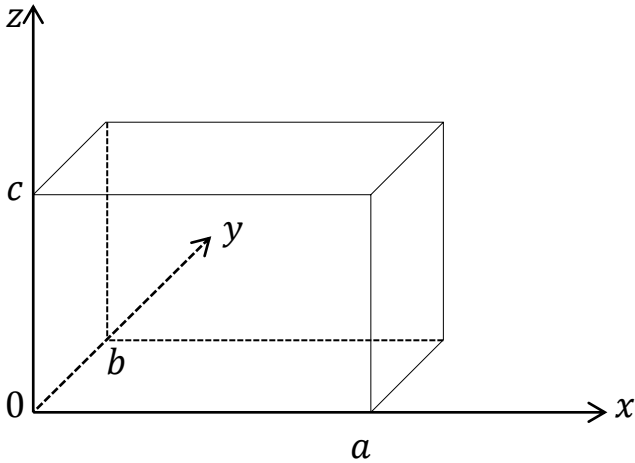


Семинар

Пример 1 (прямоугольный параллелепипед).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, & 0 < z < c, \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y, z), & & u|_{x=a} = \varphi_2(y, z), \\ u|_{y=0} = \psi_1(x, z), & & u|_{y=b} = \psi_2(x, z), \\ u|_{z=0} = \chi_1(x, y), & & u|_{z=c} = \chi_2(x, y). \end{cases} \quad (0)$$

Будем искать решение задачи (0) в виде:

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

где функции u_1 , u_2 и u_3 являются решениями следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, & 0 < z < c, \\ u_1|_{x=0} = \varphi_1(y, z), & & u_1|_{x=a} = \varphi_2(y, z), \\ u_1|_{y=0} = 0, & & u_1|_{y=b} = 0, \\ u_1|_{z=0} = 0, & & u_1|_{z=c} = 0. \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, & 0 < z < c, \\ u_2|_{x=0} = 0, & & u_2|_{x=a} = 0, \\ u_2|_{y=0} = \psi_1(x, z), & & u_2|_{y=b} = \psi_2(x, z), \\ u_2|_{z=0} = 0, & & u_2|_{z=c} = 0. \end{cases} \quad (II)$$

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, & 0 < z < c, \\ u_3|_{x=0} = 0, & & u_3|_{x=a} = 0, \\ u_3|_{y=0} = 0, & & u_3|_{y=b} = 0, \\ u_3|_{z=0} = \chi_1(x, y), & & u_3|_{z=c} = \chi_2(x, y). \end{cases} \quad (III)$$

В самом деле, если функции u_1 , u_2 , u_3 являются решениями задач (I), (II), (III), соответственно, то функция $u = u_1 + u_2 + u_3$ удовлетворяет всем условиям исходной задачи (0).

Рассмотрим задачу (I). Сначала найдём ЧР уравнения Лапласа $\Delta u_1 = 0$ в прямоугольном параллелепипеде, удовлетворяющие однородным ГУ: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$, и представимые в виде:

$$u_1(x, y, z) = X(x) \cdot v(y, z) \neq 0.$$

Тогда уравнение Лапласа $\Delta u_1 = 0$ принимает вид:

$$\Delta u_1 = (u_1)_{xx} + (u_1)_{yy} + (u_1)_{zz} = X''(x)v(y, z) + X(x) \Delta_{yz} v(y, z) = 0,$$

где $\Delta_{yz} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Разделим переменные:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\Delta_{yz} v(y, z)}{v(y, z)} = \lambda.$$

С учётом однородных ГУ: $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$, для функции $v(y, z)$ получим задачу Ш.-Л. в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \Delta_{yz} v(y, z) + \lambda v(y, z) = 0, & 0 < y < b, & 0 < z < c, \\ v|_{y=0} = 0, & & v|_{y=b} = 0, \\ v|_{z=0} = 0, & & v|_{z=c} = 0. \end{cases}$$

Путём разделения переменных эта задача сводится к двум задачам Ш.–Л. на отрезках (по y и по z) с условиями Дирихле. Её СЗ и СФ:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{c}\right)^2, \quad v_{nm}(y, z) = \sin \frac{\pi n y}{b} \cdot \sin \frac{\pi m z}{c},$$

$$\begin{aligned} \|v_{nm}\|^2 &= \int_0^b dy \int_0^c v_{nm}^2(y, z) dz = \int_0^b dy \int_0^c \sin^2 \frac{\pi n y}{b} \sin^2 \frac{\pi m z}{c} dz = \\ &= \int_0^b \sin^2 \frac{\pi n y}{b} dy \int_0^c \sin^2 \frac{\pi m z}{c} dz = \left\| \sin \frac{\pi n y}{b} \right\|^2 \cdot \left\| \sin \frac{\pi m z}{c} \right\|^2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{bc}{4}, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для функции $X(x)$ имеем ДУ:

$$X_{nm}''(x) - \lambda_{nm} X_{nm}(x) = 0, \quad 0 < x < a. \quad (1)$$

Заметим, что в данном случае все $\lambda_{nm} > 0$.

С учётом замечания, сделанного в конце семинара 3, удобно записать ОР ДУ (1) в виде:

$$X_{nm}(x) = A_{nm} X_{nm}^{(1)}(x) + B_{nm} X_{nm}^{(2)}(x),$$

где функции $X_{nm}^{(1)}(x)$, $X_{nm}^{(2)}(x)$ удовлетворяют ДУ (1), являются ЛНЗ, функция $X_{nm}^{(1)}(x)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $x = 0$, а функция $X_{nm}^{(2)}(x)$ удовлетворяет соответствующему *однородному* ГУ при $x = a$, т.е. в нашем случае — условиям Дирихле:

$$X_{nm}^{(1)}(0) = 0, \quad X_{nm}^{(2)}(a) = 0.$$

Легко проверить, что функции

$$X_{nm}^{(1)}(x) = \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} x, \quad X_{nm}^{(2)}(x) = \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} (x - a)$$

удовлетворяют всем перечисленным выше условиям.

Таким образом, имеем ЧР уравнения Лапласа, удовлетворяющие однородным ГУ $u_1|_{y=0} = 0$, $u_1|_{y=b} = 0$, $u_1|_{z=0} = 0$, $u_1|_{z=c} = 0$:

$$u_1^{(n,m)}(x, y, z) = X_{nm}(x) v_{nm}(y, z) = [A_{nm} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} x + B_{nm} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} (x - a)] v_{nm}(y, z).$$

Ищем решение задачи (I) в виде их суммы:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_1^{(n,m)}(x, y, z) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} x + B_{nm} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} (x - a)] v_{nm}(y, z). \end{aligned} \quad (*)$$

Функция (*) (при условии, что ряд можно дифференцировать почленно два раза) удовлетворяет всем условиям задачи (I), кроме неоднородных ГУ:

$$u_1|_{x=0} = \varphi_1(y, z), \quad u_1|_{x=a} = \varphi_2(y, z).$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются подстановкой ряда (*) в неоднородные ГУ:

$$\begin{cases} u_1|_{x=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} a v_{nm}(y, z) = \varphi_1(y, z), \\ u_1|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \text{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} a v_{nm}(y, z) = \varphi_2(y, z). \end{cases} \quad (2)$$

Разложим функции $\varphi_1(y, z)$, $\varphi_2(y, z)$ в ряд Фурье по СФ $v_{nm}(y, z)$ задачи Ш.–Л. в прямоугольнике:

$$\varphi_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} v_{nm}(y, z), \quad \varphi_2(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm} v_{nm}(y, z),$$

$$C_{nm} = \frac{1}{\|v_{nm}\|^2} \int_0^b dy \int_0^c \varphi_1(y, z) v_{nm}(y, z) dz,$$

$$D_{nm} = \frac{1}{\|v_{nm}\|^2} \int_0^b dy \int_0^c \varphi_2(y, z) v_{nm}(y, z) dz.$$

Тогда, приравнявая соответствующие коэффициенты рядов Фурье в уравнениях (2), получим:

$$A_{nm} = \frac{D_{nm}}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} a}, \quad B_{nm} = -\frac{C_{nm}}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{nm}} a}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (*), получим решение задачи (I). В силу теоремы существования и единственности, других решений нет.

Задачи (II) и (III) решаются аналогично. Решение исходной задачи (I) есть сумма решений задач (I), (II), (III):

$$u = u_1 + u_2 + u_3.$$

Замечание: в случае задачи Неймана исходная задача (0) может быть разрешима, а задачи (I), (II), (III) могут быть неразрешимы. Тогда описанный алгоритм для решения задачи (0) не подходит.

Уравнение Лапласа в полярных координатах

От декартовых координат (x, y) на плоскости перейдём к полярным координатам (r, φ) : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. При этом оператор Лапласа преобразуется следующим образом (дома проверить):

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Найдём ЧР уравнения Лапласа на плоскости, представимые в полярных координатах в виде:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \neq 0.$$

Подставим это выражение в уравнение Лапласа $\Delta u = 0$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rR'(r))\Phi(\varphi) + \frac{R(r)}{r^2} \Phi''(\varphi) = 0.$$

Умножим уравнение на $\frac{r^2}{R(r)\Phi(\varphi)}$ и разделим переменные:

$$\frac{r \frac{d}{dr} (rR'(r))}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

Для функции $\Phi(\varphi)$ получим задачу Ш.-Л. с периодическими ГУ:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, & \varphi \in \mathbb{R}, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) \equiv \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Её СЗ и СФ (см. семинар 2 и таблицу из семинара 3):

$$\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, & n \geq 0, \\ \sin n\varphi, & n < 0, \end{cases} \quad \|\Phi_n\|^2 = \pi(1 + \delta_{n0}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для функции $R(r)$ получим ДУ:

$$r \frac{d}{dr} (rR'_n(r)) - \lambda_n R_n(r) = 0.$$

$$r^2 R''_n(r) + rR'_n(r) - n^2 R_n(r) = 0.$$

Это уравнение Эйлера. Его ОР имеет вид (дома проверить):

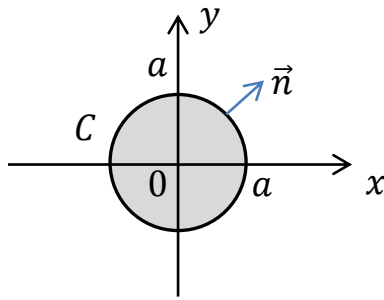
$$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0, \\ A_n r^n + B_n r^{-n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили ЧР уравнения Лапласа на плоскости:

$$u_n(r, \varphi) = R_n(r) \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0, \\ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\varphi, & n = 1, 2, \dots, \\ (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\varphi, & n = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Заметим, что функции $\ln r$ и r^{-n} при $n > 0$ неограничены при $r = 0$.

Пример 2 (в круге).



$$\begin{cases} \Delta u = 0, & r < a, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=a} = f(\varphi). \end{cases}$$

Здесь \vec{n} — единичная внешняя нормаль к кругу.

Имеем задачу Неймана, она разрешима \Leftrightarrow

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} dl = \int_0^{2\pi} f(\varphi) a d\varphi = 0, \text{ т.е. } \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

При этом решение определено с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

Заметим, что с учётом направления внешней нормали ГУ Неймана можно переписать в виде:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = f(\varphi).$$

Ищем решение в виде суммы найденных выше частных решений уравнения Лапласа на плоскости:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(r, \varphi) = \\ &= A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi]. \end{aligned}$$

Функция $u(r, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа *внутри* круга, значит, она непрерывна и, следовательно, ограничена в круге; тогда $B_0 = 0, C_n = 0, D_n = 0, n = 1, 2, \dots$

Значит,

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (**)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа в круге (при условии, что ряд можно дважды дифференцировать почленно).

Подставляем в ГУ:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} n a^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \quad (3)$$

Разложим функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $n(\varphi)$:

$$f(\varphi) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi),$$

где $E_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0$ (в силу условия разрешимости),

$$E_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad F_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Подставляем этот ряд в уравнение (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos n\varphi + F_n \sin n\varphi).$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих членах ряда Фурье, получим:

$$A_n = \frac{E_n}{na^{n-1}}, \quad B_n = \frac{F_n}{na^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставив найденные коэффициенты в ряд (**), получим решение задачи Неймана в круге. Коэффициент A_0 остаётся произвольным.

Например, пусть $f(\varphi) = 3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2$. Это выражение преобразуется к виду $f(\varphi) = \cos 2\varphi$. Проверим условие разрешимости:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 0 \text{ — выполнено.}$$

Функция уже разложена в ряд Фурье по тригонометрической системе, который состоит из одного слагаемого. Подставим её в уравнение (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \cos 2\varphi.$$

Приравнявая коэффициенты, находим:

$$A_2 = \frac{1}{2a}; \quad A_n = 0, n = 1, 3, 4, \dots; \quad B_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

Решение краевой задачи имеет вид (**):

$$u(r, \varphi) = A_0 + \frac{r^2}{2a} \cos 2\varphi,$$

где A_0 — произвольная константа.

ДЗ БК с. 117 № 7, с. 116 № 1(б,в,г).