_3] = (-\gamma, 2\gamma, \gamma)^T$, $\gamma \neq 0$. □

Рассмотрим теоремы о собственных векторах линейного оператора, объясняющие, почему собственные векторы могут быть координатными ортами в n-мерном пространстве, образуя в некотором смысле наиболее удобную систему координат.

Теорема 3.12. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям самосопряженного оператора (симметричной матрицы), ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор, то есть $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — его собственные векторы, соответствующие собственным числам p и q, $p \neq q$. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = p\mathbf{x}, \qquad \mathcal{A}\mathbf{y} = q\mathbf{y}.$$

Умножим первое равенство на $\mathbf{y}$. Тогда его левая часть станет равной

$$\mathbf{y} \cdot \mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = q(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}),$$

а правая часть примет вид

$$\mathbf{y} \cdot p\mathbf{x} = p(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}).$$

Так как эти части равны, то $q(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = p(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$, или $(q - p)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = 0$. Поскольку $p \neq q$, то $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$, следовательно, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны. □

Теорема 3.13. *Собственные значения действительной симметричной матрицы действительны.*

Доказательство. Сначала покажем, что для матриц $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ и $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, элементы которых являются комплексными числами, справедливо равенство

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}, \tag{3.32}$$

где $\overline{\mathbf{A}}$ — матрица, состоящая из элементов, комплексно-сопряженных соответствующим элементам матрицы $\mathbf{A}$. Действительно, пользуясь определением операции умножения матриц, получаем

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\sum_j a_{ij} b_{jk}} = \sum_j \overline{a_{ij} b_{jk}} = \sum_j \overline{a_{ij}}\,\overline{b_{jk}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}.$$

Предположим теперь, что p — собственное значение симметричной матрицы $\mathbf{A}$, а $[\mathbf{x}]$ — соответствующий собственный вектор-столбец. Тогда

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}] = p[\mathbf{x}]. \tag{3.33}$$

Применим к последнему равенству комплексное сопряжение, используя равенство (3.32) и то, что матрица $\mathbf{A}$ состоит из действительных чисел:

$$\mathbf{A}\overline{[\mathbf{x}]} = \overline{p} \cdot \overline{[\mathbf{x}]}. \tag{3.34}$$

Это означает, что $\overline{p}$ тоже будет собственным значением матрицы $\mathbf{A}$, а вектор $\overline{[\mathbf{x}]}$ — соответствующим ему собственным вектором. Учитывая (3.34), умножим равенство (3.33) на $\overline{[\mathbf{x}]}^T$. В левой части равенства получим $\overline{[\mathbf{x}]}^T \mathbf{A}[\mathbf{x}] = (\mathbf{A}\overline{[\mathbf{x}]})^T [\mathbf{x}] = \overline{p} \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T [\mathbf{x}]$, а его правая часть будет равна $p\overline{[\mathbf{x}]}^T [\mathbf{x}]$. Следовательно, $\overline{p} \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T [\mathbf{x}] = p \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T [\mathbf{x}]$, или $(\overline{p} - p) \cdot \overline{[\mathbf{x}]}^T [\mathbf{x}] = 0$. Но, так как $\overline{[\mathbf{x}]}^T [\mathbf{x}] \neq 0$, то $p = \overline{p}$ и поэтому p — действительное число. □

Теорема 3.14. *Если самосопряженный линейный оператор в n-мерном пространстве имеет n попарно различных собственных значений, то из его собственных векторов можно составить ортонормированный базис пространства.*

Доказательство. Выберем некоторый базис в линейном пространстве. В этом базисе самосопряженный оператор представится некоторой симметричной матрицей. Согласно предыдущей теореме все ее собственные значения будут действительными числами. По условию доказываемой теоремы эти числа попарно различны, поэтому в соответствии с теоремой 3.12 соответствующие им собственные векторы будут попарно ортогональны. Пусть $\mathbf{s}_i$ — i-й собственный вектор. Нормируем его обычным образом: $\mathbf{s}_i^0 = \mathbf{s}_i/|\mathbf{s}_i|$. Используя теоремы 1.9 и 2.5, приходим к выводу, что $< \mathbf{s}_1^0, \ldots, \mathbf{s}_n^0 >$ — ортонормированный базис. □

Теорема 3.15. *Матрица* $\mathbf{A}$ *линейного оператора* $\mathcal{A}$ *в базисе* $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ *имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса — ее собственные векторы.*

Доказательство. Пусть базисом $< \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n >$ служат собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$. Так как эта матрица состоит из образов базисных векторов, а образ базисного вектора в данном случае имеет вид $\mathcal{A}\mathbf{e}_i = p_i\mathbf{e}_i$, где p_i — собственное значение матрицы, соответствующее собственному вектору $\mathbf{e}_i$, то

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Обратно. Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет диагональный вид (3.35). Так как ее i-й столбец есть образ базисного вектора $\mathbf{e}_i$, то

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, p_i, 0, \ldots, 0)^T.$$

Это означает, что в данном базисе вектор $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ имеет разложение $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = p_i\mathbf{e}_i$. Таким образом, $\mathbf{e}_i$ — собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, а p_i — соответствующее ему собственное значение. □

3.6 Квадратичные формы

Квадратичной формой n переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется многочлен второй степени этих переменных вида

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{3.36}$$

где a_{ij} — действительные числа, называемые ***коэффициентами квадратичной формы*** и удовлетворяющие условию $a_{ij} = a_{ji}$.

Основной задачей теории квадратичных форм, тесно связанной с приведением уравнений алгебраических линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду, является приведение квадратичной формы к так называемой сумме квадратов. Подразумевается такое линейное преобразование переменных x_1, ..., x_n в выражении (3.36), после которого квадратичная форма будет содержать только квадраты переменных с положительными или отрицательными коэффициентами при них. Одним из способов решения этой задачи является ***метод Лагранжа***, или ***метод выделения полных квадратов***.

Рассмотрим этот метод. Если квадратичная форма не содержит ни одного квадрата какой-либо переменной, то есть для всех m коэффициенты $a_{mm} = 0$, но $Q(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 0$, то найдутся переменные x_i и x_j, $i \neq j$, такие, что $a_{ij} \neq 0$. В этом случае делаем замену $x_i = y_i - y_j$, $x_j = y_i + y_j$, $x_k = y_k$, $k \neq i$, $k \neq j$, и член квадратичной формы, содержащий произведение переменных x_i и x_j, преобразуется в два слагаемых, уже содержащих квадраты переменных:

$$2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}(y_i - y_j)(y_i + y_j) = 2a_{ij}y_i^2 - 2a_{ij}y_j^2.$$

Поэтому будем теперь считать, что квадратичная форма содержит квадрат хотя бы одной переменной, например, для определенности x_1^2. Выделим в квадратичной форме все слагаемые, содержащие x_1:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \sigma(x_2, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \sigma'(x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{3.37}$$

где σ, σ' — многочлены, не содержащие переменной x_1. Сделаем замену переменных $z_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$, $z_k = x_k$, $k = \overline{2, n}$, после которой квадратичная форма (3.37) превратится в

$$Q_1(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{a_{11}}z_1^2 + Q_2(z_2, \dots, z_n).$$

В этом выражении $Q_2(z_2, \dots, z_n)$ тоже является квадратичной формой, но уже меньшего числа переменных, чем Q. Применяя к ней тот же подход, выделим квадрат переменной z_2 и т.д., пока квадратичная форма не примет вид

$$Q_3(t_1, \dots, t_n) = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_1 t_2^2 + \dots + \lambda_n t_n^2,$$

который и называется ***суммой квадратов***, или ***каноническим видом*** квадратичной формы.

Пример 3.14. *Привести к каноническому виду квадратичную форму* $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_1x_3$.

Решение. Так как квадраты переменных в квадратичной форме отсутствуют, сделаем замену $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $y_3 = x_3$. В результате заданная квадратичная форма приобретет вид

$$\begin{aligned} Q_1(y_1, y_2, y_3) &= y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + 3(y_1 - y_2)y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_2y_3 + 3y_1y_3 - 3y_2y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 4y_1y_3 - 2y_2y_3. \end{aligned}$$

Выполним преобразование (3.37):

$$\begin{aligned} Q_1(y_1, y_2, y_3) &= y_1^2 + 4y_1y_3 - y_2^2 - 2y_2y_3 = \\ &= (y_1 + 2y_3)^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 - 4y_3^2. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $z_1 = y_1 + 2y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$ и придем к следующему виду квадратичной формы:

$$Q_2(z_1, z_2, z_3) = {z_1}^2 - z_2^2 - 2z_2z_3 - 4z_3^2 = {z_1}^2 - (z_2 + z_3)^2 - 3z_3^2.$$

После замены $t_1 = z_1$, $t_2 = z_2 + z_3$, $t_3 = z_3$ получаем квадратичную форму в виде суммы квадратов:

$$Q_3(t_1, t_2, t_3) = {t_1}^2 - {t_2}^2 - 3t_3^2.$$

□

Рассмотрим теперь другой подход, основанный на методах теории линейных пространств. Для этого вернемся к пространству n-ок чисел вида $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с базисом (1.8) и скалярным произведением, определенным, как было рассмотрено выше. Тогда квадратичную форму (3.36) можно записать в матричном виде:

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]^T \mathbf{A}[\mathbf{x}],$$

где $[\mathbf{x}] = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — вектор-столбец, $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ — симметричная матрица, которая называется ***матрицей квадратичной формы***.

В соответствии с теоремой 3.2 матрицу $\mathbf{A}$ можно считать матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ с действием $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}[\mathbf{x}]$ и квадратичную форму записать еще и так:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}\mathbf{x}.$$

Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет все различные собственные значения p_1, ..., p_n, которым соответствуют единичные собственные векторы $\widetilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \widetilde{\mathbf{e}}_n$, образующие в соответствии с теоремой 3.14 ортонормированный базис в рассматриваемом пространстве. Возьмем матрицу $\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1] \ldots [\widetilde{\mathbf{e}}_n])$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_i]^T = (\widetilde{e}_1^i, \ldots, \widetilde{e}_n^i)$, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$. Эта матрица переводит базис $\mathbf{e}$ в базис $\widetilde{\mathbf{e}}$ по формуле (3.6):

$$\mathbf{L}^T[\mathbf{e}] = \begin{pmatrix} [\widetilde{\mathbf{e}}_1]^T \\ \cdots \\ [\widetilde{\mathbf{e}}_n]^T \end{pmatrix} [\mathbf{e}] = \begin{pmatrix} [\widetilde{\mathbf{e}}_1]^T \mathbf{e} \\ \cdots \\ [\widetilde{\mathbf{e}}_n]^T \mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\widetilde{\mathbf{e}}_1] \\ \cdots \\ [\widetilde{\mathbf{e}}_n] \end{pmatrix} = [\widetilde{\mathbf{e}}],$$

так как

$$[\widetilde{\mathbf{e}}_i]^T \mathbf{e} = (\widetilde{e}_1^i, \ldots, \widetilde{e}_n^i) \begin{pmatrix} [\mathbf{e}_1] \\ [\mathbf{e}_2] \\ \cdots \\ [\mathbf{e}_n] \end{pmatrix} = \widetilde{e}_1^i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \widetilde{e}_n^i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{e}_1^i \\ \widetilde{e}_2^i \\ \cdots \\ \widetilde{e}_n^i \end{pmatrix} = [\widetilde{\mathbf{e}}_i].$$

Но оба базиса ортонормированны, следовательно, $\mathbf{L}$ — матрица некоторого ортогонального оператора в силу теоремы 3.4. Это значит, что $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1}$. Матрица $\mathbf{A}$ под действием ортогонального оператора преобразуется в матрицу $\widetilde{\mathbf{A}}$ по формуле (3.16) и, учитывая, что по теореме 3.15 матрица в базисе из собственных векторов имеет диагональный вид, получим:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{L} = \mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Кроме того, координаты вектора $\mathbf{x}$ в новом базисе примут вид $\mathbf{y}$ (см. (3.14)): $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $[\mathbf{y}]^T = (y_1, \ldots, y_n)$, следовательно, квадратичная форма под действием данного ортогонального оператора будет приведена к каноническому виду:

$$\begin{aligned} Q_1(\mathbf{y}) = Q(y_1, \ldots, y_n) &= [\mathbf{x}]^T \mathbf{A}[\mathbf{x}]\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{L}[\mathbf{y}]} = \\ &= (\mathbf{L}[\mathbf{y}])^T \mathbf{A}\mathbf{L}[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^T \mathbf{L}^T \mathbf{A}\mathbf{L}[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^T \widetilde{\mathbf{A}}[\mathbf{y}] = \\ &= p_1 y_1^2 + \ldots + p_n y_n^2. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы данным методом привести квадратичную форму к каноническому виду, нужно только найти собственные значения p_1, ..., p_n матрицы $\mathbf{A}$.

3.7 Применение квадратичных форм

Теория квадратичных форм является мощным инструментом для исследования некоторых кривых и поверхностей с целью выяснения их типа, приведения к каноническому виду и построения в исходной системе координат.

Пусть алгебраическая кривая 2-го порядка задана своим общим уравнением

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0. \tag{3.38}$$

Оба рассмотренных метода приведения квадратичной формы к сумме квадратов годятся для приведения алгебраической кривой второго порядка к каноническому виду. Первый метод может показаться более легким, однако он не дает простого пути для построения графика кривой в исходном базисе. С помощью второго метода такое построение выполнить несложно, но в данном изложении он не всегда применим и не столь прост, как первый.

Пример 3.15. *Методом Лагранжа привести уравнение кривой*

$$\underbrace{7x_1^2 - 24x_1x_2} -38x_1 + 24x_2 + 175 = 0 \tag{3.39}$$

к каноническому виду и определить тип кривой.

Решение. Фигурной скобкой показана квадратичная форма, входящая в левую часть уравнения. Выделим для нее полный квадрат так, как это было выполнено в предыдущем п.:

$$\frac{1}{7}(7x_1 - 12x_2)^2 - \frac{144}{7}x_2^2 - 38x_1 + 24x_2 + 175 = 0.$$

Сделаем замену переменных: $y_1 = 7x_1 - 12x_2$, $y_2 = x_2$. Уравнение примет вид:

$$\frac{1}{7}y_1^2 - \frac{144}{7}y_2^2 - 38\frac{y_1 + 12y_2}{7} + 24y_2 + 175 = 0,$$

$$\underbrace{\frac{1}{7}y_1^2 - \frac{38}{7}y_1} \underbrace{-\frac{144}{7}y_2^2 - \frac{288}{7}y_2} +175 = 0.$$

Выделим полные квадраты для выражений, отмеченных фигурными скобками:

$$\frac{1}{7}(y_1-19)^2-\frac{361}{7}-\frac{144}{7}(y_2+1)^2+\frac{144}{7}+175=0,$$
$$\frac{1}{7}(y_1-19)^2-\frac{144}{7}(y_2+1)^2+144=0.$$

Сделав замену $z_1 = y_2 + 1$, $z_2 = y_1 - 19$, получим

$$\frac{1}{7}z_2^2-\frac{144}{7}z_1^2+144=0,$$
$$\frac{z_1^2}{7}-\frac{z_2^2}{1008}=1.$$

Последнее уравнение позволяет сделать вывод, что заданная кривая — гипербола. □

Вернемся к уравнению (3.38). Первые три слагаемых в нем образуют квадратичную форму. Введем матрицу $\mathbf{A}$, вектор $\mathbf{x}$ (при $n = 2$), как это было сделано в предыдущем п., и вектор $[\mathbf{b}]^T = (b_1, b_2)$.Тогда уравнение кривой можно записать в матричном виде:

$$[\mathbf{x}]^T\mathbf{A}[\mathbf{x}]+[\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}]+c=0.$$

Чтобы привести его к каноническому виду с помощью ортогонального оператора, необходимо выполнить следующие действия.

1. Найти собственные значения p_1,p_2 матрицы $\mathbf{A}$. Убедиться, что эти значения различны. (Если $p_1 = p_2$, то в данном изложении метод не годится). Найти собственные векторы $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие найденным собственным значениям.

2. Нормировать собственные векторы по правилу: $\widetilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{s}_i/|\mathbf{s}_i|$, $i = 1, 2$.

3. Составить ортогональную матрицу $\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_2])$ и сделать замену переменных $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, при этом квадратичная форма примет вид $[\mathbf{x}]^T\mathbf{A}[\mathbf{x}] = p_1y_1^2 + p_2y_2^2$.

4. Найти результат преобразования линейной формы $[\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}]$.

5. В преобразованном уравнении $p_1y_1^2 + p_2y_2^2 + [\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}] + c = 0$, если необходимо, выделить полные квадраты для выражений, содержащих переменные y_1 и y_2, и окончательно привести уравнение к каноническому виду.

Пример 3.16. *С помощью ортогонального оператора привести уравнение* (3.39) *к каноническому виду и построить кривую в базисе* $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

Решение. Как уже было отмечено, квадратичная форма, входящая в уравнение, имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2) = 7x_1^2 - 24x_1x_2.$$

Составим для матрицы квадратичной формы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$$

характеристическое уравнение

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 7-p & -12 \\ -12 & -p \end{vmatrix} = p^2 - 7p - 144 = 0.$$

Корнями уравнения являются собственные значения матрицы: $p_1 = -9$, $p_2 = 16$. Чтобы найти собственные векторы, составим систему

$$\begin{cases} (7-p)s_1 - 12s_2 = 0, \\ -12s_1 - ps_2 = 0, \end{cases} \tag{3.40}$$

где $[\mathbf{s}] = (s_1, s_2)^T$ — искомый собственный вектор. Подставим в эту систему $p = p_1 = -9$:

$$\begin{cases} 16s_1 - 12s_2 = 0, \\ -12s_1 + 9s_2 = 0. \end{cases}$$

Ее решение дает собственный вектор $[\mathbf{s}_1] = (3t, 4t)^T$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = [\mathbf{s}_1]/|\mathbf{s}_1| = (3t, 4t)^T/(5|t|) = \pm(3/5, 4/5)^T$. Выберем знак «+», то есть вектор $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = (3/5, 4/5)^T$. Аналогично, подставляя в систему (3.40) $p = p_2 = 16$, получаем систему

$$\begin{cases} -9s_1 - 12s_2 = 0, \\ -12s_1 - 16s_2 = 0, \end{cases}$$

из которой находим второй собственный вектор $[\mathbf{s}_2] = (4t, -3t)$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{s}_2]/|\mathbf{s}_2| = (4t, -3t)^T/(5|t|) = \pm(4/5, -3/5)^T$. Для знака «+» получаем $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = (4/5, -3/5)^T$. Составим из этих векторов матрицу

$$\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_2]) = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

и сделаем замену переменных $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. В результате линейная форма $-38x_1 + 24x_2$ преобразуется следующим образом ($[\mathbf{b}] = (-38; 24)^T$):

$$\begin{aligned}-38x_1 + 24x_2 &= [\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}] = \\ &= (-38; 24)\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{-18}{5}; \frac{-224}{5}\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{18}{5}y_1 - \frac{224}{5}y_2.\end{aligned}$$

Следовательно, под действием ортогонального оператора заданное уравнение примет вид

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 - \frac{18}{5}y_1 - \frac{224}{5}y_2 + 175 = 0.$$

Далее выделяем полные квадраты для y_1 и y_2 и последовательно получаем

$$\begin{aligned}-9\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + 16\left(y_2 - \frac{7}{5}\right)^2 &= -\frac{9}{25} + \frac{784}{25} - 175, \\ -9\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + 16\left(y_2 - \frac{7}{5}\right)^2 &= -144, \\ \frac{\left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2}{16} - \frac{\left(y_2 - \frac{7}{5}\right)^2}{9} &= 1.\end{aligned}$$

Таким образом, заданная кривая действительно представляет собой гиперболу с центром в точке $(-1/5; 7/5)$ в системе координат y_1Oy_2. Чертеж гиперболы приведен на рис. 3.4. □

Пусть теперь задана алгебраическая поверхность 2-го порядка:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0.$$

Приведение такого уравнения к каноническому виду как с помощью метода Лагранжа, так и с помощью ортогонального оператора принципиально ничем не отличается от рассмотренного выше.

Пример 3.17. *Методом Лагранжа привести уравнение поверхности*

$$\underbrace{5x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 - 16x_1x_2 + 20x_1x_3 + 4x_2x_3}+ \\ + 30x_1 - 12x_2 + 24x_3 + 27 = 0 \quad (3.41)$$

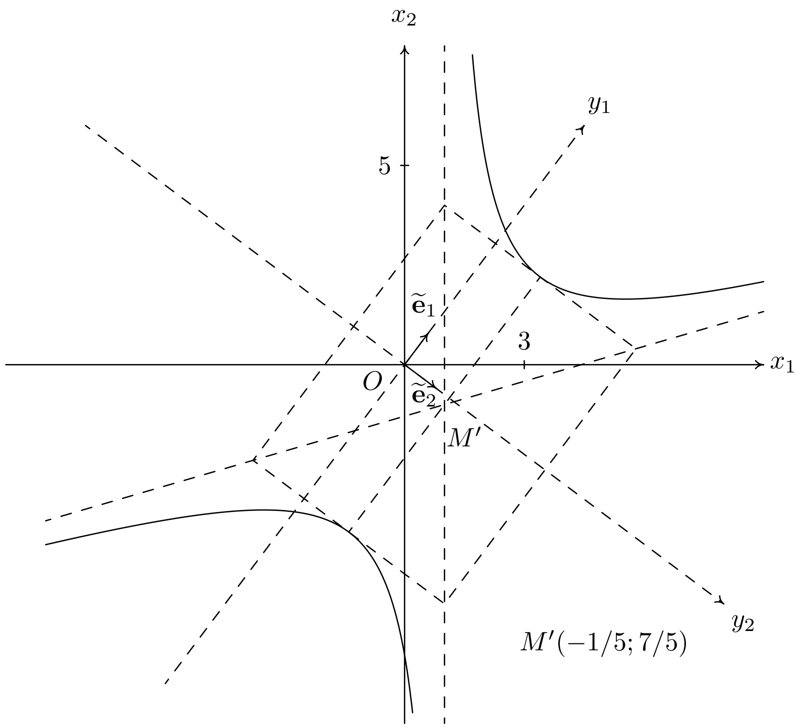

Рис. 3.4: Гипербола

3.7. Применение квадратичных форм

к каноническому виду и определить тип поверхности.

Решение. Фигурной скобкой показана квадратичная форма. Выделим полный квадрат для переменной x_1:

$$\frac{1}{5}(5x_1 - 8x_2 + 10x_3)^2 - \frac{64}{5}x_2^2 - 20x_3^2 + 32x_2x_3 + 11x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + \\ + 30x_1 - 12x_2 + 24x_3 + 27 = 0,$$

$$\frac{1}{5}(5x_1 - 8x_2 + 10x_3)^2 - \frac{9}{5}x_2^2 - 18x_3^2 + 36x_2x_3 + 30x_1 - 12x_2 + \\ + 24x_3 + 27 = 0,$$

и сделаем замену переменных: $y_1 = 5x_1 - 8x_2 + 10x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$:

$$\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{9}{5}y_2^2 - 18y_3^2 + 36y_2y_3 + 30\frac{y_1 + 8y_2 - 10y_3}{5} - 12y_2 + 24y_3 + 27 = 0,$$

$$\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{9}{5}y_2^2 - 18y_3^2 + 36y_2y_3 + 6y_1 + 36y_2 - 36y_3 + 27 = 0,$$

$$y_1^2 - 9y_2^2 - 90y_3^2 + 180y_2y_3 + 30y_1 + 180y_2 - 180y_3 + 135 = 0.$$

Теперь выделим полный квадрат для переменной y_2:

$$y_1^2 - 9(y_2 - 10y_3)^2 + 900y_3^2 - 90y_3^2 + 30y_1 + 180y_2 - 180y_3 + 135 = 0,$$

$$y_1^2 - 9(y_2 - 10y_3)^2 + 810y_3^2 + 30y_1 + 180y_2 - 180y_3 + 135 = 0.$$

Снова сделаем замену переменных: $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - 10y_3$, $z_3 = y_3$:

$$z_1^2 - 9z_2^2 + 810z_3^2 + 30z_1 + 180(z_2 + 10z_3) - 180z_3 + 135 = 0,$$

$$z_1^2 - 9z_2^2 + 810z_3^2 + 30z_1 + 180z_2 + 1620z_3 + 135 = 0.$$

Выделим полные квадраты для переменных:

$$(z_1 + 15)^2 - 225 - 9(z_2 - 10)^2 + 900 + 810(z_3 + 1)^2 - 810 + 135 = 0,$$

$$(z_1 + 15)^2 - 9(z_2 - 10)^2 + 810(z_3 + 1)^2 = 0.$$

Наконец, выполним последнюю замену переменных: $w_1 = z_1 + 15$, $w_2 = z_2 - 10$, $w_3 = z_3 + 1$ и получим каноническое уравнение

$$w_1^2 - 9w_2^2 + 810w_3^2 = 0,$$

$$\frac{w_1^2}{810} - \frac{w_2^2}{90} + w_3^2 = 0,$$

из которого видно, что заданная поверхность — конус второго порядка. □

3.7. Применение квадратичных форм

Применение метода ортогонального оператора к уравнению алгебраической поверхности второго порядка аналогично применению этого метода к уравнению алгебраической кривой второго порядка. Детали применения рассмотрим на примере.

Пример 3.18. *С помощью ортогонального оператора привести уравнение* (3.41) *к каноническому виду и построить поверхность в базисе* $\mathbf{e}_1 = (1;0;0)$, $\mathbf{e}_2 = (0;1;0)$, $\mathbf{e}_3 = (0;0;1)$.

Решение. Квадратичная форма, входящая в уравнение, имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 11x_2^2 + 2x_3^2 - 16x_1x_2 + 20x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Ей соответствует матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & 11 & 2 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$|\mathbf{A} - p\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 5-p & -8 & 10 \\ -8 & 11-p & 2 \\ 10 & 2 & 2-p \end{vmatrix} =$$

$$= (5-p)(11-p)(2-p) - 160 - 160 - 100(11-p)-$$

$$- 4(5-p) - 64(2-p) = (55 - 16p + p^2)(2-p) - 320-$$

$$- 1100 + 100p - 20 + 4p - 128 + 64p =$$

$$= 110 - 32p + 2p^2 - 55p + 16p^2 - p^3 - 1568 + 168p =$$

$$= -p^3 + 18p^2 + 81p - 1458 = p^2(18-p) + 81(p-18) =$$

$$= (18-p)(p^2-81) = (18-p)(p-9)(p+9) = 0.$$

Следовательно, собственные значения матрицы равны $p_1 = 9$, $p_2 = 18$, $p_3 = -9$. Чтобы найти собственные векторы, составим систему

$$\begin{cases} (5-p)s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 + (11-p)s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 + (2-p)s_3 = 0, \end{cases} \tag{3.42}$$

где $[\mathbf{s}] = (s_1, s_2, s_3)^T$ — искомый собственный вектор. Подставим в эту систему $p = p_1 = 9$:

$$\begin{cases} -4s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 + 2s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 - 7s_3 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим $[\mathbf{s}_1] = (t, 2t, 2t)^T$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = [\mathbf{s}_1]/|\mathbf{s}_1| = (t, 2t, 2t)^T/(3|t|) = \pm(1/3, 2/3, 2/3)^T$. Выберем знак «+» и получим вектор $[\widetilde{\mathbf{e}}_1] = (1/3, 2/3, 2/3)^T$. Аналогично, подставляя в систему (3.42) $p = p_2 = 18$, приходим к системе

$$\begin{cases} -13s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 - 7s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 - 16s_3 = 0, \end{cases}$$

из которой находим собственный вектор $[\mathbf{s}_2] = (2t, -2t, t)$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{s}_2]/|\mathbf{s}_2| = (2t, -2t, t)^T/(3|t|) = \pm(2/3, -2/3, 1/3)^T$. Для знака «−» получаем $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = (-2/3, 2/3, -1/3)^T$.

Наконец, для третьего собственного значения $p = p_2 = -9$ получаем систему

$$\begin{cases} 14s_1 - 8s_2 + 10s_3 = 0, \\ -8s_1 + 20s_2 + 2s_3 = 0, \\ 10s_1 + 2s_2 + 11s_3 = 0, \end{cases}$$

решение которой дает третий собственный вектор $[\mathbf{s}_3] = (2t, t, -2t)$, $[\widetilde{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{s}_2]/|\mathbf{s}_2| = (2t, t, -2t)^T/(3|t|) = \pm(2/3, 1/3, -2/3)^T$. Для знака «+» получаем $[\widetilde{\mathbf{e}}_3] = (2/3, 1/3, -2/3)^T$.Составим из этих векторов матрицу

$$\mathbf{L} = ([\widetilde{\mathbf{e}}_1]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_2]\ [\widetilde{\mathbf{e}}_3]) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

и сделаем замену переменных $[\mathbf{x}] = \mathbf{L}[\mathbf{y}]$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. В результате линейная форма $30x_1 - 12x_2 + 24x_3$ преобразуется следующим образом ($[\mathbf{b}] = (30; -12; 24)^T$):

$$30x_1 - 12x_2 + 24x_3 = [\mathbf{b}]^T[\mathbf{x}] = [\mathbf{b}]^T\mathbf{L}[\mathbf{y}] =$$
$$= (30; -12; 24)\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$
$$= (18; -36; 0)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 18y_1 - 36y_2.$$

Значит, под действием ортогонального оператора заданное уравнение (3.41) примет вид

$$9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2 + 18y_1 - 36y_2 + 27 = 0.$$

3.7. Применение квадратичных форм

Далее выделяем полные квадраты для y_1 и y_2 и последовательно получаем

$$9\left(y_1+1\right)^2-9+18\left(y_2-1\right)^2-18-9y_3^2+27=0,$$
$$9\left(y_1+1\right)^2+18\left(y_2-1\right)^2-9y_3^2=0,$$
$$\frac{\left(y_1+1\right)^2}{2}+\left(y_2-1\right)^2-\frac{y_3^2}{2}=0.$$

Таким образом, заданная поверхность действительно представляет собой конус второго порядка с вершиной в точке $(-1;1;0)$ в системе координат (y_1, y_2, y_3). Чертеж конуса показан на рис. 3.5. $\square$

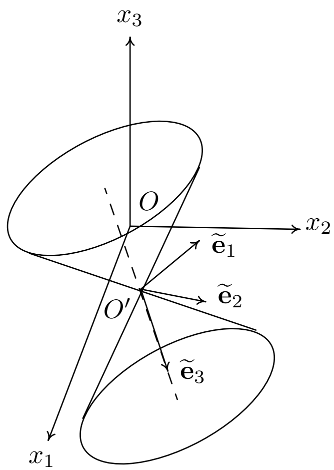

Рис. 3.5: Конус второго порядка

Предметный указатель

Литература

[1] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.

[3] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985.

[4] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1986, ч. I.

[5] Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. – М.: Наука, 1975.

[6] Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1986.

[7] Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. — М.: Наука, 1981.