Введение

0.1. Логика разделения переменных

Из методов решения дифференциальных уравнений метод разделения переменных (РП), наверное, появился раньше всех. Являясь базовым методом, он успешно применяется и в современной практике, а в последнее время получил дальнейшее развитие.

Первоначально применимость метода РП ограничивалась уравнениями, которые можно привести к равенству выражений, зависящих от разных переменных. Для обыкновенных дифференциальных уравнений это равенство дифференциала выражения, зависящего только от искомой функции, дифференциалу выражения, зависящего только от независимой переменной:

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx, \tag{0.1.1}$$

для уравнений в частных производных – равенство между собой функций от разных **независимых** переменных, например, в случае уравнений колебаний струны

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{0.1.2}$$

подстановка решения в виде произведения $w = X(x)T(t)$ приводит к уравнению

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{0.1.3}$$

(штрих обозначает производную по соответствующей переменной).

Естественно, дальнейший ход рассуждений существенно зависит от того, какую задачу мы решаем – в первом случае ищется функция $y = y(x)$, поэтому почленное интегрирование (0.1.1) приводит к общему решению (в неявном виде) обыкновенного уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C,$$

а во втором случае ищется функция **двух независимых** переменных $w(x, y)$, которая (нами) представляется в виде произведения $w(x,t) = X(x)T(t)$. Из равенства (0.1.3) следует, что

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = C. \tag{0.1.4}$$

Кроме этого, мы всегда должны помнить, что найденное решение – частное; и даже если таких решений найдено бесконечно много (например, счетное множество), то ниоткуда не следует, что мы нашли **все** решения, т. е. с помощью найденного набора можно найти решение, удовлетворяющее любым (допустимым) краевым и начальным решениям. При этом соотношение (0.1.4) приводит к **двум** обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} X'' - CX &= 0, \\ T'' - a^2CT &= 0 \end{aligned} \tag{0.1.5}$$

с соответствующими условиями – по пространственной переменной (x) в ограниченной области это обычно краевые условия, и тем самым количество решений первого уравнения (и, вообще говоря, их существование) остается под вопросом.

В классических задачах математической физики, как правило, краевые условия таковы, что система (0.1.5) имеет счётное множество решений. Так, если мастер, изготовивший гитару, малые колебания струны которой описываются уравнением (0.1.2) – не сумасшедший, концы струны закреплены на корпусе гитары, и краевые условия имеют вид

$$\begin{cases} w(0,t) = 0, \\ w(l,t) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{0.1.6}$$

Рассмотрим последовательно три случая решения первого уравнения системы (0.1.5), когда константа разделения переменных C больше, равна или меньше нуля.

1. $C > 0$. Общее решение уравнения имеет вид $X = C_1e^{\sqrt{C}x} + C_2e^{-\sqrt{C}x}$, для удовлетворения краевых условий необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \text{при} \quad x = 0 \qquad C_1 + C_2 = 0, \\ \text{при} \quad x = l \qquad C_1e^{\sqrt{C}l} + C_2e^{-\sqrt{C}l} = 0. \end{cases} \tag{0.1.7}$$

   Система (0.1.5) однородна, поэтому для существования решения необходимо равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{C}l} & e^{-\sqrt{C}l} \end{vmatrix} = 0,$$

   что возможно лишь в случае $C = 0$, а это, в свою очередь, противоречит исходному предположению $C > 0$.

2. $C = 0$. Общее решение имеет вид $X = C_1x + C_2$. В данном случае очевидно, что нетривиальных решений нет, так как прямая $C_1x + C_2$ не может пересекать другую прямую (ось абсцисс x) в двух различных точках ($x = 0$ и $x = l$).

3. $C < 0$. Общее решение имеет вид

$$X = C_1 \sin\left(\sqrt{-C}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{-C}x\right),$$

для удовлетворения краевых условий необходимо выполнение следующих равенств:

$$\begin{cases} \text{при} \quad x = 0 \qquad C_2 = 0, \\ \text{при} \quad x = l \qquad C_1 \sin\left(\sqrt{-C}l\right) = 0. \end{cases} \tag{0.1.8}$$

Из второго уравнения следует существование счётного множества значений константы разделения переменных $C = -\dfrac{\pi^2 k^2}{l^2}$, $k = 1, 2, \ldots$, при которых существует нетривиальное решение системы (0.1.5).

В силу этого обстоятельства при проведении процедуры разделения переменных часто сразу пишут $C = -\lambda^2$, т. е. $\lambda = \pi k/l$.

И ещё одно замечание о том, что поставленные условия не могут быть “какие угодно”. Для решения задачи о колебании струны надо задать начальное отклонение струны от положения равновесия $w(x, 0) = \varphi(x)$ и начальную скорость струны $w_t(x, 0) = \psi(x)$ в каждой точке интервала $[0, l]$. Совершенно очевидным выглядит условие согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, так как концы струны закреплены в любой момент времени $t \geqslant 0$. Аналогично, должно выполняться и условие $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

0.2. Задача Штурма–Лиувилля

В большинстве классических задач математической физики для поиска функции $X(x)$ возникает **задача Штурма–Лиувилля**: найти значения λ, при которых существует нетривиальное решение задачи

$$L(X) + \lambda \rho X = 0, \qquad X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

а также найти эти решения (собственные числа и собственные функции). Здесь

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] - q(x)X,$$

$k(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ – непрерывные на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ функции. Обычно $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$, хотя функция $k(x)$ может обращаться в нуль на одном из концов отрезка, в этом случае эта точка является **особой**, и постановка краевой задачи имеет свои особенности. Справедливы следующие утверждения [6]:

1. Существует счётное множество собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n,$$

которым соответствуют собственные функции $X_1(x)$, $X_2(x)$, $\ldots$, $X_n(x)$.
2. При $q > 0$ все собственные значения λ_n положительны.
3. Собственные функции $X_m(x)$ и $X_n(x)$ при $m \neq n$ ортогональны между собой с весом $\rho(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, т. е.

$$\int\limits_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)dx = 0, \qquad (m \neq n).$$

4. ***Теорема разложимости В. А. Стеклова***.
Произвольная функция $F(x)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничным условиям $F(0) = F(l) = 0$, разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{X_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x),$$

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|}\int\limits_0^l F(x)X_n\rho(x)dx, \quad \|X_n\|^2 = \int\limits_0^l X_n^2(x)\rho(x)dx.$$

В силу пп. 3, 4 собственные функции задачи Штурма–Лиувилля образуют ортогональный базис гильбертова пространства, и любой его элемент представим рядом Фурье по этому базису. Поэтому становится возможным удовлетворить любому (разумному) начальному условию, например, $w(x,0) = \varphi(x)$, подставив в это условие слева произвольную суперпозицию частных решений

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t)\right|_{t=0},$$

а справа – разложение функции φ

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x),$$

и найдя коэффициенты A_n приравниванием соответственных подобных.

Теперь перед переходом к основной (более строгой и сжатой) части изложения метода Фурье нам остаётся лишь рассмотреть некоторые аспекты применимости разделения переменных в зависимости от свойств уравнения. Если коэффициенты исходного уравнения с частными производными – постоянные, то, как правило, проблем с разделением переменных не возникает (простейший пример – уравнение Лапласа в декартовой системе координат). Однако при переходе к криволинейным системам координат в уравнении возникают коэффициенты Ламе – функции независимых переменных (вид оператора Лапласа в различных криволинейных системах координат приведен в приложении к книге [6]). Аналогичная ситуация возникает и при наличии переменного потенциала, например, в уравнении Шрёдингера. Возможность разделения переменных тесно связана с **симметрией** исходного уравнения [7]. В этой книге подробно рассматриваются уравнения Лапласа, Гельмгольца, Шрёдингера и ряд других, и указываются все системы координат, в которых переменные делятся.

0.3. Несколько слов о нелинейных уравнениях

Для нелинейных уравнений до последнего времени отсутствовала сколько-нибудь содержательная теория разделения переменных. Очевидно было только то, что отсутствие принципа суперпозиции не позволяет получить решения заданных краевых задач с помощью линейной суперпозиции сколь угодно большого количества “стандартных” частных решений. Однако для ряда уравнений получались даже общие решения.

Рассмотрим, например, уравнение

$$w\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{0.3.1}$$

и попытаемся найти решения вида

$$w(x, y) = X(x)Y(y). \tag{0.3.2}$$

При непосредственно подстановке, с учётом того, что $w_x = X'Y$, $w_y = = XY'$, $w_{xy} = X'Y'$ (штрих обозначает производную по соответствующей переменной), получаем $XX'YY' = aXX'YY'$. Отсюда следует, что при $a = 1$ получается тождество – выражение (0.3.2) является **общим** решением уравнения (0.3.1), тогда как при $a \neq 1$ решений такого вида нет вообще. Однако из этого ещё не следует, что метод разделения переменных не дает решения при других значениях параметра a. Будем искать решения вида

$$w(x, y) = \Phi\big(X(x) + Y(y)\big). \tag{0.3.3}$$

Тогда после подстановке этого выражения в уравнение (0.3.1) получим (после сокращения на $X'Y'$):

$$\Phi\Phi'' = a\big(\Phi'\big)^2,$$

где штрих означает производную функции Φ по её аргументу $\omega = X+$ $+Y$. Общее решение этого (обыкновенного) дифференциального уравнения имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} (C_1\omega + C_2)^{\frac{1}{1-a}}, & a \neq 1, \\ \exp(C_1\omega + C_2), & a = 1. \end{cases}$$

Окончательно, "убирая" лишние константы C_1 и C_2 в произвольные функции $X(x)$ и $Y(y)$, получаем **общее** решение уравнения (0.3.1) при любом a:

$$w(x,y) = \begin{cases} \big(X(x) + Y(y)\big)^{\frac{1}{1-a}}, & a \neq 1, \\ \exp\big(X(x) + Y(y)\big), & a = 1. \end{cases} \qquad (0.3.4)$$

Легко видеть, что переобозначение $e^X \to X$, $e^Y \to Y$ приводит решение (0.3.4) при $a = 1$ к виду (0.3.2). Решение вида (0.3.3) называется решением с функциональным разделением переменных.

В завершение этого не очень краткого введения отметим, что если метод разделения переменных для линейных задач математической физики является одним из основных инструментов классической теории, то в применении к нелинейным уравнениям этот метод получил широкое распространение лишь недавно. Тем не менее его перспективность стала уже очевидной – методами обобщённого и функционального разделения переменных получено огромное число точных решений ряда востребованных в приложениях уравнений, причем оказывается, что многие из них не могут быть получены даже таким мощным методом, как групповой анализ.