Производная функции, заданной параметрически

Пусть равенства $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ где $t \in [a, b]$, задают функциональную зависимость y от x с помощью параметра t: $x = \varphi(t) \Rightarrow t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = f(x)$. Например, t — это время, $x(t)$ и $y(t)$ — координаты материальной точки. Тогда $y = f(x)$ — уравнение траектории.

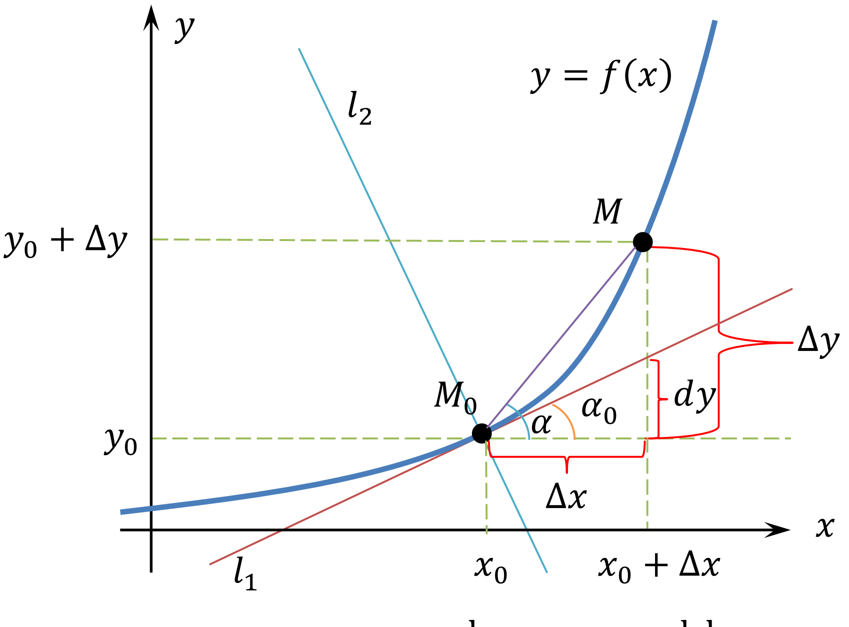
Найдём производную функции, заданной параметрически:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(в силу инвариантности формы первого дифференциала). Окончательная формула:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.}$$

Геометрический смысл производной



Рассмотрим кривую $y = f(x)$. Возьмём на ней точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x)$. Обозначим через α угол между секущей M_0M и осью Ox. Пусть при $\Delta x \to 0$ $\alpha \to \alpha_0$. Тогда прямая l_1, проходящая через точку M_0 под углом α_0 к оси Ox, называется *касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке M_0.

Можно показать, что если функция дифференцируема в точке x_0, то она имеет касательную в точке x_0, причём $\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$, т.е. производная равна тангенсу угла наклона касательной.

Тогда уравнение касательной l_1:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,}$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Прямая l_2, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой $y = f(x)$ в точке M_0.

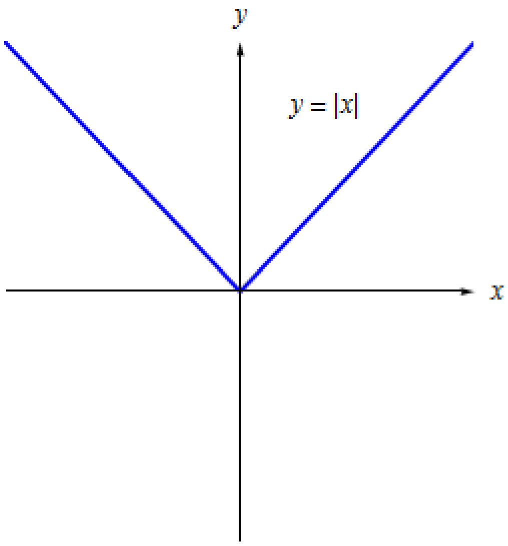
Уравнение нормали l_2:

$$\boxed{y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0,}$$

где $y_0 = f(x_0)$.

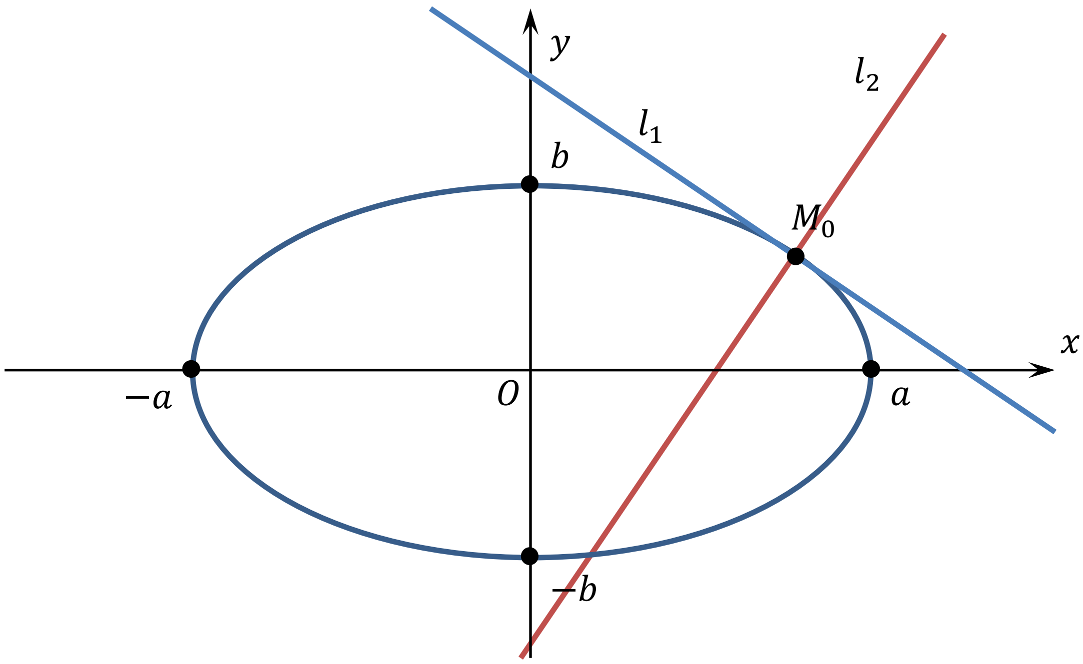
О. Кривая называется *гладкой,* если у неё в каждой точке есть касательная.

Гладкая кривая не имеет разрывов и изломов.



Пример негладкой кривой: график функции $y = |x|$. При $x = 0$ не существует производная, нет касательной, кривая имеет излом.

Задача 1. Найдите уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, в точке $t = \frac{\pi}{4}$.



Данная кривая называется *эллипсом*.

Уравнение касательной l_1:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,$

где

$$x_0 = a\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y_0 = b\sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}.$$

Получаем:

$$y = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b.$$

Уравнение нормали l_2:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + y_0 = \frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}x + \frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{2}}.$$

Ответ: $y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$, $y = \frac{a}{b}x + \frac{b^2-a^2}{b\sqrt{2}}$.

Т. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 (т.е. если $\exists f'(x_0)$), то она непрерывна.

Обратное неверно! Например, функция $f(x) = |x|$ в точке 0 непрерывна, но не дифференцируема.

Кроме того, если существует производная $f'(x)$, то сама $f'(x)$ может не быть непрерывной, как показывает следующий пример.

Задача 2. Найти $f'(x)$ и исследовать её на непрерывность, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна везде, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right) = 0$ (произведение ограниченной функции на б.м.).

Найдём $f'(x)$ при $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Очевидно, функция $f'(x)$ непрерывна при $x \neq 0$.

При $x = 0$ производную нельзя находить по этой формуле. Найдём её по определению:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 0.$$

Значит, при $x = 0$ тоже существует $f'(x)$. Но будет ли она непрерывной при $x = 0$? Если она непрерывна, то $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Проверим это:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\big(u(x) + v(x)\big),$$

где $u(x) = 2x\sin\frac{1}{x}$, $v(x) = -\cos\frac{1}{x}$.

Заметим, что

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} v(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to\infty}(-\cos t) \text{ — не существует.}$$

Утверждение. Если $\exists\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, $\nexists\lim\limits_{x\to a} v(x)$, то $\nexists\lim\limits_{x\to a}\big(u(x) + v(x)\big)$.

Доказательство. От противного. Пусть $\exists\lim\limits_{x\to a}\big(u(x) + v(x)\big) = c$. Тогда, согласно свойству предела разности функций, получим

$$\lim_{x\to a} v(x) = \lim_{x\to a}\big(u(x) + v(x) - u(x)\big) = \lim_{x\to a}\big(u(x) + v(x)\big) - \lim_{x\to a} u(x) = c - b,$$

а это противоречит тому, что $\nexists\lim\limits_{x\to a} v(x)$. Полученное противоречие доказывает, что $\nexists\lim\limits_{x\to a}\big(u(x) + v(x)\big)$.

Из доказанного нами утверждения следует, что $\nexists\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, поэтому функция $f'(x)$ разрывна при $x = 0$ (разрыв второго рода).

Ответ: $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ непрерывна при $x \neq 0$, $x = 0$ — точка разрыва второго рода функции $f'(x)$.

Формула конечных приращений Лагранжа

Т. (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда $\exists c \in (a,b)$: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (*формула конечных приращений*).

Задача 3 (МАВЗ гл. VI № 34). Найдите точку c в формуле конечных приращений на отрезке $[0;2]$ для функции $f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2} & \text{при } 0\le x\le 1,\\ \frac{1}{x} & \text{при } x>1.\end{cases}$

Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;2]$, поскольку

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{3-x^2}{2}=1,\qquad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1,\qquad f(1)=1.$$

Вычислим её производную:

$$f'(x)=\begin{cases}-x & \text{при } 0\le x<1,\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Заметим, что $f'(1-0)=-1$, $f'(1+0)=-1$, поэтому $\exists f'(1)=1$. Значит, функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0;2)$, поэтому выполнены все условия теоремы Лагранжа, и следовательно, справедлива формула конечных приращений:

$\exists c\in(0;2)$: $f(2)-f(0)=(2-0)f'(c)$.

Отсюда

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Такое значение производной достигается при $c=\frac{1}{2}$ и при $c=\sqrt{2}$.

Ответ: $c=\frac{1}{2}$ или $c=\sqrt{2}$.

Задача 4 (МАВЗ гл. VI № 35а). Используя формулу Лагранжа, докажите $\forall x,y\in\mathbb{R}$ справедливость неравенства

$|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

При $x=y$ неравенство очевидно. Теперь рассмотрим произвольные $x,y\in\mathbb{R}$, $x\ne y$. Поскольку функция $\sin x$ непрерывна и дифференцируема на всей вещественной оси, то, согласно формуле конечных приращений, существует такая точка c, заключённая между x и y, что

$\sin x - \sin y = \cos c \cdot (x - y)$.

Отсюда

$|\sin x - \sin y| = |\cos c \cdot (x - y)| = |\cos c| \cdot |x - y| \leq |x - y|$, ч. т. д.

Равномерная непрерывность

О. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in X$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Из равномерной непрерывности функции на некотором множестве следует её непрерывность в каждой точке этого множества; обратное, вообще говоря, неверно.

Т. (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нём.

Т. Если $f'(x)$ существует и ограничена на множестве X, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X.

Задача 5. Докажите, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Нужно доказать, что $\exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $|x_1 - x_2| < \delta$, $|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon$.

Пусть $x_1 = \frac{1}{\delta}$, $x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1,$$

поэтому можно взять $\varepsilon = 1$.

Таким образом,

$\exists \varepsilon = 1$: $\forall \delta > 0$ $\exists x_1 = \frac{1}{\delta}$, $\exists x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$: $|x_1 - x_2| < \delta$, $|x_1^2 - x_2^2| \geq \varepsilon$, ч.т.д.

Задача 6. Докажите, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| < \varepsilon$.

Возьмём $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3$. Докажем, что $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| < \varepsilon$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x_1 - x_2| < \delta$, и при этом $|x_1| < \delta$, $|x_2| < \delta$. Тогда
$$\left|\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}\right| \le \left|\sqrt[3]{x_1}\right| + \left|\sqrt[3]{x_2}\right| = \sqrt[3]{|x_1|} + \sqrt[3]{|x_2|} < \sqrt[3]{\delta} + \sqrt[3]{\delta} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \text{ч. т. д.}$$
2. Пусть $|x_1 - x_2| < \delta$, и при этом хотя бы один из x_1, x_2 по модулю не меньше δ. Для определённости, пусть $|x_1| \ge \delta$. Тогда
$$\left|\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^2 + \sqrt[3]{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_2} + \left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2\right)\right|}{\left|\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^2 + \sqrt[3]{x_1}\cdot\sqrt[3]{x_2} + \left(\sqrt[3]{x_2}\right)^2\right|} =$$
$$= \frac{|x_1 - x_2|}{\left(\sqrt[3]{|x_1|}\right)^2 \cdot \left|1 + \frac{\sqrt[3]{x_2}}{\sqrt[3]{x_1}} + \left(\frac{\sqrt[3]{x_2}}{\sqrt[3]{x_1}}\right)^2\right|} = \frac{|x_1 - x_2|}{\left(\sqrt[3]{|x_1|}\right)^2 \cdot \left|\left(\frac{\sqrt[3]{x_2}}{\sqrt[3]{x_1}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right|} < \frac{\delta}{\delta^{2/3}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt[3]{\delta}}{3} =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Таким образом, доказано, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

ДЗ 16. Задачи для самостоятельного решения из МАВЗ: гл. IV № 5(а), 23(б,д); гл. VI № 15, 18(а,в), 20, 21, 35(б), 36(а), 37(а).

Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: МАВЗ гл. IV § 3.

Решение некоторых задач из ДЗ

МАВЗ гл. VI № 36(а). Докажите, что если производная функции во всех точках промежутка равна нулю, то функция является постоянной на этом промежутке. Используя это утверждение, докажите тождество $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$ при $x \ge 1$.

Пусть $f'(x) = 0$ на промежутке X. Тогда для любых $x_1, x_2 \in X$ (для определённости будем считать, что $x_1 < x_2$) функция $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2), поэтому $\exists c \in (x_1, x_2)$: $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$. Поскольку $f'(c) = 0$, получим $f(x_1) = f(x_2)$. В силу произвольности выбора x_1, x_2 получим, что функция $f(x)$ постоянна на всём промежутке X.

Пусть $f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. Тогда при $x \ge 1$

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1-2x^2+x^4}{1+2x^2+x^4}}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0,$$

поэтому $f(x)=\text{const}$ при $x\geq 1$. Поскольку $f(1)=\pi$, то $f(x)=\pi$ при $x\geq 1$, ч.т.д.