Производные

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x.

О. *Приращением* функции $f(x)$, соответствующим приращению аргумента Δx, называется величина $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Пусть точка x фиксирована, а Δx — переменная величина.

О. *Производной* функции $f(x)$ в точке x называется

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции $f(x)$ — это скорость изменения $f(x)$.

Дифференцированием называется нахождение производной.

О. *Правой (левой) производной* функции $f(x)$ в точке x называется

$$f'(x \pm 0) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если существует $f'(x)$, то существуют $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$, причём $f'(x-0) = f'(x+0) = f'(x)$. И наоборот: если $f'(x-0) = f'(x+0)$, то существует $f'(x)$, причём $f'(x) = f'(x-0) = f'(x+0)$.

Правила дифференцирования

$$\big(cf(x)\big)' = cf'(x), \qquad \text{где } c = \text{const},$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

где $u = u(x), v = v(x)$,

$$\frac{df\big(\varphi(x)\big)}{dx} = \frac{df\big(\varphi(x)\big)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$$ — производная сложной функции.

Таблица производных

$c' = 0,\quad$ где $c = \mathrm{const}$,
$(x^a)' = ax^{a-1},\quad$ где $a = \mathrm{const}$,
$(e^x)' = e^x$,
$(a^x)' = a^x \ln a,\quad$ где $a = \mathrm{const}$,
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\quad (\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$,
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
где $a = \mathrm{const}$,
$(\sin x)' = \cos x$,
$(\cos x)' = -\sin x$,

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$,
$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,
$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,
$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$,
$(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,
$(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 1. Вывести формулу $(e^x)' = e^x$.

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^x \cdot 1 = e^x,$$

ч. т. д.

Задача 2. Вывести формулу $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$ ч. т. д.

Задача 3. Вывести формулу $(\sin x)' = \cos x$.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$ ч. т. д.

Задача 4. Вывести формулу $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

ч. т. д.

Задача 5. Вывести формулу $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Для $x > 0$: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ — уже доказали.

Для $x < 0$: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = (\ln\varphi(x))'$, где $\varphi(x) = -x$.

По формуле для производной сложной функции:

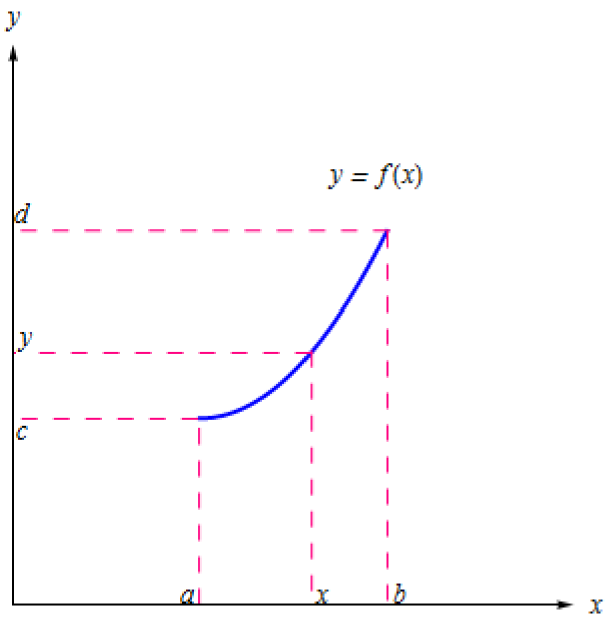
$$(\ln\varphi(x))' = \frac{d\ln\varphi(x)}{dx} = \frac{d\ln\varphi(x)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Задача 6. Выразить $\left(u(x)^{v(x)}\right)'$ через $u'(x), v'(x)$.

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\cdot\ln u(x)} \cdot (v(x)\cdot\ln u(x))' =$$
$$= u(x)^{v(x)} \cdot (v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot(\ln u(x))') = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Ответ: $\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$.

Производная обратной функции

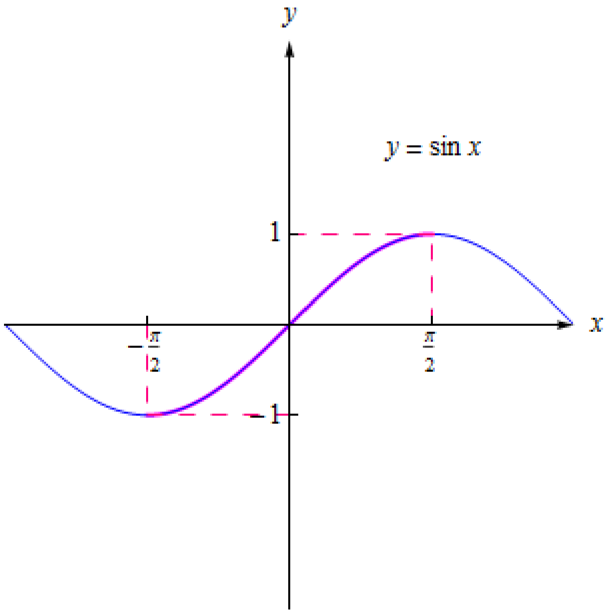


Пусть функция $f(x)$ определена при $x \in [a,b]$, непрерывна и монотонно возрастает ($f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2$) или монотонно убывает ($f(x_1) > f(x_2)$ при $x_1 < x_2$), т.е. *строго монотонна.* Пусть область значений функции $y = f(x)$ — отрезок $[c,d]$. Тогда каждому значению $x \in [a,b]$ соответствует *одно и только одно* значение $y \in [c,d]$, и наоборот, каждому значению $y \in [c,d]$ соответствует *одно и только одно* значение $x \in [a,b]$, т.е. по значению y можно *однозначно* определить значение x. Тогда x является функцией от y — *обратной функцией.* Обозначается обратная функция так: $x = f^{-1}(y)$ (не путать с $\frac{1}{f(y)}$).

Формула для производной обратной функции:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}, \qquad \text{где } x = f^{-1}(y).$$

Задача 7. Вывести формулу $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Функция $y = f(x) = \sin x$ монотонно возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ от $y = -1$ до $y = 1$, поэтому на отрезке $y \in [-1; 1]$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$, которая принимает значения от $x = -\frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Найдём производную обратной функции:

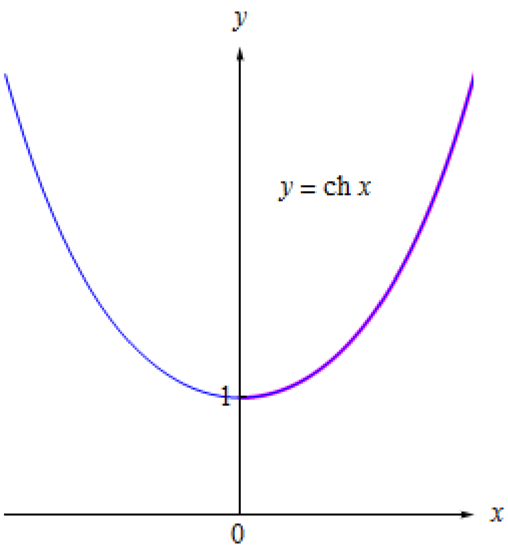
$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \sin x}{dx}\right)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Теперь надо эту производную выразить через y, т.е. $\frac{1}{\cos x}$ выразить через $y = \sin x$. Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$.

Тогда $\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Переобозначив аргумент функции через x, получим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Задача 8. Вывести формулу $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.



Функция $y = f(x) = \operatorname{ch} x$ монотонно возрастает при $x \in [0, +\infty)$ от $y = 1$ до $+\infty$, поэтому на промежутке $y \in [1, +\infty)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arch} y$, которая принимает значения от $x = 0$ до $+\infty$.

Найдём производную обратной функции:

$$\frac{d \operatorname{arch} y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \operatorname{ch} x}{dx}\right)} = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

Теперь надо выразить $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ через $y = \operatorname{ch} x$. Поскольку $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$. На промежутке $x \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство $\operatorname{sh} x \geq 0$, поэтому $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$.

Отсюда $\frac{d \operatorname{arch} y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. Переобозначив аргумент функции через x, получим

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Дифференциал

О. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$

где A не зависит от Δx, $\alpha(\Delta x)$ — б.м. при $\Delta x \to 0$, $\alpha(0) = 0$.

Т. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0) = A$.

О. *Дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная линейная часть приращения:

$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x.$

По определению считают $dx = \Delta x$, если x — независимая переменная. Тогда $df(x) = f'(x)\,dx \Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, т.е. производная равна отношению дифференциалов.

Свойства дифференциалов

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Задача 9 (задача к общему зачёту № 31а). Найдите $f'(x_0)$ и $df(x_0)$ для $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $dx = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}, \qquad f'(1) = \frac{1}{4}.$$

$$df(1) = f'(1)\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Ответ: $f'(1) = \frac{1}{4}$, $df(1) = \frac{1}{8}$.

Задача 10. Исследуйте на дифференцируемость функцию $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ x + x^2, & x < 0. \end{cases}$

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$.

В достаточно малой окрестности любой точки $x_0 > 0$ функция задаётся формулой $f(x) = \sin x$, поэтому существует $f'(x_0) = \cos x_0$.

В достаточно малой окрестности любой точки $x_0 < 0$ функция задаётся формулой $f(x) = x + x^2$, поэтому существует $f'(x_0) = 1 + 2x_0$.

Остаётся проверить существование $f'(0)$. Поскольку в правой окрестности точки 0 справедлива формула $f(x) = \sin x$, то

$$f'(+0) = (\sin x)'|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = 1.$$

Поскольку в левой окрестности точки 0 справедлива формула $f(x) = x + x^2$, то

$$f'(-0) = (x + x^2)'|_{x=0} = (1 + 2x)|_{x=0} = 1.$$

Поскольку $f'(-0) = f'(+0)$, то существует $f'(0) = f'(-0) = f'(+0) = 1$.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет производную на всей вещественной оси и, следовательно, является дифференцируемой на всей вещественной оси.

Ответ: функция дифференцируема на всей вещественной оси.

Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, т.е. x не является независимой переменной, а t — независимая переменная. Тогда

$$dy = df(x) = df\big(\varphi(t)\big) = \frac{df\big(\varphi(t)\big)}{dt}dt = \underbrace{f'\big(\varphi(t)\big)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx} = f'(x)\,dx,$$

где штрих означает производную по полному аргументу: $f'\big(\varphi(t)\big) = \frac{df\big(\varphi(t)\big)}{d\varphi}$.

Таким образом, формулы $df(x) = f'(x)\,dx$ и $f'(x) = \frac{df}{dx}$ верны даже в том случае, когда x не является независимой переменной. Этот факт называется инвариантностью формы первого дифференциала.

Задача 11. Вычислить df, где $f = \cos x$, $x = e^t$.

Первый способ: $df = d\cos e^t = \frac{d}{dt}(\cos e^t) \cdot dt = -\sin e^t \cdot e^t\,dt$.

Второй способ: $df = \frac{d}{dx}(\cos x) \cdot dx = -\sin x \cdot d(e^t) = -\sin e^t \cdot e^t\,dt$.

Ответ: $df = -\sin e^t \cdot e^t\,dt$.

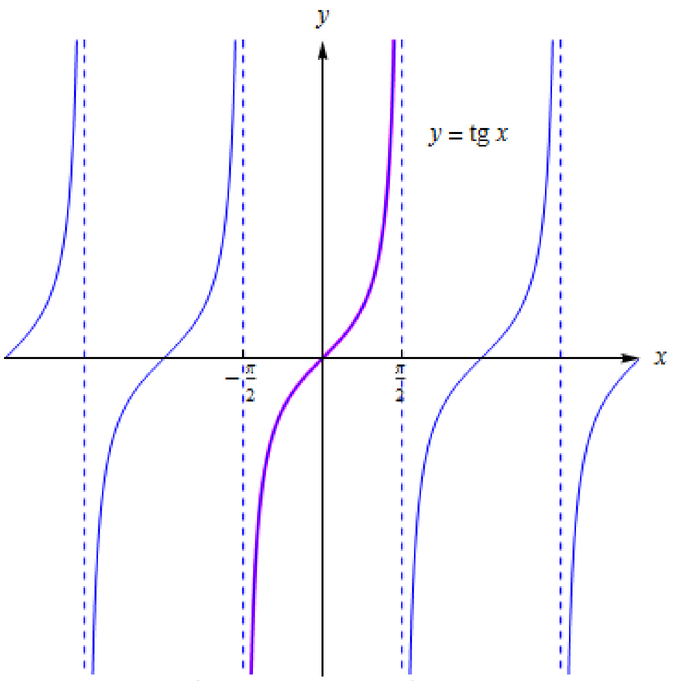
ДЗ 15. Вывести все оставшиеся формулы из таблицы производных.

Задачи для самостоятельного решения из МАВЗ: гл. IV № 2(в,г), 8(а,ж), 11(б,г,н,о), 31(а), 32(б), 34.

Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: МАВЗ гл. VI § 2, 3.

Решения некоторых задач из ДЗ

Вывести формулу $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.



Функция $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому на интервале $y \in (-\infty, +\infty)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$, которая принимает значения в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Найдём производную обратной функции:

$$\frac{d \operatorname{arctg} y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \operatorname{tg} x}{dx}\right)} = \cos^2 x.$$

Теперь надо эту производную выразить через y, т.е. $\cos^2 x$ выразить через $y = \operatorname{tg} x$. Это можно сделать следующим образом:

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{1} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Тогда $\frac{d \operatorname{arctg} y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$. Переобозначив аргумент функции через x, получим

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \text{ч. т. д.}$$