Производные и дифференциалы высших порядков

О. Производная от производной $\left(f'(x)\right)'$ называется *второй производной* $f''(x)$, производная от второй производной $\left(f''(x)\right)'$ называется *третьей производной* $f'''(x)$, и т.д.: производная от $(n-1)$-й производной $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ называется *n-й производной* $f^{(n)}(x)$.

О. Если $\exists f^{(n)}(x)$ в точке x_0, то функция $f(x)$ называется *n раз дифференцируемой* в точке x_0.

О. Дифференциал от дифференциала $d\left(df(x)\right)$ называется *вторым дифференциалом* $d^2f(x)$. При этом dx берётся одинаковым при вычислении обоих дифференциалов:

$$d^2f(x) = d(f'(x)\cdot dx) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)\,d(dx) = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Если x — независимая переменная, то $dx = \Delta x = \text{const}$, и $d^2x = 0$. Тогда

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2 \text{ и } f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Но это верно, только если x — независимая переменная. Поэтому второй дифференциал не обладает свойством инвариантности.

О. Дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала $d\left(d^{n-1}f(x)\right)$ называется *n-м дифференциалом* $d^nf(x)$ (он тоже не инвариантен).

Если x — независимая переменная, то $d^nf(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n$ и $f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Задача 1. Вычислить первую и вторую производные функции $y = f(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \varphi(t) = \cos t\,, \\ y = \psi(t) = \sin t\,, \end{cases}$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

Вычислим первую производную:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

При $t = \frac{\pi}{3}$:

$$f'(x)\big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d(-\operatorname{ctg} t)}{d(\cos t)} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t} dt}{-\sin t\, dt} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$$

При $t = \frac{\pi}{3}$:

$$f''(x)\big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{3}} = -\frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $f'(x)\big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f''(x)\big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$.

Заметим, что по формуле $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ вторую производную вычислять нельзя, поскольку x не является независимой переменной. По этой формуле получится

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2 \sin t}{(d\cos t)^2} = \frac{-\sin t\, dt^2}{(-\sin t\, dt)^2} = -\frac{1}{\sin t}$$

— это неправильный ответ!

Задача 2. Вычислить $(e^x)^{(n)}$.

Ответ: $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Задача 3. Вычислить $(x^a)^{(n)}$.

$(x^a)' = ax^{a-1}$,

$(x^a)'' = a(a-1)x^{a-2}$,

$(x^a)''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$,

…

$(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}$.

Ответ: $(x^a)^{(n)} = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}$.

Задача 4. Доказать, что $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

Докажем по индукции.

1) Для $n = 1$: $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ — выполняется.

2) Пусть формула верна для $n = k$: $(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)$.

   Докажем, что она верна и для $n = k + 1$: $(\sin x)^{(k+1)} = \sin\left(x + \frac{\pi(k+1)}{2}\right)$.

   Доказательство:

   $$(\sin x)^{(k+1)} = \left((\sin x)^{(k)}\right)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

   $$= \sin\left(x + \frac{\pi(k+1)}{2}\right), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Задача 5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ — доказать самостоятельно.

Задача 6. Вычислить $(\ln x)^{(n)}$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}.$$

$$(\ln x)^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-1-(n-1)+1)x^{-1-(n-1)} =$$

$$= (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot\left(-(n-1)\right)x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Ответ: $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Задача 7. Вычислить $\frac{d^n}{dx^n} f(ax+b)$, где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

Обозначим $f(ax+b) = f\left(\varphi(x)\right)$, где $\varphi(x) = ax + b$. Тогда

$$\frac{d}{dx} f(ax+b) = \frac{d}{dx} f\left(\varphi(x)\right) = \frac{df\left(\varphi(x)\right)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} = a\cdot f'(ax+b).$$

(Здесь штрих обозначает производную по полному аргументу.)

Аналогично,

$$\frac{d^2}{dx^2} f(ax+b) = \frac{d}{dx}\left(a\cdot f'(ax+b)\right) = a^2\cdot f''(ax+b),$$

…

$$\frac{d^n}{dx^n} f(ax+b) = a^n\cdot f^{(n)}(ax+b).$$

Ответ: $\frac{d^n}{dx^n}f(ax+b)=a^n\cdot f^{(n)}(ax+b)$.

Справедливы формулы:

$\boxed{(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},}$

$\boxed{(cu)^{(n)}=cu^{(n)},\qquad \text{если } c=\text{const}.}$

Задача 8. Найти $\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{(n)}$, если $x>1$.

Поскольку $\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln(x+1)-\ln(x-1)$, то $\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{(n)}=(\ln(x+1))^{(n)}-(\ln(x-1))^{(n)}$.

Вычислим $(\ln(x+1))^{(n)}$. Представив функцию $\ln(x+1)$ в виде $\ln(ax+b)$, где $a=b=1$, и воспользовавшись полученными выше формулами $\frac{d^n}{dx^n}f(ax+b)=a^n\cdot f^{(n)}(ax+b)$ и $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, найдём

$$(\ln(x+1))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}.$$

Аналогично

$$(\ln(x-1))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}.$$

Тогда

$$\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{(n)}=(\ln(x+1))^{(n)}-(\ln(x-1))^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}-\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}=$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right).$$

Ответ: $\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x+1)^n}-\frac{1}{(x-1)^n}\right)$.

Задача 9 (МАВЗ гл. IV № 38м). Найти $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)}$.

Представим функцию $\frac{x}{x^2-1}$ в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(30)} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(30)}.$$

Вычислим

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(30)} = (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-1-29)\cdot\frac{1}{(x-1)^{31}} = \frac{30!}{(x-1)^{31}}.$$

Аналогично

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(30)} = \frac{30!}{(x+1)^{31}}.$$

Тогда

$$\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(30)} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(30)} = \frac{30!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{31}}+\frac{1}{(x+1)^{31}}\right).$$

Ответ: $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)} = \frac{30!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{31}}+\frac{1}{(x+1)^{31}}\right)$.

Формула Лейбница:

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(m)} v^{(n-m)},}$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты, $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Задача 10. Вычислить $(x^2 \sin 2x)^{(n)}$.

Пусть $u = x^2$, $v = \sin 2x$. Воспользуемся формулой Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 uv^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + C_n^3 u''' v^{(n-3)} + \cdots + C_n^n u^{(n)} v.$$

При этом

$$u' = 2x, \qquad u'' = 2, \qquad u''' = u^{IV} = \cdots = u^{(n)} = 0,$$

$$v^{(m)} = 2^m \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi m}{2}\right).$$

Тогда

$(uv)^{(n)} =$

$= C_n^0 \cdot x^2 \cdot 2^n \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + C_n^1 \cdot 2x \cdot 2^{n-1} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) + C_n^2 \cdot 2 \cdot 2^{n-2} \cdot$

$\cdot \sin\left(2x + \frac{\pi(n-2)}{2}\right) =$

$= 2^n x^2 \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) - n2^n x \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) - n(n-1)2^{n-2} \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right).$

Ответ: $(x^2 \sin 2x)^{(n)} = 2^n x^2 \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) - n2^n x \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) - n(n-1)2^{n-2} \sin\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

Задача 11. Вычислить $f^{(n)}(0)$, где $f(x) = e^{x^2}$.

Сначала вычислим $f'(x)$:

$f'(x) = 2xe^{x^2}$.

Заметим, что справедливо тождество:

$f'(x) \equiv 2xf(x)$.

Продифференцируем это тождество $n-1$ раз по переменной x, используя формулу Лейбница:

$$f^{(n)}(x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (2x)^{(k)} f^{(n-1-k)}(x).$$

Вычислим сумму, стоящую в правой части, с учётом того, что в ней отличны от нуля только первые два слагаемых:

$f^{(n)}(x) \equiv C_{n-1}^0 2xf^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1 2f^{(n-2)}(x) \equiv 2xf^{(n-1)}(x) + 2(n-1)f^{(n-2)}(x).$

В полученном тождестве положим $x = 0$:

$f^{(n)}(0) = 2(n-1)f^{(n-2)}(0).$

Поскольку $f(0) = 1$, отсюда получим

$f''(0) = 2 \cdot 1, \qquad f^{(4)}(0) = 2^2 \cdot 3 \cdot 1, \qquad f^{(6)}(0) = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1, \qquad \dots,$
$f^{(2m)}(0) = 2^m \cdot (2m-1)!!,$

где двойной факториал нечётного натурального числа обозначает произведение всех нечётных натуральных чисел, не превосходящих данного.

Поскольку $f'(0) = 0$, то

$f'''(0) = 0, \qquad f^{(5)}(0) = 0, \qquad \dots, \qquad f^{(2m+1)}(0) = 0.$

Ответ: $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} \cdot (n-1)!!, & \text{если } n \text{ — чётное}, \\ 0, & \text{если } n \text{ — нечётное}. \end{cases}$

ДЗ 17. Задачи для самостоятельного решения из МАВЗ: гл. IV № 38(в,л,н), 39(в,ж,п), 41(д), 44, 45(в).

Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: МАВЗ гл. V §1–4.

Решения некоторых задач из ДЗ

МАВЗ гл. IV № 39(ж). Вычислите $(\sin\alpha x \sin\beta x)^{(n)}$.

$$(\sin\alpha x \sin\beta x)^{(n)} = \left(\frac{\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x}{2}\right)^{(n)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^n \cos\left((\alpha-\beta)x + \frac{\pi n}{2}\right) - (\alpha+\beta)^n \cos\left((\alpha+\beta)x + \frac{\pi n}{2}\right)}{2}.$$

Ответ: $\frac{(\alpha-\beta)^n \cos\left((\alpha-\beta)x + \frac{\pi n}{2}\right) - (\alpha+\beta)^n \cos\left((\alpha+\beta)x + \frac{\pi n}{2}\right)}{2}$.

МАВЗ гл. IV № 45(в). Вычислите $d^n y$, где $y = x^2 \ln x$, x — независимая переменная.

$dy = y'\,dx = (2x\ln x + x)\,dx,$

$d^2y = y''\,dx^2 = (2\ln x + 3)\,dx^2,$

$d^3y = y'''\,dx^3 = \frac{2}{x}dx^3,$

$d^ny = y^{(n)}\,dx^n = \left(\frac{2}{x}\right)^{(n-3)} dx^n = \frac{2(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}dx^n = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}dx^n,$
$n \geq 3.$

Ответ: $dy = (2x\ln x + x)\,dx$, $d^2y = (2\ln x + 3)\,dx^2$, $d^ny = \frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}dx^n$, $n \geq 3$.