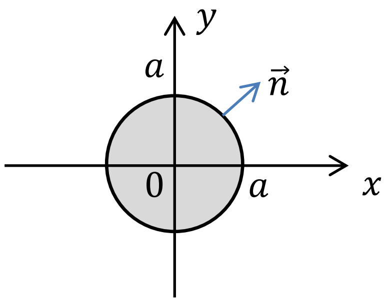
Семинар

Задачи Ш.–Л. для оператора Лапласа в полярных координатах

Пример 1 (в круге). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases} \Delta\, u + \lambda u = 0,\ 0 \le \quad < a, \\ \text{однородное ГУ — одно из трёх:} \\ \ 1)\ u|_{r=a} = 0, \\ \ 2)\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \\ \ 3)\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = 0,\ h = \text{const} > 0. \end{cases}$$

Мы знаем, что для таких ГУ все СЗ $\lambda \ge 0$, причём СЗ $\lambda = 0$ есть только у задачи Неймана.

Будем искать СФ в виде

$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$

Поскольку $\Delta\, u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$, то, подставив эту функцию в ДУ $\Delta\, u + \lambda u = 0$, получим:

$$\frac{1}{\ }\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)\Phi(\varphi) + \frac{R(r)}{\ ^2}\Phi''(\varphi) + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{\frac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \nu.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу Ш.–Л.:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Её СЗ и СФ:

$\nu_n = n^2,$

$\Phi_0(\varphi) = 1, \qquad \Phi_n(\varphi) = \cos n\varphi\,, n = 1, 2, \dots, \qquad \Phi_{-n}(\varphi) = \sin n\varphi\,, n = 1, 2, \dots$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$\ ^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0.$

В этом уравнении без ограничения общности можно считать $n \ge 0$.

а) если $\lambda = 0$, то это уравнение Эйлера:

$\ ^2R''(r) + \quad R'(r) - n^2R(r) = 0.$

Его ОР:

$$R(r) = \begin{cases} A + B\ln \quad, & n = 0, \\ Ar^n + Br^{-n}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В силу ограниченности решения при $\quad = 0$, имеем $B = 0$. Тогда, опуская произвольный множитель A, получим:

$$R(r) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \ ^n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

б) если $\lambda > 0$, то сделаем замену $\sqrt{\lambda} r = t \ge 0$, тогда

$$R'(r) = \quad \frac{dR}{dr} = \sqrt{\lambda} r\frac{dR}{d(\sqrt{\lambda} r)} = t\frac{dR}{dt},$$

и, аналогично,

$^2R''(r) = t^2\dfrac{d^2R}{dt^2}.$

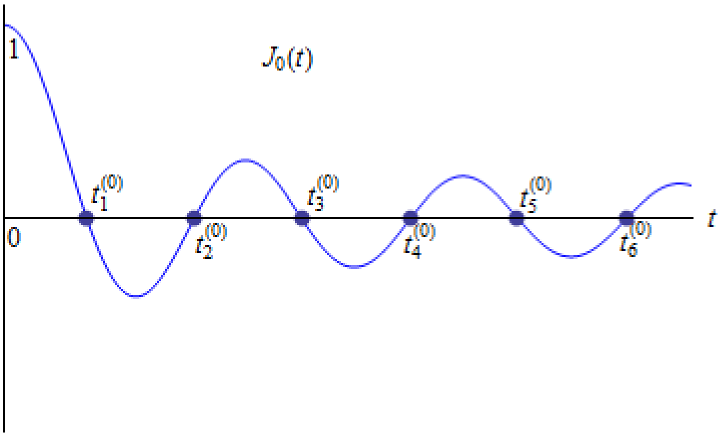
Теперь ДУ принимает вид:

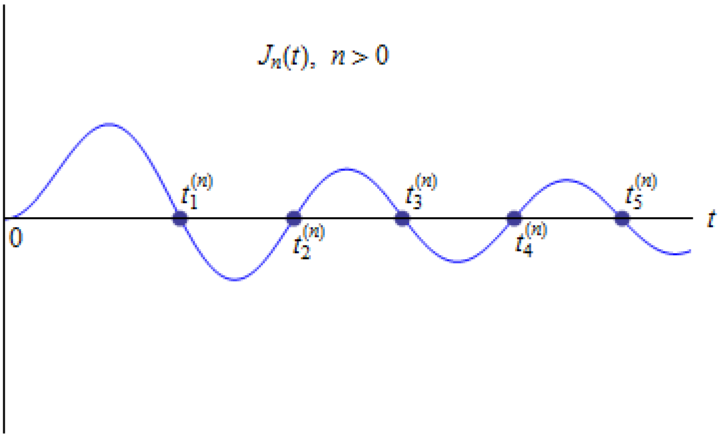
$$t^2\frac{d^2R}{dt^2} + t\frac{dR}{dt} + (t^2 - n^2)R = 0.$$

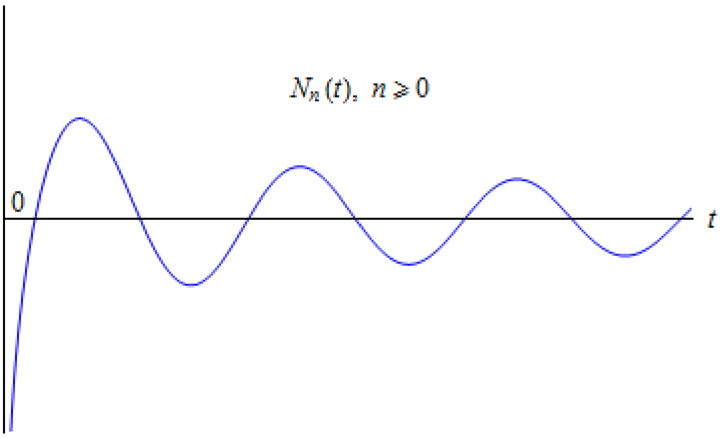
Это уравнение называется *уравнением Бесселя n-го порядка.* Любое его решение называется *цилиндрической функцией n-го порядка.* ОР можно записать в виде:

$$R = AJ_n(t) + BN_n(t),$$

где $J_n(t)$ — *функция Бесселя n-го порядка*, $N_n(t)$ — *функция Неймана n-го порядка.*







Все цилиндрические функции — квазипериодические.

При $t \to +\infty$ у всех цилиндрических функций амплитуда убывает пропорционально $\frac{1}{\sqrt{t}}$, а период стремится к 2π.

При малых t:

$$J_n(t) \sim t^n, \qquad n \geq 0, \qquad t \to 0+0,$$
$$N_0(t) \sim \ln t\,, \qquad t \to 0+0,$$
$$N_n(t) \sim -\frac{1}{t^n}, \qquad n > 0,\ \ t \to 0+0.$$

Из условия ограниченности решения при $= 0$ имеем $B = 0$. Тогда, опуская произвольный множитель A, получим:

$$R = J_n(t),$$

т.е.

$$R(r) = J_n\big(\sqrt{\lambda}r\big).$$

Теперь подставим функцию $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ в ГУ.

1) $u|_{r=a} = 0.$

Отсюда получим:

$$R(a) = 0.$$

Поскольку для задачи Дирихле все СЗ $\lambda > 0$, то $R(r) = J_n\big(\sqrt{\lambda}r\big)$, и должно выполняться равенство

$$J_n\big(\sqrt{\lambda}a\big) = 0.$$

Функция Бесселя $J_n(t)$ имеет счётное число положительных нулей $t_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. рисунок): $J_n\left(t_k^{(n)}\right) = 0$. Им будут соответствовать СЗ $\lambda_k^{(n)}$: $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a = t_k^{(n)}$. Таким образом, функции $R(r)$, удовлетворяющие условию Дирихле $R(a) = 0$, имеют вид: $R_{nk}(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)$.

Тогда получаем систему СФ задачи Дирихле в круге:

$$\boxed{\begin{aligned}
&u_{0k}(r,\varphi) = R_{0k}(r)\Phi_0(\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right), \qquad k = 1, 2, \ldots;\\
&u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;\ \ k = 1, 2, \ldots;\\
&u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;\ \ k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}}$$

Они образуют ортогональную систему в круге:

$$\int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} u_{n_1k_1}(r,\varphi)u_{n_2k_2}(r,\varphi)\,d\varphi = 0,\ \text{если}\ (n_1, k_1) \neq (n_2, k_2).$$

Можно показать, что эта система полна. Поэтому других СФ у задачи Ш.–Л. нет. В силу теоремы Стеклова любую достаточно гладкую функцию $f(r,\varphi)$ можно разложить в ряд Фурье по СФ задачи Ш.–Л. в круге:

$$f(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{nk}u_{nk}(r,\varphi),$$

где

$$C_{nk} = \frac{1}{\|u_{nk}\|^2}\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)u_{nk}(r,\varphi)\,d\varphi.$$

Вычислим $\|u_{nk}\|^2$:

$$\|u_{nk}\|^2 = \int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi} u_{nk}^2(r,\varphi)\,d\varphi = \underbrace{\int_0^a rR_{nk}^2(r)\,dr}_{\|R_{nk}\|^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi)\,d\varphi}_{\|\Phi_n\|^2} = \|R_{nk}\|^2\cdot\|\Phi_n\|^2.$$

Мы знаем, что $\|\Phi_n\|^2 = \pi(1+\delta_{n0})$. Вычислим $\|R_{nk}\|^2$:

$$\|R_{nk}\|^2 = \int_0^a rJ_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)dr.$$

Сделаем замену: $\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r = t$. Тогда

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a} tJ_n^2(t)\,dt.$$

Если $Z_n(t)$ — произвольная цилиндрическая функция n-го порядка, то справедлива формула:

$$\boxed{\int tZ_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[Z_n'^2(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)Z_n^2(t)\right] + \text{const.}}$$

(Вывод формулы см. в БК или в конце семинара.) Используя эту формулу, получаем:

$$\|R_{nk}\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[J_n'^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\right]. \tag{1}$$

Для условия Дирихле $J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0$, откуда

$$\boxed{\|R_{nk}\|_1^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).} \tag{2}$$

(Индекс 1 здесь означает ГУ первого рода.)

Тогда

$$\|u_{nk}\|_1^2 = \|R_{nk}\|_1^2 \cdot \|\Phi_n\|^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1 + \delta_{n0}).$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \dots$;

$$u_{0k}(r, \varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$$u_{nk}(r, \varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{-nk}(r, \varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \dots;$$

$$\|u_{nk}\|_1^2 = \frac{a^2}{2}J_n'^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1 + \delta_{n0}).$$

2) $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0.$

Отсюда получим:

$R'(a) = 0.$

а) $\lambda = 0.$

Тогда

$$R(r) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ r^n, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ГУ $R'(a) = 0$ удовлетворяет только функция $R(r) = 1$ при $n = 0$.

Обозначим: $\lambda_0^{(0)} = 0$ — СЗ, $u_{00}(r) = R_{00}(r)\Phi_0(\varphi) = 1$ — СФ. Очевидно, $\|u_{00}\|^2 = \pi a^2$.

б) $\lambda > 0.$

Тогда

$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r).$

Подставив в ГУ $R'(a) = 0$, получим:

$\cancel{\sqrt{\lambda}}J_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0.$

Это уравнение имеет счётное число положительных корней (они соответствуют точкам локального экстремума функции $J_n(t)$, см. рисунок): $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда

$$R_{nk}(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right).$$

Из формулы (1) с учётом условия $J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = 0$ получим:

$$\boxed{\|R_{nk}\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).} \qquad (3)$$

Ответ: $\lambda_0^{(0)} = 0$; $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $J_n'(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

$u_{00}(r,\varphi) = 1$,

$$u_{0k}(r,\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\|u_{nk}\|_2^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1 + \delta_{n0}), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$\|u_{00}\|^2 = \pi a^2$.

3) $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right)\right|_{r=a} = 0$, $h = \mathrm{const} > 0$.

В этом случае все СЗ $\lambda > 0$, поэтому

$$R_{nk}(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right),$$

где $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Из формулы (1) с учётом этого уравнения можно получить два различных выражения для квадрата нормы:

$$\boxed{\|R_{nk}\|_3^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2h^2 - n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k^{(n)}a^2 - n^2}{a^2h^2}\right)J_n'^{\,2}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right).} \quad (4)$$

Ответ: $\lambda_k^{(n)}$ — k-й положительный корень уравнения $\sqrt{\lambda}J_n'(\sqrt{\lambda}a) + hJ_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

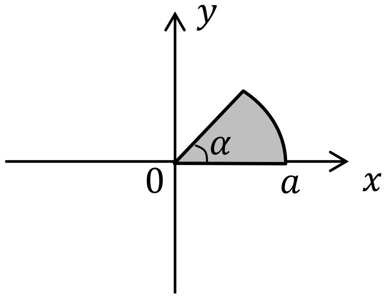
$$u_{0k}(r,\varphi) = J_0\left(\sqrt{\lambda_k^{(0)}}r\right),$$

$$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\cos n\varphi, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

$$u_{-nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_{-n}(\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\sin n\varphi, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\|u_{nk}\|_3^2 = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2h^2 - n^2}{\lambda_k^{(n)}a^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}) =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k^{(n)}a^2 - n^2}{a^2h^2}\right){J_n'}^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}a\right)\pi(1+\delta_{n0}).$$

Пример 2 (в круговом секторе). Найти СЗ и СФ задачи Ш.–Л.:



$$\begin{cases}\Delta\, u + \lambda u = 0,\ 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \alpha,\\ \text{однородные ГУ при } r = a,\ \varphi = 0,\ \varphi = \alpha.\end{cases}$$

По-прежнему будем искать СФ в виде:
$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$
После разделения переменных
$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\big(rR'(r)\big)}{R(r)} + \lambda r^2 = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu$$
получим задачу Ш.–Л. для функции $\Phi(\varphi)$:
$$\begin{cases}\Phi''(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \alpha,\\ \text{однородные ГУ при } \varphi = 0, \qquad \varphi = \alpha.\end{cases}$$
Пусть $\nu_n \geq 0$ и $\Phi_n(\varphi)$ — СЗ и СФ этой задачи. Тогда для функции $R(r)$ получим ДУ:
$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \nu_n)R(r) = 0.$
Решения этого уравнения, ограниченные при $r = 0$, имеют вид (опуская постоянный множитель)

а) при $\lambda = 0$: $R(r) = r^{\sqrt{\nu_n}}$,

б) при $\lambda > 0$: $R(r) = J_{\sqrt{\nu_n}}\big(\sqrt{\lambda}r\big)$.

СЗ $\lambda_k^{(n)}$ находятся из однородного ГУ при $r = a$. Тогда СФ имеют вид:
$$u_{nk}(r,\varphi) = R_{nk}(r)\Phi_n(\varphi) = J_{\sqrt{\nu_n}}\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r\right)\Phi_n(\varphi), \qquad k = 1,2,\ldots$$
Кроме этих СФ, в задаче Неймана имеется ещё СФ $u_{00}(r,\varphi) = 1$, соответствующая СЗ $\lambda_0^{(0)} = 0$.
Для вычисления $\|u_{nk}\|^2 = \|R_{nk}\|^2 \cdot \|\Phi_n\|^2$ следует использовать формулы (2), (3), (4), в которых n надо заменить на $\sqrt{\nu_n}$.

ДЗ 6. БК с. 62 № 3 (найти СЗ, СФ и $\|u_{nk}\|^2$).

Дополнительный материал

Вывод формулы
$$\int tZ_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[{Z_n'}^2(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right)Z_n^2(t)\right] + \text{const}$$
для произвольной цилиндрической функции n-го порядка $Z_n(t)$.
Запишем уравнение Бесселя n-го порядка, которому удовлетворяет функция $Z_n(t)$:
$t^2Z_n''(t) + tZ_n'(t) + (t^2 - n^2)Z_n(t) = 0.$
Умножим его на $Z_n'(t)$ и проинтегрируем:
$$\int t^2Z_n''(t)Z_n'(t)\,dt + \int t{Z_n'}^2(t)\,dt + \int (t^2 - n^2)Z_n(t)Z_n'(t)\,dt = \text{const}.$$

Применим формулу интегрирования по частям к первому и последнему интегралу:

$$\int t^2 \underbrace{Z_n''(t) Z_n'(t)\,dt}_{d\left(\frac{Z_n'^{\,2}(t)}{2}\right)} + \int t Z_n'^{\,2}(t)\,dt + \int (t^2 - n^2) \underbrace{Z_n(t) Z_n'(t)\,dt}_{d\left(\frac{Z_n^2(t)}{2}\right)} =$$

$$= \frac{t^2}{2} Z_n'^{\,2}(t) - \int t Z_n'^{\,2}(t)\,dt + \int t Z_n'^{\,2}(t)\,dt + \frac{(t^2 - n^2)}{2} Z_n^2(t) - \int t Z_n^2(t)\,dt = \mathrm{const}.$$

Отсюда

$$\int t Z_n^2(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\left[Z_n'^{\,2}(t) + \left(1 - \frac{n^2}{t^2}\right) Z_n^2(t)\right] + \mathrm{const},$$

ч.т.д.