Методы функционального анализа в задачах математической физики: Задачи к зачёту

Д. В. Гринев

Курс кафедры дифференциальных уравнений
ФМиКТ ЧГУ

Грозный 2018

Нормированные пространства

- Записать определение нормы в пространстве $C^{(p)}[a, b]$. Доказать корректность этого определения.
- Записать определение нормы в пространстве $h[a, b]$. Доказать корректность этого определения.
- Доказать неравенство Коши-Буняковского для пространства $h[a, b]$.
- Докажите, что последовательность функций ограничена в пространстве $h[0, \pi]$, но не компактна.

Линейные операторы в нормированных пространствах

- Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
- Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с симметрическим ядром, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является самосопряженным оператором.
- Докажите, что оператор Фредгольма $\widehat{A}y = \int_0^\pi \sin x \cos s y(s) ds$ является вполне непрерывным при действии из $h[0,\pi]$ в $h[0,\pi]$.

Собственные функции самосопряженных операторов в нормированных пространствах

- Доказать, что собственные функции самосопряженного оператора $\widehat{A}$, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.
- Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром, действующий из $h[a, b]$ в $h[a, b]$, является самосопряженным оператором.
- Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма $\widehat{A}y = \int_0^{2\pi} \left(\sin(x+s) + \frac{1}{2}\right) y(s)\mathrm{d}s$
- Доказать, что $\Lambda = 0$ является собственным значением оператора Фредгольма $\widehat{A}y = \int_0^{2\pi} \left(\sin x \cos s + \sin s \cos x + \frac{1}{2}\right) y(s)\mathrm{d}s$ и найти его ранг.