Чеченский государственный университет

Факультет математики и компьютерных технологий

Интегральные уравнения: конспект лекций

Д. В. Гринёв

Грозный, 2017

Содержание

1 Основные определения

Уравнение называется интегральным если искомая неизвестная функция $u(x)$ появляется под знаком интеграла. Типичный вид интегрального уравнния (ИУ) для $u(x)$

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

где непрерывная по совокупности аргументов функция $K(x,t)$ называется **ядром** ИУ, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – пределы интегрирования. Функции $K(x,t), f(x)$ считаются задаными. Данное ИУ является **линейным** по $u(x)$ поскольку функция $u(x)$ появляется в первой степени. Решить ИУ – ознвчает найти неизвестную функцию $u(x)$, удовлетворяющую данному уравнению. ИУ возникают в задачах фзики, химии и биологии, в которых имеется модель, описываемая задачей Коши для начальных значений в конечном интервале.

Пример 1 Решить задачу Коши и показать, что она сводится к ИУ, решением которого является решение данной задачи Коши

$$u'(x) = 2xu(x), \qquad u(0) = 1 \qquad x \geq 0$$

1 Классификация линейных ИУ

Имеется два главных класса: **ИУ Фредхольма** и **ИУ Вольтерра**. Также выделяют четыре подкласса ИУ:

1. Интегро-дифференциальные уравнения (ИДУ)
2. Сингулярные уравнения
3. ИУ Фредхольма-Вольтерра
4. ИДУ Фредхольма-Вольтерра

2 Линейные ИУ Фредхольма

Рассмотрим заранее заданные $a = const, b = const$ и функции $K(x,t), f(x), \phi(x)$. Стандартная форма ИУ Фредхольма:

$$\phi(x)u(x) \,=\, f(x) \,+\, \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

где λ – заданный параметр, смысл которого станет ясным далее. Мы будем изучать два типа ИУ Фредхольма:

1. При $\phi(x) = 0$ – ИУ Фредхольма первого рода

$$0 \,=\, f(x) \,+\, \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

2. При $\phi(x) = 1$ – ИУ Фредхольма второго рода

$$u(x) \,=\, f(x) \,+\, \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

Причем при $f(x) = 0$ ИУ называется **однородным**, а при $f(x) \neq 0$ – **неоднородным**.

3 Линейные ИУ Вольтерра

Рассмотрим заранее заданные пределы интегрирования $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и функции $K(x,t)$, $f(x)$, $\phi(x)$. Стандартная форма ИУ Вольтерра:

$$\phi(x)u(x) \,=\, f(x) \,+\, \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

где λ – заданный параметр, смысл которого станет ясным далее. Мы будем изучать два типа ИУ Вольтерра:

1. При $\phi(x) = 0$ – ИУ Вольтерра первого рода

$$0 \,=\, f(x) \,+\, \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

2. При $\phi(x) = 1$ – ИУ Вольтерра второго рода

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

Причем при $f(x) = 0$ ИУ называется **однородным**, а при $f(x) \neq 0$ – **неоднородным**.

Пример 2 Решить задачу Коши и показать, что она сводится к ИУ, решением которого является решение данной задачи Коши. Определить тип, род и свойства полученного ИУ.

$$u'(x) = 4u(x), \qquad u(0) = 1 \qquad x \geq 0$$

Пример 3 Решить задачу Коши и показать, что она сводится к ИУ, решением которого является решение данной задачи Коши. Определить тип, род и свойства полученного ИУ.

$$u'(x) = 3x^2u(x), \qquad u(0) = 1 \qquad x \geq 0$$

Пример 4 Решить задачу Коши и показать, что она сводится к ИУ, решением которого является решение данной задачи Коши. Определить тип, род и свойства полученного ИУ.

$$u'(x) = u(x)^2, \qquad u(0) = 4 \qquad x \geq 0$$

4 Решение ИУ

Решением ИУ на интервале интегрирования является функция, удовлетворяющая исходному ИУ, т.е обращающая его при подстановке в тождество. Вопросы существования и единственности решений ИУ будут рассмотрены позднее.

Пример 5 Показать, что функция $u = e^x$ является решением ИУ.

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$$

Пример 6 Показать, что функция $u = x$ является решением ИУ.

$$u(x) = \frac{5x}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\int_0^1 (x+t)u(t)\mathrm{d}t$$

Пример 7 Найти α если функция $u = e^{-x^2}$ является решением ИУ.

$$u(x) \,=\, 1 \,-\, \alpha \int_0^x tu(t)\mathrm{d}t$$

Пример 8 Найти α если функция $u = x^2 + x^3$ является решением ИУ.

$$u(x) \,=\, x^3 - x^2 \,-\, 2x + \alpha \int_{-1}^1 (xt^2 + x^2 t)u(t)\mathrm{d}t$$

Не всегда возможно получить решение ИУ в элементарных функциях и закрытой форме. Иногда решение можно найти в виде степенного ряда. **Нелинейные** ИУ могут иметь более одного решения.

Пример 9 Показать, что функции $u = x$ и $u = 5x$ являются решениями ИУ.

$$u(x) \,=\, \frac{5x}{6} \,+\, \frac{1}{2}\int_0^1 xu(t)^2\mathrm{d}t$$

5 Сведение ИУ Вольтерра к ОДУ

Вспомним из курса матанализа как дифференцировать интегралы по правилу Лейбница:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t)\mathrm{d}t \,=\, G(x,\beta(x))\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x} \,-\, G(x,\alpha(x))\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \,+\, \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial G}{\partial x}\mathrm{d}t$$

где $G(x,t)$ и $\frac{\partial G}{\partial x}$ – непрерывные функции в области $D \,:\, a \,\le\, x \,\le\, b$, $t_0 \,\le\, t \,\le\, t_1$, а пределы интегрирования $\alpha(x), \beta(x)$ имеют непрерывные производные для $a \le x \le b$

Пример 1 Найти производную интеграла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x \,-\, t)^2 u(t)\mathrm{d}t$$

Пример 2 Найти производную интеграла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x \,-\, t)u(t)\mathrm{d}t$$

Пример 3 Найти производную интеграла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x u(t)\mathrm{d}t$$

Если дано ИУ, то его можно попробовать свести к ОДУ с соответствующими начальными условиями и решить полученную задачу Коши. Для этого нужно продифференцировать обе части ИУ по правилу Лейбница и найти начальное условие для неизвестной функции $u(x)$.

Пример 4 Найти задачу Коши эквивалентную ИУ Вольтерра. Решите её и проверьте, что найденное решение является решением исходного ИУ.

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$$

Дифференцируя обе части уравнения по правилу Лейбница и подставив в исходное ИУ $x = 0$ получаем

$$u'(x) = -u(x), \qquad u(0) = 1$$

Пример 5 Найти задачу Коши эквивалентную ИУ Вольтерра. Решите её и проверьте, что найденное решение является решением исходного ИУ.

$$u'(x) = 1 - \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$$

Дифференцируя обе части уравнения по правилу Лейбница и подставив в исходное ИУ $x = 0$ получаем

$$u''(x) = -u(x), \qquad u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1$$

Пример 6 Найти задачу Коши эквивалентную ИУ Вольтерра.

$$u(x) = x^3 + \int_0^x (x-t)^2 u(t)\mathrm{d}t$$

Подсказка: продифференцировать обе части ИУ ***три*** *раза.*

Пример 7 Найти задачу Коши эквивалентную ИУ Вольтерра.

$$u(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)^2 u(t)\mathrm{d}t$$

6 Сведение задачи Коши к ИУ Вольтерра

Вспомним из курса матанализа формулу сведения многократного интеграла к одномерному интегралу:

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) \mathrm{d}x_n \dots \mathrm{d}x_1 \;=\; \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) \mathrm{d}t$$

Полезные специальные случаи этой формулы (*докажите самостоятельно*):

$$\int_0^x \int_0^x f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}t \;=\; \int_0^x (x-t) f(t) \mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}t \mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) \mathrm{d}t$$

Пример Свести к одномерному интегралу

$$I(x) \;=\; \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}t \mathrm{d}t \mathrm{d}t$$

Пример Свести к одномерному интегралу

$$I(x) \;=\; \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}t \mathrm{d}t$$

Рассмотрим задачу Коши вида:

$$y'''(x) \,+\, p(x)y''(x) \,+\, q(x)y'(x) \,+\, r(x)y(x) \;=\; g(x),\; y(0) = \alpha, y'(0) = \beta, y''(0) = \gamma$$

где функции могут $p(x), q(x), r(x)$ быть разложены в ряд Тэйлора, а α, β, γ – константы. Пусть функция $g(x)$ непрерывна на рассматриваем интервале. Положим

$$y'''(x) \;=\; u(x)$$

и проинтегрируем обе части этого уравнения от 0 до x:

$$y''(x) \,-\, y''(0) \;=\; \int_0^x u(t) \mathrm{d}t$$

Пусть $y''(0) = \gamma$, тогда:

$$y''(x) = \gamma + \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$$

и еще раз проинтегрируем обе части этого уравнения от 0 до x:

$$y'(x) - y'(0) = \gamma x + \int_0^x \int_0^x u(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

Пусть $y'(0) = \beta$, тогда:

$$y'(x) = \beta + \gamma x + \int_0^x \int_0^x u(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

Учитывая, что $y(0) = \alpha$ еще раз проинтегрируем обе части этого уравнения от 0 до x:

$$y(x) = \alpha + \beta x + \frac{\gamma x^2}{2} + \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t\mathrm{d}t$$

Используя формулы понижения кратности интегралов получим выражения

$$y'(x) = \beta + \gamma x + \int_0^x (x-t)u(t)\mathrm{d}t$$

$$y(x) = \alpha + \beta x + \frac{\gamma x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)\mathrm{d}t$$

подставив которые в исходную задачу Коши, найдём искомое ИУ:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

где

$$K(x,t) = p(x) + q(x)(x-t) + \frac{1}{2}r(x)(x-t)^2$$

Упражнение: выпишите выражение для $f(x)$

Пример. Свести задачу Коши к ИУ

$$y'''(x) - 3y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = 0, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$$

Пример. Свести задачу Коши к ИУ

$$y''(x) + y(x) = \cos(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

7 Сведение краевой задачи к ИУ Фредхольма

Заданную краевую задачу (КЗ) можно свести к ИУ аналогичным способом. При применении последнего нужно найти начальные значения производных, которые не всегда заданы в исходной КЗ. Продемонстрируем это на примере.

Пример. Вывести ИУ Фредхольма для КЗ

$$y''(x) + y(x) = x, \qquad y(0) = 1, \qquad y(\pi) = \pi - 1$$

Положим $y''(x) = u(x)$ и проинтегрируем обе части этого уравнения от 0 до x:

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$$

Заметим, что значение $y'(0)$ не дано в условии КЗ, поэтому определим его позже, используя граничное условие при $x = \pi$. Интегрируя обе части выражения и используя граничное условие $y(0) = 1$:

$$y(x) = 1 + y'(0)x + \int_0^x (x-t)u(t)\mathrm{d}t$$

Подставим в обе части полученного выражения $x = \pi$ и найдем $y'(0)$

$$y'(0) = \frac{1}{\pi}\left((\pi - x) - \int_0^x (\pi - t)u(t)\mathrm{d}t\right)$$

Проделав ряд выкладок получаем выражение

$$y(x) = 1 + \frac{x}{\pi}\left((\pi - 2) - \int_0^x (\pi - t)u(t)\mathrm{d}t) + \int_0^x (x-t)u(t)\mathrm{d}t\right)$$

которое приводится к ИУ Фредхольма вида

$$u(x) = \frac{2x - \pi}{\pi} - \int_0^x K(x,t)u(t)\mathrm{d}t$$

с ядром $K(x,t)$. Заметим, что получение **неоднородного** ИУ стало следствием неоднородности в граничных условиях исходной КЗ.

Упражнение: Выписать явный вид ядра $K(x,t)$.

Упражнение: Вывести ИУ Фредхольма для КЗ

$$y''(x) + 4y(x) = sin(x), \qquad y(0) = y(1) = 0, \qquad 0 < x < 1$$

2 Евклидовы и нормированные пространства

Для освоения методов решения ИУ потребуются понятия евклидова и нормированного пространств, изучавшихся в курсе линейной алгебры.

1 Евклидовы пространства (ЕП)

Линейное пространство E над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется евклидовым пространством, если $\forall x, y \in E$ поставлено в соответствие вещественное число $(x, y) \in \mathbb{R}$, называемое скалярным произведением, для которого выполняются аксиомы:

- $\forall x, y \in E : (x, y) = (y, x)$
- $\forall x, y, z \in E : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
- $\forall x \in E : (x, x) \geq 0$
  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
  $x + \theta = x$

Пример: Показать, что в линейном пространстве столбцов T_n скалярное произведение может быть определено формулой

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Пример: Показать, что в линейном пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций скалярное произведение может быть определено формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

Нормой элемента x из ЕП называется число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Углом между ненулевыми элементами x и y из ЕП называется число $\phi = \arccos \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$. Если $(x, y) = 0$, то элементы x и y из ЕП называются *ортогональными.*

2 Нормированные пространства (НП)

Линейное пространство N над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется нормированным пространством, если $\forall x \in N$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\| \in \mathbb{R}$, называемое его нормой, для которого выполняются условия:

- $\forall x \in N : \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- $\forall x \in N : \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| \ = \ |\lambda| \, \|x\|$
- $\forall x, y \in N : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)