Элементы функционального анализа

Понятия и теоремы функционального анализа широко используются в математической и теоретической физике. Здесь мы приводим краткую сводку основных определений и фактов, которые будут использоваться в следующих разделах. Часть понятий и простейших фактов сформулированы в виде задач в конце главы.

Множество $\mathbb{M}$ называется *метрическим пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbb{M}$ задана действительная функция $\rho(x, y)$, которая называется *метрикой* и удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$, $\rho(x, x) = 0$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства называются также *точками*. Значение функции $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* от точки x до точки y.

Метрическими пространствами являются множество $C[a, b]$ функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, с метрикой $\rho(f, g) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$, и множество $L_2[a, b]$ функций, определенных и интегрируемых с квадратом по Лебегу на отрезке $[a, b]$, с метрикой $\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx}$.

Используя понятие расстояния между элементами, в метрическом пространстве можно определить понятие сходимости. Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из $\mathbb{M}$ *сходится* к $x \in \mathbb{M}$ ($x_k \to x$ в $\mathbb{M}$, $k \to \infty$), если числовая последовательность $\rho(x_k, x)$ сходится к нулю: $\rho(x_k, x) \to 0$, $k \to \infty$. Элемент x называется *пределом последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначается $\lim\limits_{k \to \infty} x_k$.

Последовательность элементов $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n \geqslant N(\varepsilon)$. Метрическое пространство $\mathbb{M}$ называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность элементов из $\mathbb{M}$ сходится к некоторому $x \in \mathbb{M}$. Значимость этих понятий обусловлена следующим обстоятельством: общего алгоритма, позволяющего найти предел любой последовательности, не существует, поэтому важны необходимые и достаточные признаки сходимости, основанные на свойствах самой последовательности. В полном метрическом пространстве таким признаком является фундаментальность последовательности.

Множество G из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *ограниченным*, если существуют $\varepsilon > 0$ и элемент $x_0 \in \mathbb{M}$ такие, что для любого $x \in G$: $\rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon$. Множество K из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *компактным*, если из любой бесконечной последовательности элементов K можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Множество G из метрического пространства $\mathbb{M}$ называется *всюду плотным* в $\mathbb{M}$, если любой элемент из $\mathbb{M}$ есть предел последовательности элементов из G. Множество называется *счетным*, если все его элементы можно занумеровать всеми натуральными числами. Например, множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ — счетное, а множество всех иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ счетным не является. Метрическое пространство $\mathbb{M}$ называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Множество $\mathbb{E}$ называется *вещественным* (*комплексным*) *линейным пространством*, если для любых элементов $x, y \in \mathbb{E}$ определен элемент $x + y \in \mathbb{E}$ — *сумма элементов* x и y, для любого элемента $x \in \mathbb{E}$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) определен элемент $\alpha\, x \in \mathbb{E}$ — *произведение элемента* x на число α и справедливы следующие аксиомы:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. Существует $0 \in \mathbb{E}$ такой, что для любого $x \in \mathbb{E}$: $0 + x = x$;
4. Для любого $x \in \mathbb{E}$ существует $-x \in \mathbb{E}$ такой, что $-x + x = 0$;
5. $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha\,(\beta\, x) = (\alpha\, \beta)\, x$;
7. $\alpha\,(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y$;
8. $(\alpha + \beta)\, x = \alpha\, x + \beta\, x$.

Элементы линейного пространства называются также *векторами.*

Множества $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$ являются линейными пространствами.

Конечная система $x_1, \ldots x_n$ векторов из $\mathbb{E}$ называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_n x_n = 0$ выполняется только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. В противном случае система $x_1, \ldots x_n$ *линейно зависима.* Бесконечная система $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов из $\mathbb{E}$ называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима. *Линейной оболочкой* $D(X)$ множества $X \subseteq \mathbb{E}$ называется множество всех конечных линейных комбинаций из векторов множества X: $D(X) = \{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k :\ x_k \in X,\ \alpha_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$.

Линейное пространство $\mathbb{N}$ называется *нормированным*, если для каждого $x \in \mathbb{N}$ определена действительная функция $\|x\|$, которая называется *нормой* и удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$, $\|0\| = 0$;
2. Для любого числа α: $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Нормированными пространствами являются линейное пространство $C[a,b]$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$ и линейное пространство $L_2[a,b]$ с нормой $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$.

В каждом нормированном пространстве $\mathbb{N}$ можно ввести *метрику, порожденную нормой*: $\rho(x,y) = \|x - y\|$, и рассматривать $\mathbb{N}$ как метрическое пространство. Отсюда следует, что нормированные пространства обладают всеми свойствами метрических пространств. В частности, последовательность элементов из $\mathbb{N}$ *сходится по норме*, если она сходится по метрике, порожденной нормой; аналогично в $\mathbb{N}$ определяется понятие фундаментальной последовательности. Нормированное пространство $\mathbb{B}$ называется *банаховым*, если оно является полным относительно метрики $\rho(x,y) = \|x - y\|$.

Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов нормированного пространства $\mathbb{N}$ называется *базисом*, если любой вектор $x \in \mathbb{N}$ может быть единственным образом представлен в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, x_k$, где сходимость ряда понимается как сходимость по норме последовательности его частичных сумм.

Будем говорить, что в вещественном (комплексном) линейном пространстве $\mathbb{H}$ задано *скалярное произведение*, если для любых $x, y \in \mathbb{H}$ определена действительная (комплексная) функция (x,y) — скалярное произведение векторов x и y, удовлетворяющая следующим аксиомам в случае вещественного $\mathbb{H}$:

1. $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$, $(x, x) = 0$ при $x = 0$;
2. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;
3. $(x, y) = (y, x)$;
4. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha\, x, y) = \alpha\, (x, y)$.

В случае комплексного $\mathbb{H}$ аксиомы 1 и 2 сохраняют свой вид, а аксиомы 3 и 4 следует заменить на

$3'$. $(x, y) = (y, x)^*$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение;

$4'$. Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$: $(\alpha\, x, y) = \alpha^*\, (x, y)$.

В каждом пространстве $\mathbb{H}$ со скалярным произведением можно ввести *норму, порожденную скалярным произведением*: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$; следовательно, $\mathbb{H}$ обладает всеми свойствами нормированного пространства.

Линейное пространство $\mathbb{H}$ со скалярным произведением называется *гильбертовым*, если $\mathbb{H}$ является полным относительно нормы, порожденной скалярным произведением.

Примером гильбертова пространства является линейное пространство $L_2[a, b]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f^*(x)\, g(x)\, dx$.

Векторы $x, y \in \mathbb{H}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $(x, y) = 0$. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *ортонормированной*, если $(e_k, e_m) = \delta_{km}$, $k, m = 1, 2, \ldots$. Ортогональные векторы линейно независимы. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов из гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называется *полной*, если не существует ненулевого вектора из $\mathbb{H}$, ортогонального всем векторам этой системы. Согласно теореме Фурье в гильбертовом пространстве полная ортонормированная система является базисом, т. е. любой вектор $x \in \mathbb{H}$ можно единственным образом представить в виде ряда $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, который называется *рядом Фурье* элемента x по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, а числа $c_k = (x, e_k)$ называются *коэффициентами Фурье* элемента x, причем $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$.

Пусть $\mathbb{E}$ — линейное пространство. *Оператор* $\hat{A}$, определенный в пространстве $\mathbb{E}$, есть отображение, которое каждому элементу $x \in \mathbb{E}$ ставит в соответствие элемент $y \in \mathbb{E}$. Оператор $\hat{A}$ называется *линейным*, если для любых $x, y \in \mathbb{E}$ и любых чисел α, β выполняется равенство $\hat{A}\,(\alpha x + \beta y) = \alpha \hat{A} x + \beta \hat{A} y$. Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в нормированном пространстве $\mathbb{N}$, называется *ограниченным*, если он переводит ограниченные множества в ограниченные. *Нормой* линейного ограниченного оператора $\hat{A}$ называется число $\|\hat{A}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\hat{A}x\|$. Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в нормированном пространстве $\mathbb{N}$, называется *непрерывным в точке* $x \in \mathbb{N}$, если для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящейся к x, последовательность $\{\hat{A}x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\hat{A}x$. Можно доказать, что линейный оператор, непрерывный в какой-либо точке нормированного пространства, непрерывен во всем пространстве и что непрерывность оператора равносильна его ограниченности.

Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в нормированном пространстве $\mathbb{N}$, называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество в компактное. Всякий вполне непрерывный оператор является непрерывным, обратное утверждение несправедливо.

Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, называется *неотрицательным*, если для любого $x \in \mathbb{H}$ справедливо $(\hat{A}x, x) \geqslant 0$. Линейный оператор $\hat{A}$, определенный в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, называется *симметричным*, если для любых векторов $x, y \in \mathbb{H}$ выполняется равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}y)$.

Одной из главных задач, связанных с изучением линейных операторов в гильбертовом пространстве, является *задача на собственные значения*, имеющая вид $\hat{A}\,x = \lambda\,x$, где λ — число. Каждый элемент $x \neq 0$, удовлетворяющий этому уравнению, называется *собственным вектором*, а λ — *собственным значением*. Удобно также выбирать собственные векторы нормированными: $\|x\| = 1$, чтобы избавиться от неопределенности, связанной с однородностью уравнения по x. Задача на собственные значения в связи с уравнениями математической физики будет подробно рассматриваться в последующих разделах.

Важность задачи на собственные значения определяется теоремой Гильберта: в сепарабельном гильбертовом пространстве собственные векторы линейного симметричного вполне непрерывного оператора образуют ортонормированный базис. Теорема Гильберта дает один из главных инструментов решения задач математической и теоретической физики.

1.1. Докажите, что метрическими пространствами являются:

1) множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с мет-

рикой $\rho(f,g) = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - g(x)|$;

2) множество $L_2[a,b]$ функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на отрезке $[a,b]$, с метрикой $\rho(f,g) = \sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}$.

1.2. Пусть $\mathbb{M}$ — метрическое пространство. Докажите, что если $x_k \to x$ и $y_k \to y$ в $\mathbb{M}$, $k \to \infty$, то $\rho(x_k, y_k) \to \rho(x,y)$, $k \to \infty$.

1.3. Проверьте фундаментальность последовательности функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ из метрического пространства $L_2[0,1]$ и докажите, что $x^n \to 0$ в $L_2[0,1]$, $n \to \infty$.

1.4. Докажите, что следующие множества являются линейными пространствами:

1) множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 0$;

2) множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$;

3) множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, для которых $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

1.5. Докажите, что следующие множества являются линейными пространствами:

1) множество l_2 числовых последовательностей, суммируемых с квадратом: $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ сходится;

2) множество $L_2[a,b]$ функций, определенных и интегрируемых с квадратом по Лебегу на отрезке $[a,b]$: $f(x) \in L_2[a,b]$, если $\int_a^b f^2(x)\,dx$ сходится.

1.6. Докажите, что следующие множества не являются линейными пространствами:

1) множество непрерывных на отрезке $[0,2]$ функций, принимающих значение $f(1) = 1$;

2) множество непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям $f'(0) = 1$, $f'(1) = 1$;

3) множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, для которых $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

1.7. Предполагая, что функции $\{1,\ x,\ x^2\}$ линейно независимы, докажите, что функция $f(x) = x$ не принадлежит линейной оболочке функций $\varphi(x) = 1 + x$ и $\psi(x) = 1 + x^2$.

1.8. Пусть $\mathbb{N}$ — нормированное пространство. Покажите, что метрика, порожденная нормой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, обладает следующими свойствами:

1) инвариантностью относительно сдвига: $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$;
2) однородностью: $\rho(\alpha\, x, \alpha\, y) = |\alpha|\, \rho(x, y)$.

1.9. Пусть l_2 — линейное пространство суммируемых с квадратом числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажите, что выражение $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2}$ задает норму для $x \in l_2$.

1.10. Пусть $\mathbb{N}$ — линейное пространство квадратных матриц размера $(n{\times}n)$: $A = (a_{i,j})$, $i, j = 1, \ldots n$ с обычным правилом для сложения матриц и умножения матрицы на число. Докажите, что $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$ является нормой в $\mathbb{N}$.

1.11. Пусть $C[a, b]$ — нормированное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$. Докажите, что в $C[a, b]$ не выполняется *равенство параллелограмма*:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2 \ .$$

1.12. Пусть $\mathbb{H}$ — пространство со скалярным произведением. Докажите *неравенство Коши—Буняковского*

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\,\sqrt{(y, y)}\ .$$

1.13. Пусть $\mathbb{H}$ — пространство со скалярным произведением. Докажите, что функция $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.

1.14. Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство. Покажите, что норма, порожденная скалярным произведением, удовлетворяет равенству параллелограмма: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

1.15. Пусть l_2 — множество суммируемых с квадратом числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажите, что выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ задает скалярное произведение для $x, y \in l_2$.

1.16. Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство. Докажите, что если векторы $x \neq 0$ и $y \neq 0$ ортогональны, то они линейно независимы.

1.17. Докажите, что следующие функции образуют ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \rho)$, в котором скалярное произведение задано правилом

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, dx \ , \ \text{где} \ \ \rho(x) \geqslant 0;$$

1) $\sin kx$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Omega = (0, \pi)$, $\rho(x) = 1$;

2) $e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, $\Omega = (0, 2\pi)$, $\rho(x) = 1$;

3) $P_l(x) = \dfrac{1}{2^l\, l!} \dfrac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$ – полиномы Лежандра, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\Omega = (-1, +1)$, $\rho(x) = 1$;

4) $P_l^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m}{dx^m} P_l(x)$ – присоединенные функции Лежандра 1-го рода $(m \geqslant 0)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\Omega = (-1, +1)$, $\rho(x) = 1$;

5) $J_\nu(z_k x)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\Omega = (0, 1)$, $\rho(x) = x$. Здесь $J_\nu(x)$ – функции Бесселя 1-го рода порядка ν, z_k – k-й корень уравнения $J_\nu(z) = 0$.

1.18. Докажите, что оператор $\hat{A} : U \to L_2[a, b]$ линейный:

1) $\hat{A} f(x) = \varphi(x) \dfrac{d}{dx} f(x)$, где $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ задана; U — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$;

2) $\hat{A} f(x) = \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy$, где $K(x, y) \in L_2\left([a, b] \otimes [a, b]\right)$ и $U = L_2[a, b]$.

1.19. Докажите, что оператор $\hat{A} : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$ не является линейным:

1) $\hat{A} f(x) = f^2(x)$;

2) $\hat{A} f(x) = f(x) + 1$.

1.20. Пусть оператор $\hat{A} : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ действует по правилу $\hat{A}f(x) = \varphi(x)f(x)$, где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция. Докажите, что оператор $\hat{A}$ является непрерывным.

1.21. Пусть $K(x,y) \in L_2\left([a,b] \otimes [a,b]\right)$. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма $\hat{A} : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, действующий по правилу

$$\hat{A}\,\varphi(x) = \int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)\,dy\,,$$

является непрерывным.

1.22. Пусть U — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ и оператор $\hat{A} : U \to L_2[0,\pi]$ действует по правилу

$$\hat{A}f(x) = f'(x)\,.$$

Докажите, что оператор $\hat{A}$ не является непрерывным.

1.23. Докажите, что единичный оператор $\hat{E} : l_2 \to l_2$ является непрерывным, но не является вполне непрерывным.

1.24. Пусть M — конечномерное подпространство нормированного пространства N. Докажите, что любой линейный ограниченный оператор $\hat{A} : N \to M$ является вполне непрерывным.

1.25. Пусть оператор $\hat{A} : U \to L_2[a,b]$ действует по правилу

$$\hat{A}f(x) = -f''(x)\,.$$

Докажите, что оператор $\hat{A}$ является неотрицательным и симметричным, если U — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций из $L_2[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям:

1) $f(a) = 0,\ f(b) = 0\,;$

2) $f'(a) = 0,\ f(b) = 0\,;$

3) $f'(a) = 0,\ f'(b) = 0\,.$

Ответы и указания к главе 1

1.1. 1) *Указание.* Справедливость аксиом метрики 1 и 2 для $\rho(f,g)$ очевидна. Необходимо проверить неравенство треугольника, опираясь на свойства модуля и максимума.

2) *Указание.* Справедливость аксиом метрики 1 и 2 для $\rho(f,g)$ очевидна. Необходимо проверить неравенство треугольника, опираясь на неравенство Коши—Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(см. задачу **1.12.**).

1.2. *Указание.* Рассматривая $\rho(x_k, y_k)$, необходимо применить неравенство треугольника, последовательно используя точки x и y, а затем учесть сходимость последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$.

1.3. *Указание.* Чтобы проверить определение фундаментальной последовательности, необходимо вычислить $\rho(x^m, x^n) = \sqrt{\int_0^1 (x^m - x^n)^2\,dx}$ и доказать, что предел при $m, n \to \infty$ равен нулю. Аналогично, сходимость $x^n \to 0$ в $L_2[0,1]$ означает сходимость к нулю $\rho(x^n, 0) = \sqrt{\int_0^1 x^{2n}\,dx}$ при $n \to \infty$.

1.4. *Указание.* Необходимо для произвольных элементов указанных множеств проверить аксиомы линейного пространства.

1.5. *Указание.* При доказательстве того, что сумма элементов также суммируема (интегрируема) с квадратом, можно использовать элементарное числовое неравенство

$$2ab \leqslant a^2 + b^2\ .$$

1.6. *Указание.* Достаточно показать, например, что сумма элементов не является элементом указанного множества.

1.7. *Указание.* Предполагая тождество $\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x) \equiv f(x)$ и пользуясь линейной независимостью функций $\{1,\ x,\ x^2\}$, получить систему уравнений для коэффициентов α и β и показать, что она несовместна.

1.8. *Указание.* Необходимо непосредственно воспользоваться определением метрики, порожденной нормой.

1.9. Очевидно, аксиомы нормы 1 и 2 выполнены. Для проверки аксиомы 3 воспользуемся неравенством Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**):

$$|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} = \|x\| \cdot \|y\| \; .$$

Запишем

$$\|x-y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \,.$$

Отсюда следует, что аксиома 3 также выполняется.

1.10. *Указание.* Справедливость аксиом нормы 1 и 2 для $\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$ очевидна. Необходимо проверить аксиому 3, используя свойства модуля и максимума.

1.11. *Указание.* Достаточно привести контрпример, используя в качестве $f(x)$ и $g(x)$ линейные функции.

1.12. Пусть $x, y \in \mathbb{H}$. Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо $(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0$. Раскрывая скалярное произведение, получим квадратичное по λ неравенство

$$(x,x) + 2\lambda\,(x,y) + \lambda^2\,(y,y) \geqslant 0\,.$$

Оно выполняется для всех λ, только если дискриминант отрицателен или равен нулю: $4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y) \leqslant 0$. Отсюда следует неравенство Коши—Буняковского

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}\,.$$

1.13. *Указание.* При проверке аксиомы 3 необходимо использовать неравенство Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**).

1.14. *Указание.* Необходимо непосредственно воспользоваться определением нормы, порожденной скалярным произведением.

1.15. *Указание.* При доказательстве сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ можно использовать указание к задаче **1.5.** Аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно.

1.16. Рассуждая от противного, предположим, что $\alpha\, x + \beta\, y = 0$, где хотя бы одно из чисел α или β отлично от нуля. Умножая равенство скалярно на x, получим

$$\alpha\,(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0\,.$$

Умножая равенство скалярно на y, получим, что и $\beta = 0$. Следовательно, предположение о линейной зависимости несправедливо.

1.17. 1) $(\sin kx, \sin mx) = \displaystyle\int_0^\pi \sin kx\, \sin mx\, dx = \frac{\pi}{2}\,\delta_{km}\,,$

где $\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k{=}m\,, \\ 0, & k{\neq}m\,. \end{cases}$

2) $$\left(e^{im\varphi}, e^{im'\varphi}\right) = \int_0^{2\pi} e^{i(-m+m')\varphi} d\varphi = 2\pi\,\delta_{mm'}\,.$$

3) Рассмотрим скалярное произведение полиномов Лежандра:

$$\left(P_l, P_{l'}\right) = \int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_{l'}(x)\, dx = \frac{1}{2^{l+l'}\, l!\, l'!} \int_{-1}^{1} \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2{-}1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2{-}1\right)^{l'} dx.$$

Предполагая, что $l \geqslant l'$, проинтегрируем по частям:

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2 - 1\right)^{l'} dx =$$

$$= \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2{-}1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2{-}1\right)^{l'}\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2{-}1\right)^l \frac{d^{l'+1}}{dx^{l'+1}}\left(x^2{-}1\right)^{l'} dx.$$

Внеинтегральный член здесь равен нулю, поскольку выражение $\dfrac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(x^2 - 1\right)^l$ содержит множитель $\left(x^2 - 1\right)$. Повторяя интегрирование по частям l' раз, получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}\left(x^2 - 1\right)^{l'} dx =$$

$$= (-1)^{l'} \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-l'}}{dx^{l-l'}}\left(x^2 - 1\right)^l \frac{d^{2l'}}{dx^{2l'}}\left(x^2 - 1\right)^{l'} dx =$$

$$= (-1)^{l'} (2l')! \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-l'}}{dx^{l-l'}}\left(x^2 - 1\right)^l dx\;.$$

При $l > l'$, в силу предыдущего рассуждения, интеграл равен нулю. При $l = l'$ имеем

$$\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l\right]^2 dx = (-1)^l(2l)!\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l dx\,.$$

Вычислим

$$I_l = \int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l dx = x\left(x^2-1\right)^l\Big|_{-1}^{1} - 2l\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^{l-1}x^2 dx =$$

$$= -2l\left(I_l + I_{l-1}\right).$$

Получим рекуррентное соотношение и найдем

$$I_l = -\frac{2l}{2l+1}\,I_{l-1} = (-1)^2\frac{2l\,(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)}\,I_{l-2} = \ldots = (-1)^l\frac{(2^l\,l!)^2}{(2l+1)!}\,I_0\,,$$

где, очевидно, $I_0 = 2$. Собирая найденные результаты, получим

$$\left(P_l, P_{l'}\right) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}\,.$$

4) Введем обозначение $P_l^{(m)}(x) \equiv \dfrac{d^m}{dx^m}\,P_l(x)$ и найдем скалярное произведение присоединенных функций Лежандра с одинаковым индексом m:

$$\begin{aligned}\left(P_l^m, P_{l'}^m\right) &= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\,P_{l'}^{(m)}(x)\,dx = \\ &= \left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\,P_{l'}^{(m-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} - \\ &\qquad - \int_{-1}^{1} P_{l'}^{(m-1)}(x)\,\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\right] dx\,.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь произведено интегрирование по частям; внеинтегральный член обращается в ноль. Найдем уравнение для m-й производной полиномов Лежандра $P_l^{(m)}(x)$. Полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}\,P_l(x) - 2x\,\frac{d}{dx}\,P_l(x) + l(l+1)\,P_l(x) = 0\,.$$

Дифференцируя его m раз, получим

$$\left(1-x^2\right)P_l^{(m+2)}(x) - 2x\,(m+1)\,P_l^{(m+1)}(x) + \left[\,l(l+1) - m(m+1)\right]P_l^{(m)}(x) = 0\,.$$

Домножим это уравнение на $\left(1-x^2\right)^m$ и запишем

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^{m+1} P_l^{(m+1)}(x)\right] + \left[l(l+1) - m(m+1)\right]\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x) = 0.$$

Заменяя в этом выражении m на $m-1$, найдем

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m P_l^{(m)}(x)\right] = -\left[\,l(l+1) - m(m-1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1} P_l^{(m-1)}(x).$$

Подставляя это выражение в интеграл (1.1), получим рекуррентное соотношение по m:

$$\begin{aligned}\left(P_l^m, P_{l'}^m\right) &= \left[\,l(l{+}1){-}m(m{-}1)\right]\int_{-1}^{1}\left(1{-}x^2\right)^{m-1} P_l^{(m-1)}(x)\, P_{l'}^{(m-1)}(x)\, dx = \\ &= (l+m)(l-m+1)\left(P_l^{m-1}, P_{l'}^{m-1}\right)\ .\end{aligned}$$

Применяя его последовательно, получим

$$\begin{aligned}(P_l^m, P_{l'}^m) &= \frac{(l+m)!}{(l+m-k)!}\,\frac{(l-m+k)!}{(l-m)!}\,(P_l^{m-k}, P_{l'}^{m-k}) = \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,(P_l, P_{l'}) = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}\ ,\end{aligned} \tag{1.2}$$

где для $(P_l, P_{l'})$ использованы результаты предыдущей задачи.

5) Функции Бесселя $J_\nu(x)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(x) + x\frac{d}{dx}J_\nu(x) + \left(x^2-\nu^2\right)J_\nu(x) = 0\ ,$$

которое можно привести к виду

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(x)\right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(x) = 0\ .$$

Производя замену переменной: $x \to z\,x$, где $z = z_k$ и $z = z_m$ – различные корни уравнения $J_\nu(z) = 0$, получим ДУ для $J_\nu(z_k x)$ и $J_\nu(z_m x)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x)\right) + \left(z_k^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(z_k x) = 0\ ,\\ \frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right) + \left(z_m^2 x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(z_m x) = 0\ .\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $J_\nu(z_m x)$, второе — на $J_\nu(z_k x)$ и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$J_\nu(z_m x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x)\right) - J_\nu(z_k x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right) +$$
$$+\left(z_k^2 - z_m^2\right) x\, J_\nu(z_k x)\, J_\nu(z_m x) = 0\ .$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dx}\left[J_\nu(z_m x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x) - J_\nu(z_k x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right]\ =$$
$$=\ J_\nu(z_m x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x)\right) - J_\nu(z_k x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right)\ ,$$

найдем

$$\begin{aligned}
&\left(z_m^2 - z_k^2\right)\int_0^1 J_\nu(z_k x)\, J_\nu(z_m x)\, x\, dx = \\
&\quad=\ \left[J_\nu(z_m x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_k x) - J_\nu(z_k x)\, x\,\frac{d}{dx}J_\nu(z_m x)\right]\Bigg|_0^1 = \\
&\quad=\ z_k\, J_\nu(z_m)\, J'_\nu(z_k) - z_m\, J_\nu(z_k)\, J'_\nu(z_m)\ =\ 0\ ,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

поскольку $J_\nu(z_k) = 0$ и $J_\nu(z_m) = 0$. Учитывая, что $z_k \neq z_m$, получим

$$\int_0^1 J_\nu(z_k x)\, J_\nu(z_m x)\, x\, dx = 0\ .$$

Замечание. Ортогональными с весом $\rho(x) = x$ на интервале $(0,1)$ будут также функции $J_\nu(z_k x)$, $k = 1, 2, \ldots$, где z_k – k-й корень уравнения $\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$. Действительно, рассмотрим уравнения

$$\alpha J_\nu(z_k) + \beta z_k J'_\nu(z_k) = 0\ ,$$
$$\alpha J_\nu(z_m) + \beta z_m J'_\nu(z_m) = 0$$

как систему относительно α и β. Тогда нетривиальные решения $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ существуют только при равном нулю определителе этой системы:

$$z_k\, J_\nu(z_m)\, J'_\nu(z_k) - z_m\, J_\nu(z_k)\, J'_\nu(z_m) = 0\ .$$

Отсюда, в силу (1.3), следует, что функции $J_\nu(z_k x)$ ортогональны.

1.18. *Указание.* Необходимо непосредственно воспользоваться определением линейного оператора.

1.19. *Указание.* Достаточно показать, например, что $\hat{A}(\alpha f(x)) \neq \alpha \hat{A} f(x)$ для $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.20. *Указание.* Достаточно показать, что оператор $\hat{A}$ ограниченный. Для этого можно использовать неравенство Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**), либо неравенство в указании к задаче **1.5.**

1.21. *Указание.* Достаточно показать, что интегральный оператор Фредгольма ограничен. Это можно сделать, используя неравенство Коши—Буняковского (см. задачу **1.12.**) и квадратичную интегрируемость ядра $K(x, y)$.

1.22. *Указание.* Достаточно показать неограниченность оператора $\hat{A}$ на множестве нормированных в $L_2[a, b]$ функций $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$.

1.23. *Указание.* Непрерывность оператора $\hat{E}$ проверяется непосредственно по определению. Чтобы доказать, что $\hat{E}$ не является вполне непрерывным оператором, достаточно доказать, например, что единичный шар $B(0, 1)$ в l_2, являясь ограниченным, не является компактным множеством, и учесть, что $\hat{E} : B(0, 1) \to B(0, 1)$.

1.24. *Указание.* Достаточно доказать компактность ограниченного множества в конечномерном пространстве.

1.25. *Указание.* При доказательстве воспользоваться интегрированием по частям.