Определители и системы линейных уравнений

Определитель 2-го порядка матрицы A

$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (произведение элементов *главной диагонали* минус произведение элементов *побочной диагонали*). Как и где возникает такой объект?

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ — известные числа, x, y — неизвестные.

Введём обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Если $\Delta \neq 0$, то исходная система имеет единственное решение, при этом оно выражается *формулами Крамера:*

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.}$$

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ -4x + 5y = -2. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 22, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 66, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 44.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

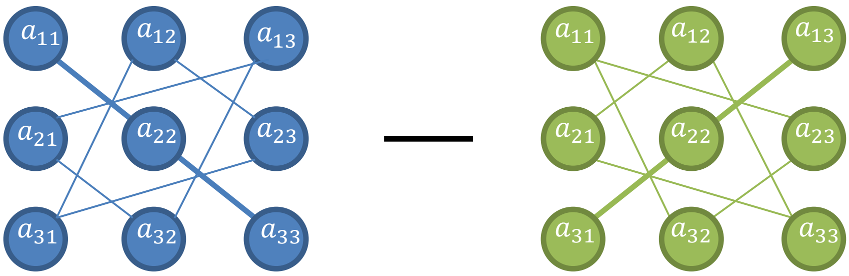
Ответ: $x = 3, y = 2$.

Определитель 3-го порядка

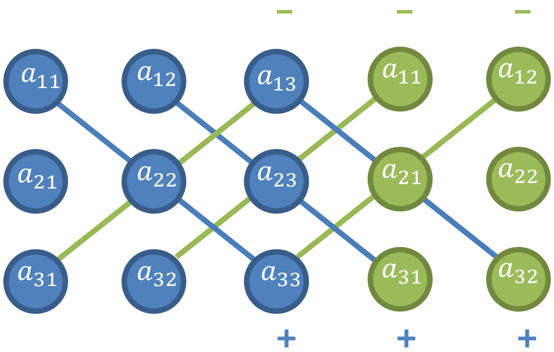
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Мнемоническое правило:



Ещё одно мнемоническое правило:



Система уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

при $\Delta \neq 0$ имеет единственное решение, причём оно выражается формулами Крамера:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.}$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} -3x + 5y - 3z = -11, \\ \quad\quad x + 3y + 5z = 3, \\ \quad -4x + 4y - z = -9. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 9 - 12 - 100 - 36 + 5 + 60 = -74,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -11 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \\ -9 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 33 - 36 - 225 - 81 + 220 + 15 = -74,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -3 & -11 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -4 & -9 & -1 \end{vmatrix} = 9 + 27 + 220 - 36 - 11 - 135 = 74,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -11 \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 81 - 44 - 60 - 132 + 36 + 45 = -74.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, то исходная система имеет единственное решение, которое выражается формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1.$$

Ответ: $x = 1, y = -1, z = 1$.

Разложение определителя по строке или по столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ (разложение по первой строке)}, \\ a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{ (разложение по второй строке)}, \\ a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \text{ (разложение по третьей строке)}, \\ a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \text{ (разложение по первому столбцу)}, \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{ (разложение по второму столбцу)}, \\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \text{ (разложение по третьему столбцу)}, \end{cases}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — *алгебраическое дополнение* элемента a_{ij}, M_{ij} — *минор* (определитель, который получается из исходного вычёркиванием i-й строки и j-го столбца).

Знаки чисел $(-1)^{i+j}$ чередуются следующим образом:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Особенно удобно использовать такое разложение в том случае, когда часть элементов некоторой строки или столбца равны нулю.

Задача 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (6 - 20) - 2 \cdot (-2 - 8) + 3 \cdot (-5 - 6) = -14 + 20 - 33 = -27.$$

<u>**Домашнее задание.**</u>

Клетеник № 1204–1206, 1207(1,2,5), 1211–1243, 1249.