Неопределённый интеграл

О. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на промежутке X, если $\forall x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Поскольку производная от константы равна нулю, то первообразная всегда определена с точностью до произвольной аддитивной константы.

О. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределённым интегралом*:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, C — произвольная константа.

Свойства:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad \int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx,$$

где α, β — числа (последняя формула верна, если интегралы в правой части существуют).

Таблица интегралов

$$\int 0\,dx = C$$

$$\int 1\,dx = x + C$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l}\arcsin x + C,\\ -\arccos x + C\end{array}\right.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x + C,\\ -\operatorname{arcctg} x + C\end{array}\right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{arsh} x + C,\\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C\end{array}\right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{l}\operatorname{sgn}(x)\operatorname{arch}|x| + C,\\ \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C\end{array}\right.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad\qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

В справедливости этих формул легко убедиться, доказав, что производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией.

У всякой непрерывной функции есть первообразная. Но не всегда она выражается через элементарные функции. Например, $\int e^{-x^2}\,dx$ не выражается через элементарные функции.

Задача 1. Вывести формулу $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1+x)(1-x)} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x)}{1+x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x)}{1-x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}(\ln|t| + C_1) - \frac{1}{2}(\ln|y| + C_2) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{y}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Здесь мы сделали две замены переменной: $t = 1 + x$, $y = 1 - x$ и ввели обозначение $C = \frac{C_1 - C_2}{2}$.

Задача 2 (МАВЗ гл. V № 9). Вычислить $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$.

Выделим целую часть у подынтегральной функции:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2-1}\right) dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{1-x^2} =$$
$$= x - 2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Ответ: $x - 2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

Задача 3 (МАВЗ гл. V № 4). Вычислить $\int (3-x^2)^3\,dx$.

$$\int (3-x^2)^3\,dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\,dx = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

Ответ: $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C$.

Задача 4. Вычислить $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Ответ: $-\ln|\cos x| + C$.

Задача 5 (МАВЗ гл. V №18). Вычислить $\int (2x-3)^{10}\, dx$.

$$\int (2x-3)^{10}\, dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{10}\, d(2x-3) = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C.$$

Ответ: $\frac{(2x-3)^{11}}{22} + C$.

Задача 6 (МАВЗ гл. V №34). Вычислить $\int xe^{-x^2}\, dx$.

$$\int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}\, d(-x^2) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + C.$$

Ответ: $-\frac{e^{-x^2}}{2} + C$.

Задача 7 (МАВЗ гл. V № 35). Вычислить $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x\, d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Ответ: $\frac{\ln^3 x}{3} + C$.

Задача 8 (МАВЗ гл. V №51). Вычислить $I = \int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x}$.

Сделаем замену переменной: $t = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Тогда $dt = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, поэтому

$$I = \int 2t\, dt = t^2 + C = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C.$$

Задача 9. Вычислить $I = \int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$.

$$I = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx = \int |\sin x - \cos x|\, dx.$$

Если $\sin x - \cos x \geq 0$, то $I = \int (\sin x - \cos x)\, dx = -\cos x - \sin x + C_1$.

Если $\sin x - \cos x < 0$, то $I = \int (\cos x - \sin x)\, dx = \sin x + \cos x + C_2$.

Значит, $I = (\sin x + \cos x)\operatorname{sgn}(\sin x - \cos x) + C$.

Ответ: $(\sin x + \cos x)\operatorname{sgn}(\sin x - \cos x) + C$.

Формула интегрирования по частям

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Эта формула верна, если функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы и интеграл в правой части существует.

Основные случаи применения:

1) подынтегральная функция имеет вид $\ln x$, $\ln \varphi(x)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и т.п. В этом случае следует взять в качестве функции u подынтегральную функцию и $v = x$.
2) подынтегральная функция имеет вид $P_n(x)e^{ax}$, $P_n(x)\cos ax$, $P_n(x)\sin ax$, где $P_n(x)$ — многочлен. Тогда $u = P_n(x)$. Интегрировать по частям n раз.
3) подынтегральная функция имеет вид $e^{ax}\underbrace{\sin bx}_{u}$, $e^{ax}\underbrace{\cos bx}_{u}$, $\underbrace{\sin(\ln x)}_{u}$, $\underbrace{\cos(\ln x)}_{u}$ и т.п. В этом случае нужно интегрировать по частям два раза, чтобы получить уравнение, из которого определяется значение интеграла.

Задача 10. Вычислить $I = \int x^2 e^x\, dx$.

Пусть $u = x^2$, $dv = e^x\, dx$. Тогда $du = 2x\, dx$, $v = e^x$, и

$$I = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx.$$

Проинтегрируем по частям ещё раз. Пусть $u = x$, $dv = e^x\, dx$. Тогда $du = dx$, $v = e^x$, и

$$I = x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x\, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Ответ: $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

Задача 11. Вычислить $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$.

Пусть $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}\, dx$. Тогда $v = \frac{e^{ax}}{a}$, $du = -b \sin bx \, dx$, и

$$I = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Проинтегрируем по частям ещё раз. Пусть $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}\, dx$. Тогда $v = \frac{e^{ax}}{a}$, $du = b \cos bx \, dx$, и

$$I = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b e^{ax} \sin bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I + \tilde{C}.$$

Отсюда

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2} + \tilde{C},$$

$$I = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Ответ: $\frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$.

Задача 12. Вычислить $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $u = \frac{1}{(x^2+1)^n}$, $dv = dx$. Тогда $v = x$, $du = -\frac{2nx}{(x^2+1)^{n+1}} dx$, и

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2+1)^{n+1}} dx =$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} - 2n \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}.$$

Отсюда

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n}$$ — рекуррентная формула.

Тогда

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C, \qquad I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \tilde{C}, \qquad \text{и т. д.}$$

ДЗ 18. Задачи для самостоятельного решения из МАВЗ гл. V № 2, 3, 20, 26, 30, 46, 50, 53, 58, 60, 68, 69.

Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: МАВЗ гл. V §5.

Решения некоторых задач из ДЗ

МАВЗ гл. V № 46. Вычислить $I = \int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$.

Представим интеграл в виде:

$$I = \int x^2(1-5x^2)^{10} x\,dx.$$

Сделаем замену переменной: $1-5x^2 = t$, тогда $x^2 = \frac{1-t}{5}$, $2x\,dx = -\frac{dt}{5}$, поэтому

$$I = \int \frac{1-t}{5}\cdot t^{10}\cdot\left(-\frac{dt}{10}\right) = \frac{1}{50}\int (t^{11}-t^{10})\,dt = \frac{1}{50}\left(\frac{t^{12}}{12}-\frac{t^{11}}{11}\right)+C =$$
$$= \frac{t^{11}(11t-12)}{50\cdot 132}+C = -\frac{(1-5x^2)^{11}(1+55x^2)}{6600}+C.$$

Ответ: $-\frac{(1-5x^2)^{11}(1+55x^2)}{6600}+C.$

МАВЗ гл. V № 50. Вычислить $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Сделаем замену: $\sqrt{1+e^x} = t$. Тогда $e^x = t^2-1$, $dt = \frac{e^x\,dx}{2\sqrt{1+e^x}}$, и

$$I = \int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C = \ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2}+C =$$
$$= \ln\frac{e^x}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2}+C = \ln e^x - \ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)^2 + C = x - 2\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)+C.$$

Ответ: $x-2\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)+C.$

МАВЗ гл. V № 53. Вычислить $I = \int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$, сделав замену $x = a\cos 2t$.

Подынтегральная функция определена при x, лежащих между a и $-a$, поэтому при подстановке $x = a\cos 2t$ можно считать, что t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Сделав замену, получим

$$I=\int\sqrt{\frac{a+a\cos 2t}{a-a\cos 2t}}\cdot a\cdot(-\sin 2t)\cdot 2\,dt=-2a\int\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}\cdot 2\sin t\cos t\,dt=$$

$$=-2a\int 2\cos^2 t\,dt=-2a\int(1+\cos 2t)\,dt=-2a\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=$$

$$=-2a\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=-a\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Ответ: $=-a\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C.$

МАВЗ гл. V № 60. Вычислить $I=\int x^3e^{-x^2}\,dx$.

Запишем интеграл в виде

$$I=\frac{1}{2}\int(-x^2)e^{-x^2}\,d(-x^2)$$

и сделаем замену $-x^2=t$, после чего проинтегрируем по частям:

$$I=\frac{1}{2}\int te^t\,dt=\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^t\,dt\right)=\frac{1}{2}(te^t-e^t)+C=-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C.$$

Ответ: $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C.$