Семинар 5

Линейное однородное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{{}_0y^{(n)} + {}_1y^{(n-1)} + \dots + {}_{n-1}y' + {}_ny = 0,} \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n = \text{const}$, $a_0 \neq 0$.

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами часто встречаются в физических задачах (например, уравнение малых колебаний математического маятника). Чтобы решить такое уравнение, не обязательно понижать порядок стандартными методами — оно решается проще.

Решения уравнения (1) образуют ЛП размерности n. Поэтому ОР уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x), \qquad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R},$$

где $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ — ФСР (любые n ЛНЗ решений уравнения (1)).

Вспомним, что функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ являются ЛНЗ, если

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \equiv 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; C_k = 0 \;\; \forall k.$$

Линейную зависимость можно проверить с помощью *определителя Вронского (вронскиана):*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ {y_1}'(x) & {y_2}'(x) & \dots & {y_n}'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Т. Если функции $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ — решения уравнения (1), то

а) либо $W(x) \equiv 0$, тогда они ЛЗ,

б) либо $W(x) \neq 0$ во всех точках, тогда они ЛНЗ.

Как построить ФСР? Будем искать ЧР уравнения (1) в виде $y = e^{\lambda x}$. Подставив это в уравнение (1), получим:

$${}_0\lambda^n e^{\lambda x} + {}_1\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + {}_{n-1}\lambda e^{\lambda x} + {}_n e^{\lambda x} = 0.$$

После сокращения на $e^{\lambda x}$ получим *характеристическое уравнение* (ХУ):

$${}_0\lambda^n + {}_1\lambda^{n-1} + \dots + {}_{n-1}\lambda + {}_n = 0.$$

Оно имеет корни λ_j (n корней на комплексной плоскости с учётом кратности).

Корню λ_j кратности 1 соответствует решение $e^{\lambda_j x}$ уравнения (1).

Корню λ_j кратности p_j соответствуют решения $e^{\lambda_j x}$, $x e^{\lambda_j x}$, $x^2 e^{\lambda_j x}$, …, $x^{p_j - 1} e^{\lambda_j x}$ уравнения (1) (всего p_j штук).

Таким образом, получится всего n решений (т. к. $\sum p_j = n$). Можно доказать их линейную независимость. Следовательно, они образуют ФСР.

При этом ХУ с вещественными коэффициентами может иметь не вещественные корни. Тогда они будут комплексно сопряжёнными:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

и им соответствуют решения $e^{(\alpha + i\beta)x}$ и $e^{(\alpha - i\beta)x}$. Поскольку эти функции — комплексно-значные, удобно заменить их на их вещественнозначные ЛК: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

В случае комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности p им будут соответствовать $2p$ ЛНЗ вещественных решений: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, …, $x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 1 (Филиппов № 512). Решить уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$.
Соответствующее ХУ
$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$
имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ кратности 1, которым соответствуют ЧР
$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Проверим их линейную независимость. Найдём вронскиан:
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -3e^{-4x} + e^{-4x} = -2e^{-4x} \neq 0,$$
поэтому функции y_1, y_2 ЛНЗ и образуют ФСР.
ОР линейного однородного ОДУ есть ЛК найденных ЧР.
Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 2 (Филиппов № 519). Решить уравнение $y^{IV} - y = 0$.
Соответствующее ХУ
$\lambda^4 - 1 = 0, \qquad \lambda^4 = 1$
имеет корни $\lambda = e^{\frac{i2\pi k}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$, т. е.
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -i$,
среди которых есть пара комплексно сопряжённых корней: $0 \pm i \cdot 1$. Все корни имеют кратность 1.
Соответствующие ЧР: e^x, e^{-x}, $\cos x$, $\sin x$.
Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

Пример 3 (Филиппов № 524). Решить уравнение: $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.
Соответствующее ХУ:
$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0.$
$\lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0.$
$\lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0.$
ХУ имеет корень $\lambda_1 = 0$ кратности $p_1 = 3$, которому соответствуют ЧР 1, x, x^2, и корень $\lambda_2 = 3$ кратности $p_2 = 2$, которому соответствуют ЧР e^{3x}, xe^{3x}.
Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}$, $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$.

Линейное неоднородное ОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \quad a_0 \neq 0.} \tag{2}$$
Соответствующее линейное однородное уравнение:
$$a_0\bar{y}^{(n)} + a_1\bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\bar{y}' + a_n\bar{y} = 0. \tag{3}$$
Методы решения.
1. Метод вариации постоянных.
Ищем ОР линейного неоднородного уравнения (2) в виде
$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x), \tag{4}$$
где $\sum_{k=1}^{n} C_ky_k(x) = \bar{y}(x)$ — ОР линейного однородного уравнения (3).

Если мы просто подставим это в уравнение (2), то получится слишком большой произвол в нахождении функций $C_k(x)$. Поэтому потребуем выполнения системы из n уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k'(x) = 0, \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-2)}(x) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) y_k^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_0}. \end{cases}$$

Это СЛАУ относительно $C_k'(x)$. Можно показать, что эта система всегда разрешима (т. к. её определитель — это вронскиан функций $y_k(x)$) и найденные из неё функции $C_k(x)$ при подстановке в формулу (4) действительно дают ОР линейного неоднородного уравнения (2).

Пример 4 (Филиппов № 579). Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

1) Сначала найдём ОР соответствующего линейного однородного уравнения:
$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = 0.$
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$
$(\lambda + 1)^2 = 0.$
$\lambda = -1, \qquad p = 2.$
$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$
2) Теперь ищем ОР линейного неоднородного уравнения в виде
$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}.$
Для определения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ имеем систему:
$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) x e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)(-e^{-x}) + C_2'(x)(e^{-x} - x e^{-x}) = 3e^{-x}\sqrt{x+1}. \end{cases}$$
Сократив на e^{-x}, получим:
$$\begin{cases} C_1' + x C_2' = 0, \\ -C_1' + (1-x) C_2' = 3\sqrt{x+1}. \end{cases}$$
Сложив эти два уравнения, получим:
$C_2' = 3\sqrt{x+1},$
$C_2 = 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}_2, \qquad \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}.$
Из уравнения $C_1' + x C_2' = 0$ имеем
$C_1' = -x C_2' = -3x\sqrt{x+1},$
$$C_1 = -3\int x\sqrt{x+1}\,dx = -3\int \left[(x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}\right] dx =$$
$$= -3\left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right] + \tilde{C}_1 = -\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}_1, \qquad \tilde{C}_1 \in \mathbb{R}.$$
Тогда ОР линейного неоднородного уравнения:

$$y = \left[-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}_1\right] e^{-x} + \left[2(x+1)^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}_2\right] x e^{-x} =$$
$$= \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 x e^{-x} + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Функция Коши.

ОР линейного неоднородного уравнения (2) имеет вид:

$$y(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)}_{\substack{\bar{y}(x)\,— \\ \text{ОР линейного} \\ \text{однородного уравнения (3)}}} + \underbrace{\bar{\bar{y}}(x)}_{\substack{\text{ЧР линейного} \\ \text{неоднородного уравнения (2)}}}.$$

ЧР линейного неоднородного уравнения (2) даётся формулой

$$\bar{\bar{y}}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x-s) f(s)\, ds,$$

где x_0 — произвольное фиксированное число, а $K(x-s)$ — функция Коши (функция влияния), которая удовлетворяет условиям:

1) $K(x)$ — решение линейного однородного уравнения (3),
2) $K(0) = K'(0) = \cdots = K^{(n-2)}(0) = 0$, $K^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}$.

Замечание. Функция Коши зависит от $x - s$ только для линейного уравнения с *постоянными* коэффициентами (2). Для линейного уравнения с *переменными* коэффициентами (например, уравнения Эйлера, см. семинар 6) функция Коши имеет более общий вид: $K(x, s)$. Однако уравнение Эйлера с помощью замены переменной сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами (2) (см. семинар 6), для которого функция Коши имеет вид $K(x - s)$.

Замечание 2. Для разных x_0 будут получаться различные ЧР (они будут отличаться друг от друга на некоторое решение линейного однородного уравнения (3)), поэтому, чтобы найти *какое-то одно* ЧР, можно забыть о зависимости от x_0 и подставлять только верхний предел интегрирования:

$$\bar{\bar{y}}(x) = \int^{x} K(x-s) f(s)\, ds.$$

Пример 5 (Филиппов № 580). Решить уравнение $y'' + y = 2\sec^3 x$.

$$y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}.$$

1) Сначала найдём ОР соответствующего линейного однородного уравнения:
   $\bar{y}'' + \bar{y} = 0.$
   $\lambda^2 + 1 = 0.$
   $\lambda = \pm i.$
   $\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$
2) Теперь построим функцию Коши. Она есть решение линейного однородного уравнения, поэтому имеет вид:
   $K(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Кроме того, функция Коши удовлетворяет условиям

$K(0) = 0, \qquad K'(0) = 1,$

из которых определяются константы C_1, C_2:

$K(0) = C_1 = 0, \qquad K'(0) = (-C_1 \sin x + C_2 \cos x)|_{x=0} = C_2 = 1.$

Откуда

$K(x) = \sin x\,, \qquad K(x-s) = \sin(x-s)$ — функция Коши.

3) ЧР линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$\bar{\bar{y}}(x) = \int^{x} K(x-s) f(s)\, ds = \int^{x} 2\frac{\sin(x-s)}{\cos^3 s} ds.$$

$$\int 2\frac{\sin(x-s)}{\cos^3 s} ds = 2\int \frac{\sin x \cos s - \cos x \sin s}{\cos^3 s} ds =$$

$$= 2\int \frac{\sin x}{\cos^2 s} ds - 2\int \frac{\cos x \sin s}{\cos^3 s} ds = 2\sin x \int \frac{ds}{\cos^2 s} + 2\cos x \int \frac{d(\cos s)}{\cos^3 s} =$$

$$= 2\sin x \operatorname{tg} s - \frac{\cos x}{\cos^2 s} + \mathrm{const}\,.$$

$$\bar{\bar{y}}(x) = \left(2\sin x \operatorname{tg} s - \frac{\cos x}{\cos^2 s}\right)\Big|^{s=x} = 2\sin x \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}.$$

4) Тогда ОР линейного неоднородного уравнения есть сумма ОР линейного однородного уравнения и ЧР линейного неоднородного уравнения:

$$y = \bar{y}(x) + \bar{\bar{y}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2\sin x \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}.$$

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2\sin x \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.