Семинар 8

Система линейных неоднородных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t),\\ \vdots\\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t),\end{cases} \tag{1}$$

где $x_1(t)$, …, $x_n(t)$ — неизвестные функции, $f_1(t)$, …, $f_n(t)$ — известные функции, a_{ij} — постоянные коэффициенты.

Методы решения неоднородной системы.

1. Исключение неизвестных функций. Путём последовательного исключения неизвестных функций систему сводят к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким уравнениям меньшего порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию.

Пример 1 (Филиппов № 841). Решить систему $\begin{cases}\dot{x} = 2x - y,\\ \dot{y} = x + 2e^t.\end{cases}$

Из второго уравнения: $x = \dot{y} - 2e^t$. Подставив это в первое уравнение, получим:

$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = -2e^t$.

ХУ:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$

$(\lambda - 1)^2 = 0.$

$\lambda = 1, \qquad p = 2.$

Тогда

$$y = C_1e^t + C_2te^t + \frac{1}{(D-1)^2}(-2e^t) = C_1e^t + C_2te^t - t^2e^t.$$

Откуда

$x = \dot{y} - 2e^t = C_1e^t + C_2e^t + C_2te^t - 2te^t - t^2e^t - 2e^t.$

Ответ: $\begin{cases}x = (C_1 + C_2 + C_2t - t^2 - 2t - 2)e^t,\\ y = (C_1 + C_2t - t^2)e^t,\end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2. Метод вариации постоянных.

Запишем неоднородную систему (1) в матричном виде:

$$\dot{X} = AX + F, \tag{2}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$ — столбец неизвестных функций, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$ — столбец известных функций.

Соответствующая однородная система:

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X}. \tag{3}$$

Если ОР однородной системы (3) имеет вид

$$\bar{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_kX_k(t),$$

то ОР неоднородной системы (2) нужно искать в виде

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) X_k(t),$$
где функции $C_k(t)$ определяются подстановкой в неоднородную систему (2).

Пример 2. Решим неоднородную систему из примера 1: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

ОР соответствующей однородной системы $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = 2\bar{x} - \bar{y}, \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x} \end{cases}$ получено на прошлом семинаре и имеет вид:
$$\begin{cases} \bar{x} = (C_1 t + C_1 + C_2)e^t, \\ \bar{y} = (C_1 t + C_2)e^t. \end{cases}$$
Тогда ОР неоднородной системы нужно искать в виде:
$$\begin{cases} x = [C_1(t)t + C_1(t) + C_2(t)]e^t, \\ y = [C_1(t)t + C_2(t)]e^t. \end{cases}$$
Подставив это в неоднородную систему, получим:
$$\begin{cases} \left(\dot{C}_1 t + C_1 + \dot{C}_1 + \dot{C}_2\right)e^t + (C_1 t + C_1 + C_2)e^t = 2(C_1 t + C_1 + C_2)e^t - (C_1 t + C_2)e^t, \\ \left(\dot{C}_1 t + C_1 + \dot{C}_2\right)e^t + (C_1 t + C_2)e^t = (C_1 t + C_1 + C_2)e^t + 2e^t. \end{cases}$$
Отсюда
$$\begin{cases} \dot{C}_1 t + \dot{C}_1 + \dot{C}_2 = 0, \\ \dot{C}_1 t + \dot{C}_2 = 2. \end{cases}$$
Вычтя из первого уравнения второе, получим
$$\dot{C}_1 = -2.$$
Отсюда
$$C_1(t) = -2t + \tilde{C}_1, \qquad \tilde{C}_1 \in \mathbb{R}.$$
Подставив $\dot{C}_1 = -2$ во второе уравнение, получим
$$\dot{C}_2 = 2 + 2t.$$
Отсюда
$$C_2(t) = 2t + t^2 + \tilde{C}_2, \qquad \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}.$$
Тогда ОР неоднородной системы имеет вид
$$\begin{cases} x = \left(-2t^2 + \tilde{C}_1 t - 2t + \tilde{C}_1 + 2t + t^2 + \tilde{C}_2\right)e^t = \left(\tilde{C}_1 t + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - t^2\right)e^t, \\ y = \left(-2t^2 + \tilde{C}_1 t + 2t + t^2 + \tilde{C}_2\right)e^t = \left(\tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2 - t^2 + 2t\right)e^t. \end{cases}$$
Оно совпадает с полученным в примере 1 с точностью до обозначения произвольных констант.

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 t + C_1 + C_2 - t^2)e^t, \\ y = (C_1 t + C_2 - t^2 + 2t)e^t, \end{cases}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Построение ЧР неоднородной системы с помощью матрицы Коши.

ОР системы (2) имеет вид:
$$X(t) = \bar{X}(t) + \bar{\bar{X}}(t),$$
где $\bar{X}(t)$ — ОР однородной системы (3), $\bar{\bar{X}}(t)$ — ЧР неоднородной системы (2).
Одно из ЧР системы (2) имеет вид:
$$\bar{\bar{X}}(t) = \int^{t} K(t-s)F(s)\,ds,$$

где $K(t-s)$ — *матрица Коши* (размера $n \times n$), которая удовлетворяет условиям:
$\begin{cases} \dot{K}(t) = AK(t), \\ K(0) = E. \end{cases}$
Решение задачи Коши
$\begin{cases} \dot{X} = AX + F, \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$
имеет вид

$$X(t) = K(t-t_0)X_0 + \int\limits_{t_0}^{t} K(t-s)F(s)\,ds.$$

Пример 3. Решим систему из примеров 1, 2: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

Здесь $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

ОР однородной системы получено на прошлом семинаре и имеет вид:
$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 t + C_1 + C_2)e^t \\ (C_1 t + C_2)e^t \end{pmatrix}$.
Найдём матрицу Коши. Она удовлетворяет условиям
$\begin{cases} \dot{K} = AK, \\ K(0) = E, \end{cases}$
значит, каждый столбец этой матрицы есть решение однородной системы. Тогда
$K(t) = \begin{pmatrix} (C_1 t + C_1 + C_2)e^t & (C_3 t + C_3 + C_4)e^t \\ (C_1 t + C_2)e^t & (C_3 t + C_4)e^t \end{pmatrix}$.
Неизвестные коэффициенты C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из условия $K(0) = E$, т. е.
$\begin{pmatrix} C_1 + C_2 & C_3 + C_4 \\ C_2 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
откуда $C_2 = 0$, $C_4 = 1$, $C_1 = 1$, $C_3 = -1$. Тогда
$K(t) = \begin{pmatrix} t+1 & -t \\ t & -t+1 \end{pmatrix} e^t$, $\quad K(t-s) = \begin{pmatrix} t-s+1 & -t+s \\ t-s & -t+s+1 \end{pmatrix} e^{t-s}$ — матрица Коши.
Найдём ЧР неоднородной системы:

$$\bar{\bar{X}}(t) = \int^{t} K(t-s)F(s)\,ds = \int^{t} \begin{pmatrix} t-s+1 & -t+s \\ t-s & -t+s+1 \end{pmatrix} e^{t-s} \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^s \end{pmatrix} ds =$$

$$= e^t \int^{t} \begin{pmatrix} t-s+1 & -t+s \\ t-s & -t+s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ds = e^t \int^{t} \begin{pmatrix} -2t+2s \\ -2t+2s+2 \end{pmatrix} ds =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -2ts + s^2 \\ -2ts + s^2 + 2s \end{pmatrix}\Bigg|^{s=t} = e^t \begin{pmatrix} -2t^2 + t^2 \\ -2t^2 + t^2 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ -t^2 + 2t \end{pmatrix} e^t.$$

Тогда ОР неоднородной системы имеет вид:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \bar{X}(t) + \bar{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} (C_1 t + C_1 + C_2)e^t \\ (C_1 t + C_2)e^t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -t^2 \\ -t^2 + 2t \end{pmatrix} e^t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Оно совпадает с полученным в примере 2.

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 t + C_1 + C_2 - t^2)e^t, \\ y = (C_1 t + C_2 - t^2 + 2t)e^t, \end{cases}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. Построение ЧР неоднородной системы методом неопределённых коэффициентов.

1) Если неоднородность имеет вид
$$F(t) = \begin{pmatrix} P_m(t) \\ \vdots \\ Q_m(t) \end{pmatrix} e^{\alpha t},$$
где $P_m(t)$, …, $Q_m(t)$ — многочлены степени не выше m, то ЧР неоднородной системы (2) нужно искать в виде
$$\bar{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} R_{m+p}(t) \\ \vdots \\ S_{m+p}(t) \end{pmatrix} e^{\alpha t},$$
где $R_{m+p}(t)$, …, $S_{m+p}(t)$ — многочлены степени $m+p$ с неизвестными коэффициентами;
$p = 0$, если α — не корень ХУ для соответствующей однородной системы,
и p — кратность корня α в противном случае.
2) Если неоднородность имеет вид
$$F(t) = \begin{pmatrix} P_m(t) \\ \vdots \\ Q_m(t) \end{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t \ \text{ или } F(t) = \begin{pmatrix} P_m(t) \\ \vdots \\ Q_m(t) \end{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t,$$
то
   а) либо надо искать ЧР в виде вещественной или мнимой части от ЧР для $\tilde{F}(t) = P_m(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$,
   б) либо сразу искать ЧР в виде
$$\bar{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} R_{m+p}(t)\cos\beta t + S_{m+p}(t)\sin\beta t \\ \vdots \\ U_{m+p}(t)\cos\beta t + V_{m+p}(t)\sin\beta t \end{pmatrix} e^{\alpha t},$$
   где $p = 0$, если $\alpha \pm i\beta$ — не корни ХУ,
   и p — их кратность в противном случае.
3) Принцип суперпозиции: если $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, то $\bar{\bar{X}}(t) = \bar{\bar{X}}_1(t) + \bar{\bar{X}}_2(t)$, где $\bar{\bar{X}}_1(t)$ — ЧР для $F_1(t)$, $\bar{\bar{X}}_2(t)$ — ЧР для $F_2(t)$.

Пример 4. Решим систему из примеров 1–3: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

ОР однородной системы получено на прошлом семинаре и имеет вид:
$$\begin{cases} \bar{x}(t) = (C_1 t + C_1 + C_2)e^t, \\ \bar{y}(t) = (C_1 t + C_2)e^t. \end{cases}$$
ХУ для однородной системы имеет корень $\lambda = 1$ кратности $p = 2$.

Здесь $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} P_0(t) \\ Q_0(t) \end{pmatrix} e^t$, $m = 0$, $\alpha = 1$ — корень ХУ кратности $p = 2$, поэтому будем искать ЧР в виде:
$$\bar{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}(t) \\ \bar{\bar{y}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} (g_1 + g_2 t + g_3 t^2)e^t \\ (g_4 + g_5 t + g_6 t^2)e^t \end{pmatrix}.$$
Подставив это в неоднородную систему, получим:
$$\begin{cases} (g_2 + 2g_3 t)e^t + (g_1 + g_2 t + g_3 t^2)e^t = 2(g_1 + g_2 t + g_3 t^2)e^t - (g_4 + g_5 t + g_6 t^2)e^t, \\ (g_5 + 2g_6 t)e^t + (g_4 + g_5 t + g_6 t^2)e^t = (g_1 + g_2 t + g_3 t^2)e^t + 2e^t. \end{cases}$$
Сократив на e^t и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим систему:

$$\begin{cases} g_3 = 2g_3 - g_6, \\ 2g_3 + g_2 = 2g_2 - g_5, \\ g_2 + g_1 = 2g_1 - g_4, \\ g_6 = g_3, \\ 2g_6 + g_5 = g_2, \\ g_5 + g_4 = g_1 + 2, \end{cases}$$
которая имеет ОР $g_3 = -1,\ g_4 = g_1 - g_2,\ g_5 = g_2 + 2,\ g_6 = -1,\ g_1,\ g_2$ — произвольные. Чтобы получить какое-то одно ЧР, положим $g_1 = g_2 = 0$. Тогда
$$\begin{cases} \bar{\bar{x}}(t) = -t^2 e^t, \\ \bar{\bar{y}}(t) = (2t - t^2)e^t. \end{cases}$$
Прибавив сюда ОР однородной системы, выпишем ОР неоднородной системы. Оно совпадает с полученным в примерах 2, 3.

Ответ: $\begin{cases} x = (C_1 t + C_1 + C_2 - t^2)e^t, \\ y = (C_1 t + C_2 - t^2 + 2t)e^t, \end{cases}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 5 (Филиппов № 827). Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

1) Соответствующая однородная система
$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y}, \\ \dot{\bar{y}} = 2\bar{x} + \bar{y} \end{cases}$$
имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, ХУ
$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = -\lambda + \lambda^2 - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$
корни которого $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ являются простыми.
Для $\lambda_1 = 2$ СВ $T_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ определяется из уравнения
$$(A - \lambda_1 T_1)E = \theta,$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
и имеет вид $T_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, где $C \neq 0$. Положим $C = 1$. Тогда ЧР
$$X_1(t) = T_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$
Для $\lambda_2 = 1$ СВ $T_2 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ определяется из уравнения
$$(A - \lambda_2 T_2)E = \theta,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
и имеет вид $T_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $C \neq 0$. Пусть $C = 1$. Тогда ЧР
$$X_2(t) = T_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$
Теперь ОР однородной системы:
$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} \\ 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2) Для неоднородной системы $F(t) = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t = \begin{pmatrix} P_0(t) \\ Q_0(t) \end{pmatrix} \cos t$, $m = 0$,

$\alpha \pm i\beta = \pm i$ — не корни ХУ, поэтому нужно искать ЧР в виде

$$\bar{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}(t) \\ \bar{\bar{y}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0(t)\cos t + S_0(t)\sin t \\ U_0(t)\cos t + V_0(t)\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ c\cos t + d\sin t \end{pmatrix}.$$

Подставив это в неоднородную систему, получим:

$$\begin{cases} -a\sin t + b\cos t = c\cos t + d\sin t - 5\cos t\,, \\ -c\sin t + d\cos t = 2a\cos t + 2b\sin t + c\cos t + d\sin t\,. \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при $\sin t$, $\cos t$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -a = d, \\ b = c - 5, \\ -c = 2b + d, \\ d = 2a + c, \end{cases}$$

решением которой является $a = -1$, $b = -2$, $c = 3$, $d = 1$.

Значит, ЧР неоднородной системы имеет вид

$$\bar{\bar{X}}(t) = \begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}(t) \\ \bar{\bar{y}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t - 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \end{pmatrix},$$

а ОР неоднородной системы получим, сложив ОР однородной системы и ЧР неоднородной системы.

Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - (\cos t + 2\sin t), \\ y = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + (3\cos t + \sin t). \end{cases}$

5. Операционный метод (преобразование Лапласа).

ДЗ 8. Филиппов № 828, 830, 831, 833, 836, 848, 849.
В след. раз — КР.

Дополнение

6. Матричная экспонента.

Матрица e^{tA} является матрицей Коши для неоднородной системы (2), поскольку она удовлетворяет однородной системе (3) и $e^{0\cdot A} = E$.

Тогда ОР неоднородной системы (2) можно записать в виде:

$$X(t) = e^{tA}C + \int^{t} e^{(t-s)A}F(s)\,ds,$$

где C — столбец из произвольных констант.

Метод нахождения e^{tA} изложен в дополнении к прошлому семинару.