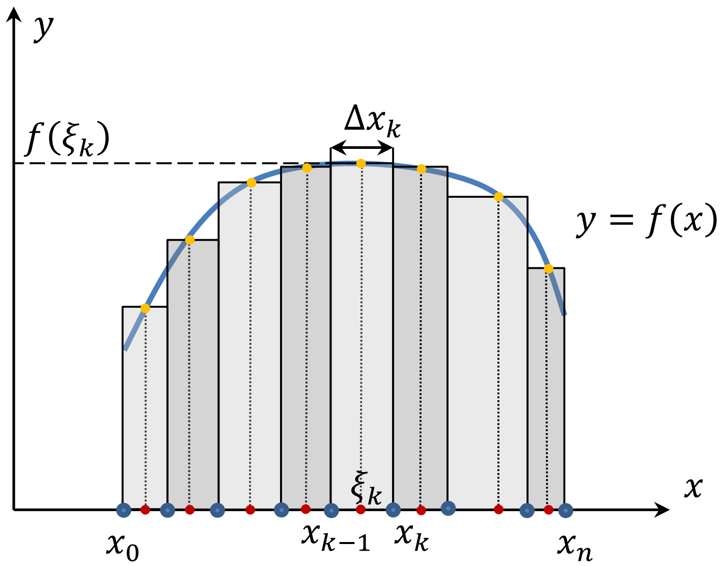
Определённый интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Выберем внутри отрезка произвольные точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ так, что $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.



На каждом маленьком отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Интегральной суммой называется выражение

$$I(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Геометрический смысл интегральной суммы — сумма площадей закрашенных прямоугольников, взятых со знаком «+», если $f(\xi_k) \geq 0$, и со знаком «–» в противном случае.

Пусть $\Delta = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$. Тогда число $\lim\limits_{\Delta \to 0} I(x_k, \xi_k)$ называется *определённым интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. (Предел последовательности интегральных сумм не должен зависеть от выбора точек x_k и ξ_k.) Обозначение определённого интеграла: $\int_a^b f(x)\,dx$. Точка a называется *нижним пределом интегрирования*, точка b — *верхним пределом интегрирования*.

Подчеркнём, что определённый интеграл — это число, он не зависит от x. Более того, переменную интегрирования мы можем обозначить любой буквой:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(y)\,dy = \int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

О. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует $\int_a^b f(x)\,dx$.

Интегрируемы непрерывные, кусочно-непрерывные (т.е. те, которые имеют на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва, причём все они являются точками устранимого разрыва или разрыва первого рода), монотонные функции. Неинтегрируемы неограниченные функции.

Геометрический смысл определённого интеграла: если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ — площадь под графиком $f(x)$. (Если же $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$, то интеграл равен площади под графиком, взятой со знаком «–».)

По определению полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Свойства:

1) $\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$;
2) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$, если интегралы в левой части существуют;
3) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — некоторая её первообразная на отрезке $[a,b]$, то
   $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)}$ — формула *Ньютона—Лейбница.*
   Заметим, что значение определённого интеграла не зависит от выбора первообразной $F(x)$ (все первообразные отличаются друг от друга на константу, которая сокращается при вычислении $F(b) - F(a)$).

Задача 1. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$, исходя из определения определённого интеграла.

Поскольку функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то она интегрируема на нём. Значение определённого интеграла равно пределу последовательности интегральных сумм $I(x_k, \xi_k)$, который не зависит от способа разбиения отрезка и выбора промежуточных точек, поэтому рассмотрим наиболее простое разбиение отрезка на одинаковые части:

$$x_0 = 0, \qquad x_n = \frac{\pi}{2}, \qquad x_k = \frac{\pi k}{2n}, \qquad \Delta x_k = \frac{\pi}{2n}, \qquad \xi_k = x_k, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi k}{2n}.$$

Для того чтобы вычислить сумму, выведем следующую формулу:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kt = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}e^{ikt} = \operatorname{Im}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{it}\frac{e^{\frac{int}{2}}\left(e^{-\frac{int}{2}}-e^{\frac{int}{2}}\right)}{e^{\frac{it}{2}}\left(e^{-\frac{it}{2}}-e^{\frac{it}{2}}\right)}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(e^{\frac{i(n+1)t}{2}}\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}\cdot\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}, \qquad t \neq 2\pi m, \qquad m \in \mathbb{Z},$$

где была использована формула Эйлера и формула для суммы геометрической прогрессии.

Тогда

$$I = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4n}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 2. Вычислить $\int_0^2 x^2\,dx$.

Воспользуемся формулой Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_0^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{3}-\frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Рассмотрим формулу Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Зафиксируем нижний предел интегрирования a и будем считать верхний предел интегрирования b переменным. Тогда значение определённого интеграла будет функцией, зависящей от b. Найдём производную этой функции:

$$\frac{d}{db}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{d}{db}\big(F(b)-F(a)\big) = F'(b) - 0 = f(b).$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{d}{db}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(b).}$$

Аналогично получим

$$\frac{d}{da}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{d}{da}\big(F(b) - F(a)\big) = 0 - F'(a) = -f(a),$$

т.е.

$$\boxed{\frac{d}{da}\int\limits_a^b f(x)\,dx = -f(a).}$$

Задача 3 (задача к общему зачёту №61а). Вычислить $\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2\,dx$, $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2\,dx$.

$$\frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = \sin b^2\,, \qquad \frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = -\sin a^2.$$

Заметим, что для вычисления производных не понадобилось вычислять интеграл (он и не берётся в элементарных функциях).

Ответ: $\sin b^2, -\sin a^2$.

Теперь рассмотрим формулу Ньютона—Лейбница в случае, когда пределы интегрирования зависят от параметра x:

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F\big(\psi(x)\big) - F\big(\varphi(x)\big).$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big(F\big(\psi(x)\big) - F\big(\varphi(x)\big)\Big) = F'\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x) - F'\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) =$$
$$= f\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x).$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x) - f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x).}$$

Задача 4 (задача к общему зачёту № 61б,в,г,д). Вычислить

а) $\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{0} e^{-x^2}\,dx$,

б) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$,

в) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$,

г) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

Решение:

а) $\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{0} e^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$,

б) $\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2x\sqrt{1+x^4}$,

в) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$,

г) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

Ответ: а) $-\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$, б) $2x\sqrt{1+x^4}$, в) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$, г) $\frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

Задача 5 (МАВЗ гл. VIII № 16а). Вычислить $I = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$.

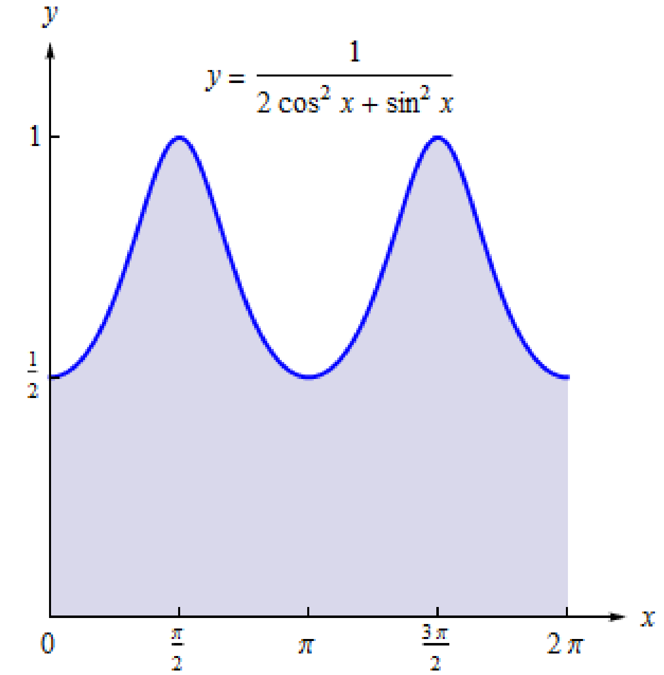
Вычислим интеграл с помощью формулы Ньютона—Лейбница. Для этого найдём первообразную подынтегральной функции:

$$F(x) = \int\frac{dx}{\cos^2 x\,(2+\operatorname{tg}^2 x)} = \int\frac{d\operatorname{tg} x}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

По формуле Ньютона—Лейбница получим:

$$I = F(x)\big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Но это *неправильный* ответ, т.к. подынтегральная функция положительна, и определённый интеграл равен площади под её графиком, а эта площадь не нулевая:



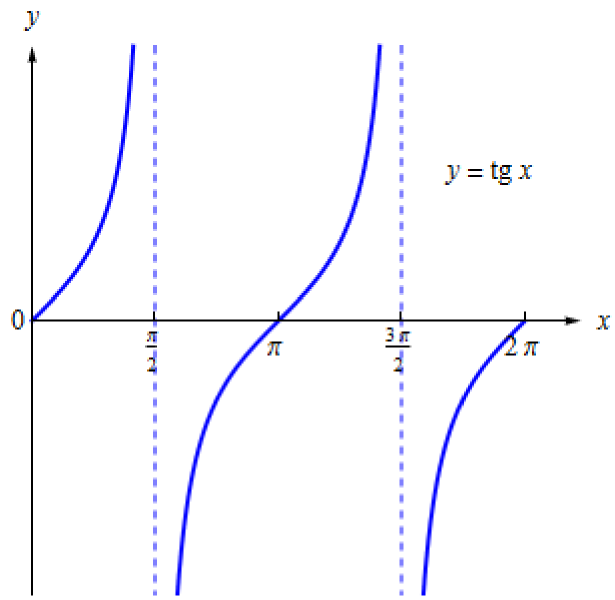
Ошибка в том, что функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$ не является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\cos^2 x+\sin^2 x}$ на всём отрезке $[0, 2\pi]$, поскольку она разрывна в точках $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ (это точки разрыва первого рода). Поэтому формулу Ньютона—Лейбница на отрезке $[0, 2\pi]$ применять нельзя. Но мы можем разбить отрезок $[0, 2\pi]$ на участки непрерывности функции $F(x)$, и применить формулу Ньютона—Лейбница на каждом из этих участков (доопределив функцию $F(x)$ в точках разрыва её предельными значениями слева или справа):

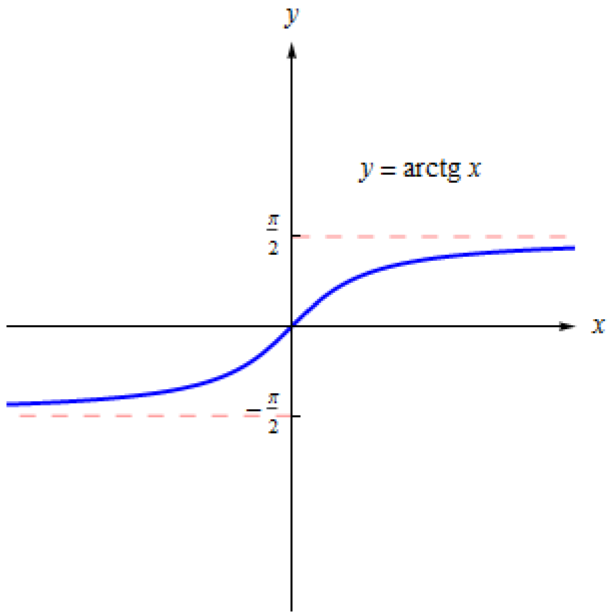
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{3\pi/2}^{2\pi} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - 0\right) + \left(\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}-0} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right) +$$

$$+ \left(0 - \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}+0} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi.$$





Ответ: $\sqrt{2}\pi$.

Формула интегрирования по частям

Если функции $f'(x)$ и $g'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Задача 6 (задача к общему зачёту № 52в). Вычислить $\int_1^e \ln x\,dx$.

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - x|_1^e = 1.$$

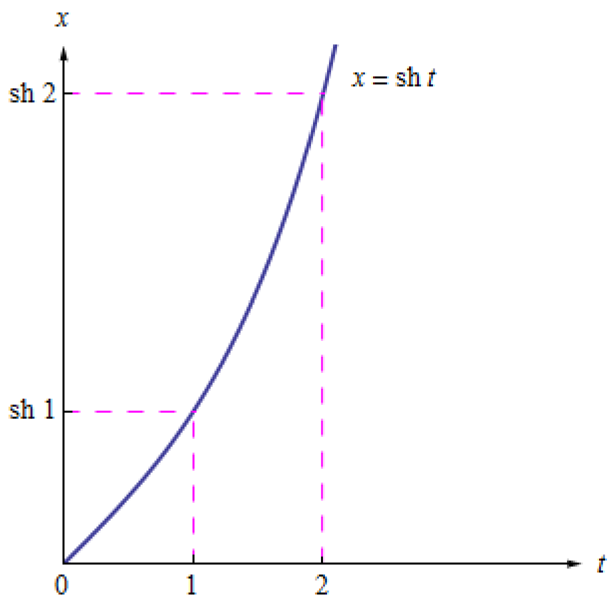
Ответ: 1.

Формула замены переменной

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a,b]$, а функция $x = \varphi(t)$ определена и имеет непрерывную производную на отрезке $t \in [\alpha,\beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ и $a \le \varphi(t) \le b$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$. Тогда в интеграле можно сделать замену переменной $x = \varphi(t)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

Задача 7 (МАВЗ гл. VIII № 15а). Вычислить $I = \int_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.



Сделаем замену переменной: $x = \operatorname{sh} t$. Тогда переменная t изменяется от 1 до 2, $dx = \operatorname{ch} t\,dt$, $\sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t$. Интеграл принимает вид:

$$I = \int_1^2 dt = t|_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 8 (МАВЗ гл. VIII №20). Можно ли сделать в интеграле $\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ замену переменной $x = \sin t$?

Нельзя, т.к. $\sin t$ не может изменяться от 0 до 3.

Ответ: нет.

ДЗ 21. Задачи для самостоятельного решения из МАВЗ гл. VIII № 2(а), 15(б), 16(б), 17(б), 18(б), 19(б), 21, 22, 24(а,г).

Решения некоторых задач из ДЗ

МАВЗ гл. VIII № 24(а). Вычислить $I = \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

$$x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right) = \frac{3}{4}(t^2 + 1),$$

где $t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{\sqrt{3}t-1}{2}$, $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt$. Тогда

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}t - 1}{t^2 + 1}\,dt.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}t - 1}{t^2 + 1}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C,$$

То

$$I = \left(\frac{1}{2}\ln(t^2 + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t\right)\Bigg|_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.