Семинар 6

Мы продолжаем рассматривать линейное неоднородное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$ {}_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + {}_{n-1} y' + {}_n y = f(x), \quad {}_0 \neq 0. \tag{1} $$

Соответствующее ему однородное уравнение:

$$ a_0 \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + {}_{n-1} \bar{y}' + {}_n \bar{y} = 0. \tag{2} $$

Соответствующее ХУ:

$$ {}_0 \lambda^n + {}_1 \lambda^{n-1} + \dots + {}_{n-1} \lambda + {}_n = 0. \tag{3} $$

Продолжим изучать методы решения линейного неоднородного уравнения (1). Как мы уже упоминали на прошлом семинаре, ОР линейного неоднородного уравнения (1) имеет вид

$y(x) = \bar{y}(x) + \bar{\bar{y}}(x),$

где $\bar{y}(x)$ — ОР линейного однородного уравнения (2), $\bar{\bar{y}}(x)$ — ЧР линейного неоднородного уравнения (1).

Изученные на прошлом семинаре метод вариации постоянных и метод построения ЧР уравнения (1) с помощью функции Коши — это универсальные методы, т. е. они годятся для произвольной правой части $f(x)$. Сегодня мы рассмотрим ещё пару методов построения ЧР, которые годятся только для функций $f(x)$ особого вида.

3. Метод неопределённых коэффициентов.

1) Пусть $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен m-й степени (такая функция $f(x)$ называется *квазимногочленом*). Тогда
   а) если α — не корень ХУ (3) (*нерезонансный* случай), то ЧР уравнения (1) нужно искать в виде $\bar{\bar{y}}(x) = Q_m(x) e^{\alpha x}$, где $Q_m(x)$ — многочлен m-й степени с неизвестными коэффициентами;
   б) если α — корень ХУ (3) кратности p (*резонансный* случай), то ЧР уравнения (1) нужно искать в виде $\bar{\bar{y}}(x) = x^p Q_m(x) e^{\alpha x}$.
2) Пусть $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$ (или $f(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$).
   а) *Первый способ.* ЧР уравнения (1) будет иметь вид $\bar{\bar{y}} = \operatorname{Re} \tilde{y}$ (или $\bar{\bar{y}} = \operatorname{Im} \tilde{y}$), где $\tilde{y}(x)$ — ЧР уравнения (1) с правой частью $\tilde{f}(x) = P_m(x) e^{(\alpha + i\beta)x}$.
   б) *Второй способ.* Можно не переходить к комплексным функциям, а искать ЧР уравнения (1) в виде $\bar{\bar{y}}(x) = x^p e^{\alpha x} [Q_m(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x]$ (Здесь обязательно должны присутствовать и синус, и косинус одновременно, даже если в исходном уравнении был только синус или только косинус!), где $p = 0$, если $\alpha \pm i\beta$ — не корни ХУ (3), и p — их кратность в противном случае.
3) *Принцип суперпозиции.* Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то ЧР уравнения (1) будет функция $\bar{\bar{y}}(x) = \bar{\bar{y}}_1(x) + \bar{\bar{y}}_2(x)$, где $\bar{\bar{y}}_1(x)$ и $\bar{\bar{y}}_2(x)$ — ЧР уравнения (1) с правой частью $f_1(x)$ и $f_2(x)$, соответственно.

Пример 1 (Филиппов № 534). Решить уравнение $y'' + y = 4xe^x + \cos x$.

1) Найдём ОР соответствующего линейного однородного уравнения:
   $\bar{y}'' + \bar{y} = 0.$
   Его ХУ
   $\lambda^2 + 1 = 0$
   имеет корни
   $\lambda = \pm i.$
   Тогда ОР однородного уравнения:

$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

2) В силу принципа суперпозиции ЧР $\bar{\bar{y}}(x)$ неоднородного уравнения с правой частью $f(x) = 4xe^x + \cos x$ будет являться суммой ЧР $\bar{\bar{y}}_1(x)$ и $\bar{\bar{y}}_2(x)$ неоднородных уравнений с правыми частями $f_1(x) = 4xe^x$ и $f_2(x) = \cos x$, соответственно.

3) Найдём $\bar{\bar{y}}_1(x)$ — ЧР неоднородного уравнения $y'' + y = 4xe^x$.
В данном случае правая часть $f_1(x) = 4xe^x = P_1(x)e^{1\cdot x}$ — квазимногочлен, $\alpha = 1$ — не корень ХУ $\lambda^2 + 1 = 0$, поэтому ищем ЧР в виде
$\bar{\bar{y}}_1(x) = Q_1(x)e^x = (Ax + B)e^x$.
Тогда
$\bar{\bar{y}}_1'(x) = Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + A + B)e^x$,
$\bar{\bar{y}}_1''(x) = Ae^x + (Ax + A + B)e^x = (Ax + 2A + B)e^x$.
Подставляем это в неоднородное уравнение $y'' + y = 4xe^x$:
$(Ax + 2A + B)e^x + (Ax + B)e^x = 4xe^x$.
После сокращения на e^x имеем:
$Ax + 2A + B + Ax + B = 4x$.
Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим
при x^1: $A + A = 4$,
при x^0: $2A + B + B = 0$.
Отсюда $A = 2$, $B = -2$. Тогда
$\bar{\bar{y}}_1(x) = 2(x - 1)e^x$.

4) Найдём $\bar{\bar{y}}_2(x)$ — ЧР уравнения $y'' + y = \cos x$.
   а) *Первый способ.*
   $f_2(x) = \cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, поэтому $\bar{\bar{y}}_2(x) = \operatorname{Re} \tilde{y}_2(x)$, где $\tilde{y}_2(x)$ — ЧР уравнения $y'' + y = e^{ix}$.
   Теперь правая часть $\tilde{f}_2(x) = e^{ix} = P_0(x)e^{ix}$ — квазимногочлен, $\alpha = i$ — корень кратности 1 ХУ $\lambda^2 + 1 = 0$, поэтому ищем ЧР в виде
   $\tilde{y}_2(x) = xQ_0(x)e^{ix} = xCe^{ix}$.
   Тогда
   $\tilde{y}_2'(x) = Ce^{ix} + ixCe^{ix} = C(1 + ix)e^{ix}$,
   $\tilde{y}_2''(x) = iCe^{ix} + iC(1 + ix)e^{ix} = C(2i - x)e^{ix}$.
   Подставляем это в уравнение $y'' + y = e^{ix}$:
   $C(2i - x)e^{ix} + Cde^{ix} = e^{ix}$.
   После сокращения на e^{ix} имеем:
   $2iC - Cx + xC = 1$.
   Отсюда $C = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. Тогда
   $$\tilde{y}_2(x) = -\frac{i}{2}xe^{ix} = -\frac{i}{2}x(\cos x + i \sin x) = -\frac{i}{2}x \cos x + \frac{x \sin x}{2}.$$
   $$\bar{\bar{y}}_2(x) = \operatorname{Re} \tilde{y}_2(x) = \frac{x \sin x}{2}.$$
   б) *Второй способ*. Поскольку в уравнении $y'' + y = \cos x$ правая часть имеет вид $f_2(x) = \cos x = e^{0\cdot x}P_0(x) \cos(1 \cdot x)$, и $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i \cdot 1$ — корни кратности 1 ХУ $\lambda^2 + 1 = 0$, то мы должны искать ЧР в виде
   $\bar{\bar{y}}_2(x) = xe^{0\cdot x}(Q_0(x) \cos x + R_0(x) \sin x) = x(E \cos x + F \sin x)$.
   Тогда
   $\bar{\bar{y}}_2'(x) = x(-E \sin x + F \cos x) + E \cos x + F \sin x$,
   $\bar{\bar{y}}_2''(x) = x(-E \cos x - F \sin x) - 2E \sin x + 2F \cos x$.

Подставив это в ДУ $y'' + y = \cos x$, получим:
$-xE\cos x - xF\sin x - 2E\sin x + 2F\cos x + xE\cos x + xF\sin x = \cos x.$
$-2E\sin x + 2F\cos x = \cos x.$
Приравняв коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой части, получим
$E = 0, \qquad F = \dfrac{1}{2}.$
Отсюда $\bar{\bar{y}}_2(x) = \frac{x\sin x}{2}$.

5) ЧР исходного уравнения: $\bar{\bar{y}}(x) = \bar{\bar{y}}_1(x) + \bar{\bar{y}}_2(x) = 2(x-1)e^x + \frac{x\sin x}{2}$.

В ответе запишем ОР исходного неоднородного уравнения: $y(x) = \bar{y}(x) + \bar{\bar{y}}(x)$.
Ответ: $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 2(x-1)e^x + \frac{x\sin x}{2}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. Операторный метод. Тоже для правых частей в виде квазимногочленов:
$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$.

Введём оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$. Тогда $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$. Все эти операторы линейны. Линейное неоднородное уравнение (1) запишется в виде
$$\underbrace{(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n)}_{P(D)}\, y = f(x),$$
$$P(D)y = f. \tag{4}$$
Оператор $P(D)$ называется *операторным многочленом.*
Введём обратный к нему оператор $\frac{1}{P(D)}$, который при действии на функцию f даёт некоторое ЧР уравнения (4): $\frac{1}{P(D)} f = \bar{\bar{y}}$.
Тогда
$$P(D)\underbrace{\left[\frac{1}{P(D)} f\right]}_{\bar{\bar{y}}} = f, \qquad \frac{1}{P(D)}\underbrace{[P(D)\bar{\bar{y}}]}_{f} = \bar{\bar{y}}.$$
В силу принципа суперпозиции оператор $\frac{1}{P(D)}$ тоже является линейным:
$$\frac{1}{P(D)}[cf(x)] = c\frac{1}{P(D)} f, c = \text{const};$$
$$\frac{1}{P(D)}(f_1 + f_2) = \frac{1}{P(D)} f_1 + \frac{1}{P(D)} f_2.$$
(Докажите самостоятельно.)
Докажем формулу:
$$\boxed{\frac{1}{P(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}, \qquad \text{если } P(\alpha) \neq 0.} \tag{I}$$
Доказательство. Нам нужно доказать, что функция $\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)}$ удовлетворяет уравнению
$P(D)y = e^{\alpha x}$.
Но поскольку $De^{\alpha x} = \frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$, имеем:
$$P(D)e^{\alpha x} = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n)e^{\alpha x} =$$
$$= \underbrace{(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n)}_{P(\alpha)} e^{\alpha x} = P(\alpha)e^{\alpha x},$$
т. е.
$$P(D)e^{\alpha x} = P(\alpha)e^{\alpha x}. \tag{5}$$

Теперь, в силу линейности оператора $P(D)$, поскольку $\frac{1}{P(\alpha)}$ — это число, получаем

$$P(D)\frac{e^{\alpha x}}{P(\alpha)} = \frac{1}{P(\alpha)}P(D)e^{\alpha x} \overset{(5)}{=} \frac{1}{P(\alpha)}P(\alpha)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Заметим, что $P(\lambda) = 0$ — это ХУ (3), т. е. формула (I) применима тогда и только тогда, когда α — не корень ХУ.

Пример 2 (Филиппов № 584). Найти ЧР уравнения $y'' - 2y' = 2e^x$.
$P(D) = D^2 - 2D$.

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}2e^x = 2\frac{1}{P(D)}e^x \overset{(\mathrm{I})}{=} 2\frac{e^x}{P(1)} = 2\frac{e^x}{-1} = -2e^x,$$

поскольку $P(1) \neq 0$.
Ответ: $\bar{\bar{y}}(x) = -2e^x$.

Пример 3. Найти ЧР уравнения $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
$P(D) = D^2 - 7D + 6$.

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}\sin x = \frac{1}{P(D)}\operatorname{Im} e^{ix} = \operatorname{Im}\frac{1}{P(D)}e^{ix} \overset{(\mathrm{I})}{=} \operatorname{Im}\frac{e^{ix}}{P(i)} = \operatorname{Im}\frac{e^{ix}}{5-7i} =$$

$$= \operatorname{Im}\frac{(5+7i)(\cos x + i\sin x)}{25+49} = \frac{7\cos x + 5\sin x}{74},$$

поскольку $P(i) \neq 0$.
Ответ: $\bar{\bar{y}}(x) = \frac{7\cos x + 5\sin x}{74}$.

Заметим, что $\frac{1}{D}$ — это оператор взятия первообразной. В частности, можно положить

$$\boxed{\frac{1}{D}x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \text{если } \alpha \neq -1.} \tag{II}$$

Теперь докажем формулу

$$\boxed{\frac{1}{P(D)}[e^{\alpha x}g(x)] = e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}g(x).} \tag{III}$$

Доказательство. Заметим, что
$D(e^{\alpha x}g) = e^{\alpha x}Dg + gDe^{\alpha x} = e^{\alpha x}Dg + e^{\alpha x}\alpha g = e^{\alpha x}(D+\alpha)g.$
$D^2(e^{\alpha x}g) = D\,[D(e^{\alpha x}g)] = D[e^{\alpha x}\underbrace{(D+\alpha)g}_{h}] = D(e^{\alpha x}h) = e^{\alpha x}(D+\alpha)h = e^{\alpha x}(D+\alpha)^2 g.$

По индукции получим, что
$D^k(e^{\alpha x}g) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^k g.$
Отсюда

$$P(D)(e^{\alpha x}g) = e^{\alpha x}P(D+\alpha)g. \tag{6}$$

Нам надо доказать, что функция $e^{\alpha x}\frac{1}{P(D+\alpha)}g$ удовлетворяет уравнению
$P(D)y = e^{\alpha x}g.$
В самом деле,

$$P(D)\left[e^{\alpha x}\underbrace{\frac{1}{P(D+\alpha)}g}_{h}\right] = P(D)(e^{\alpha x}h) \overset{(6)}{=} e^{\alpha x}P(D+\alpha)h = e^{\alpha x}P(D+\alpha)\left[\frac{1}{P(D+\alpha)}g\right] =$$

$$= e^{\alpha x}g, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Пример 4. Найти ЧР уравнения $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x}$.
$P(D) = D^2 - 4D + 4 = (D-2)^2$.

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}(x^2 e^{2x}) \overset{\text{(III)}}{=} e^{2x}\frac{1}{P(D+2)}x^2 = e^{2x}\frac{1}{(D+2-2)^2}x^2 = e^{2x}\frac{1}{D^2}x^2 =$$

$$= e^{2x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x^2\right) \overset{\text{(II)}}{=} e^{2x}\frac{1}{D}\left(\frac{x^3}{3}\right) \overset{\text{(II)}}{=} e^{2x}\frac{x^4}{12}.$$

Ответ: $\bar{\bar{y}}(x) = e^{2x}\frac{x^4}{12}$.

Пример 5. Найти ЧР уравнения $y''' - y = e^x$.
$P(D) = D^3 - 1$.

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}e^x.$$

Формула (I) неприменима, поскольку $P(1) = 0$. Поэтому разложим оператор $\frac{1}{P(D)}$ на множители:

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}e^x = \frac{1}{D^3-1}e^x = \frac{1}{(D-1)(D^2+D+1)}e^x =$$

$$= \frac{1}{D-1}\left(\frac{1}{D^2+D+1}e^x\right) \overset{\text{(I)}}{=} \frac{1}{D-1}\left(\frac{e^x}{1+1+1}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{D-1}e^x.$$

Дальше формулу (I) по-прежнему нельзя применять, поэтому сделаем следующее:

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{D-1}(e^x \cdot 1) \overset{\text{(III)}}{=} \frac{1}{3}e^x\frac{1}{D+1-1}1 = \frac{1}{3}e^x\frac{1}{D}1 \overset{\text{(II)}}{=} \frac{1}{3}e^x x.$$

Ответ: $\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{3}e^x x$.

Замечание. Здесь мы воспользовались свойством

$$\frac{1}{P_1(D)P_2(D)} = \frac{1}{P_1(D)} \cdot \frac{1}{P_2(D)},$$

которое читателю предлагается доказать самостоятельно, исходя из свойства коммутативности операторных многочленов:

$$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D)$$

(которое также предлагается доказать самостоятельно).

Пример 6. Найти ЧР уравнения $y'' + y = x^2 - x + 2$.
$P(D) = D^2 + 1$.

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}(x^2 - x + 2) = \frac{1}{D^2+1}(x^2 - x + 2).$$

Поделим 1 на $1 + D^2$ в столбик так, чтобы в остатке был оператор дифференцирования D в степени, большей степени многочлена $x^2 - x + 2$:

$$\begin{array}{r|l} -\,1 & 1 + D^2 \\ \underline{1 + D^2} & \overline{1 - D^2} \\ -\,-D^2 & \\ \underline{-D^2 - D^4} & \\ D^4 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1+D^2} = 1 - D^2 + \frac{D^4}{1+D^2}.$$

Теперь

$$\bar{\bar{y}}(x) = \frac{1}{P(D)}(x^2 - x + 2) = \left(1 - D^2 + \frac{D^4}{1 + D^2}\right)(x^2 - x + 2) =$$

$$= x^2 - x + 2 - \underbrace{D^2(x^2 - x + 2)}_{=2} + \frac{1}{1 + D^2}\underbrace{D^4(x^2 - x + 2)}_{=0} = x^2 - x.$$

Ответ: $\bar{\bar{y}}(x) = x^2 - x$.

Замечание. Здесь мы воспользовались свойством коммутативности прямых и обратных операторных многочленов:

$$P_1(D)\frac{1}{P_2(D)} = \frac{1}{P_2(D)}P_1(D) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_1(D)}{P_2(D)},$$

которое читателю предлагается доказать самостоятельно.

5. Для решения задачи Коши для линейного ОДУ с постоянными коэффициентами можно применять **операционный метод** (т. е. преобразование Лапласа, см. курс ТФКП).

Уравнение Эйлера

Это линейное ОДУ с переменными коэффициентами вида

$$\boxed{{}_0x^n y^{(n)} + {}_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + {}_{n-1}xy' + {}_n y = f(x).}$$

После замены

$$x = \begin{cases} e^t, & x > 0, \\ -e^t, & x < 0, \end{cases}$$

получится линейное ОДУ с постоянными коэффициентами.

Пример 7 (Филиппов № 595). Решить уравнение $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$.

Заметим, что уравнение имеет смысл лишь в области $x > 0$. Поделив его на x, получим

$$x^2y'' - 2y = 6\frac{\ln x}{x}.$$

Это уравнение Эйлера. Сделаем замену:

$x = e^t > 0$.

Тогда $t = \ln x$.

Теперь $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ надо выразить через производные функции y по новой переменной t (будем их обозначать точками: $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$). Имеем

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(e^t)} = \frac{dy}{e^t\,dt} = \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt} = \frac{\dot{y}}{x},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{x}\right)}{d(e^t)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{x}\right)dt}{e^t\,dt} = \frac{\frac{\ddot{y}x - \dot{y}\dot{x}}{x^2}}{x} = \frac{\frac{\ddot{y}x - \dot{y}x}{x^2}}{x} = \frac{\ddot{y} - \dot{y}}{x^2}.$$

Подставив это в исходное уравнение, получим:

$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 6te^{-t}$.

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Дома доделать.