Обратная матрица

О. Квадратная матрица порядка n называется *единичной*, если она имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

О. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Матрица B называется *обратной* к матрице A, если $AB = BA = I$, где I — единичная матрица порядка n. Обозначение: $B = A^{-1}$.

Т. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ (т.е. матрица A — *невырожденная*).

Обратную матрицу можно вычислить по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A',$$

где A' — *присоединённая матрица:* $A' = \left(A_{ji}\right)_{n\times n}$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A^T.

Задача 1. Вычислить обратную матрицу к $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Сначала вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 1 - 2 = 2.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}. Для того чтобы найти обратную матрицу, сначала запишем A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём присоединённую матрицу. Для этого каждый элемент матрицы A^T заменяем на его алгебраическое дополнение:

$$A' = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A'$:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot A' = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ -1 & 1 & -1\\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Вычислим

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ -1 & 1 & -1\\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ -1 & 1 & -1\\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Поскольку $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, то найденная матрица действительно является обратной к A.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5\\ -1 & 1 & -1\\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5\end{pmatrix}.$

Метод Гаусса нахождения обратной матрицы к невырожденной матрице A состоит в том, что к матрице A надо справа приписать единичную матрицу I того же порядка, а затем с помощью элементарных преобразований строк (ЭПС) преобразовать расширенную матрицу таким образом, чтобы слева стояла единичная матрица. Тогда справа будет стоять A^{-1}. К ЭПС относятся следующие:

1) перестановка двух строк,
2) умножение строки на число $\lambda \neq 0$,
3) прибавление к некоторой строке матрицы другой её строки, умноженной на число λ.

$$(A|I) \xrightarrow{\text{ЭПС}} (I|A^{-1}).$$

Задача 2. Вычислить методом Гаусса обратную матрицу к $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Для того чтобы её первый столбец превратился в первый столбец единичной матрицы, нужно добиться того, чтобы его первый элемент был равен единице, а остальные элементы — нулю. Для этого вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 2, а из третьей строки — просто первую строку:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь превратим второй столбец этой матрицы во второй столбец единичной матрицы. Для этого умножим вторую строку на (-1), а затем вычтем из первой строки вторую строку и к третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь превратим третий столбец этой матрицы в третий столбец единичной матрицы. Для этого сначала вычтем из второй строки третью строку. Затем поделим третью строку на (-2) и вычтем из первой строки третью строку:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}5 & 1 & -0{,}5 \end{array}\right).$$

Теперь слева стоит единичная матрица, а значит, справа — A^{-1}.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1{,}5 & 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матричное уравнение:

$$AX = B, \qquad (1)$$

где A и B — известные матрицы, X — неизвестная матрица. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Тогда $\exists A^{-1}$. В предположении, что уравнение (1) имеет решение, умножим обе части уравнения (1) на A^{-1} *слева*:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Поскольку $A^{-1}A = I$, а $IX = X$, то получим

$X = A^{-1}B$.

Подставив матрицу X в уравнение (1), убедимся, что оно обращается в тождество:

$AA^{-1}B = B$.

Значит, матрица $X = A^{-1}B$ является единственным решением уравнения (1).

Задача 3. Решить матричное уравнение $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$.

Поскольку $\exists A^{-1}$, то

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1,5 & 1 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 2,5 \\ 2 & -4 \\ 1,5 & -4,5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 & 2,5 \\ 2 & -4 \\ 1,5 & -4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -0,5 & 2,5 \\ 2 & -4 \\ 1,5 & -4,5 \end{pmatrix}$.

Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим столбцы матрицы A через A_1, A_2, ..., A_n, а строки — через $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$. Выберем r строк и r столбцов матрицы. Определитель, состоящий из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов, назовём *минором* матрицы A.

Например: $M(A_1, A_2, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $M(A_1, A_3, \tilde{A}_2, \tilde{A}_5) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix}$.

О. Минор порядка r матрицы A называется *базисным*, если он не равен нулю, а любой минор порядка $r + 1$, если таковой имеется, равен нулю. Строки и столбцы, входящие в базисный минор, называются базисными, а порядок базисного минора называется *рангом* матрицы A: $r = \operatorname{rang} A$.

Отметим, что матрица может иметь несколько базисных миноров одинакового порядка.

Для строк и столбцов матрицы вводятся понятия линейной комбинации (ЛК), линейной зависимости (ЛЗ) и линейной независимости (ЛНЗ).

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — столбцы одинакового размера.

О. ЛК столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется выражение вида $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — числа.

О. Столбцы $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются ЛНЗ, если $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = \theta \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Здесь $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ — нулевой столбец.

О. Столбцы $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются ЛЗ, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = \theta$.

Аналогично для строк.

Т. (о базисном миноре). Базисные столбцы (строки) матрицы ЛНЗ. Остальные столбцы (строки) матрицы являются ЛК базисных.

Заметим, что $\det I = 1 \neq 0$, поэтому определитель единичной матрицы является её базисным минором, и столбцы единичной матрицы ЛНЗ.

Таким образом, ранг матрицы можно узнать, найдя её базисный минор.

Метод Гаусса—Жордана нахождения ранга матрицы состоит в том, что матрица приводится к упрощённому виду с помощью ЭПС, не меняющих ранг матрицы:

1) перестановки двух строк,
2) умножения строки на число $\lambda \neq 0$,
3) прибавление к некоторой строке матрицы другой её строки, умноженной на число λ,
4) вычёркивания нулевой строки.

Упрощённый вид матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Здесь некоторые r столбцов матрицы являются первыми r столбцами единичной матрицы (и поэтому они ЛНЗ), а остальные столбцы можно представить в виде их ЛК. В этом случае ранг матрицы равен r, а базисный минор состоит из r столбцов единичной матрицы. Звёздочками обозначены произвольные элементы матрицы.

Задача 4. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & 7 & 17 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, её базисный минор и установить линейные зависимости между столбцами.

Сначала превратим первый столбец матрицы в первый столбец единичной матрицы. Для этого умножим вторую строку на (-1) и поменяем местами первую и вторую строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 13 & 9 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 17 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 13, а из третьей и четвёртой строки — первую строку, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -17 & -51 & -34 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поделим вторую строку на (-17), третью строку — на 3, а четвёртую строку — на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь попробуем превратить второй столбец матрицы во второй столбец единичной матрицы. Для этого вычтем из третьей и четвёртой строки вторую строку, а из первой строки — вторую строку, умноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнем нулевые строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к упрощённому виду. Базисные столбцы: первый и второй. Ранг матрицы равен 2. Третий и четвёртый столбцы являются ЛК базисных:

$$A_3 = -2A_1 + 3A_2, \qquad A_4 = -A_1 + 2A_2.$$

Такие же зависимости будут и между столбцами исходной матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

В исходной матрице базисным минором является любой минор второго порядка, отличный от нуля. Например, минор, построенный на базисных столбцах — первом и втором — и на первой и второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}.$$

Ответ: $\operatorname{rang} A = 2$, базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 9 \end{vmatrix}$, линейные зависимости между столбцами: $A_3 = -2A_1 + 3A_2$, $A_4 = -A_1 + 2A_2$.

ДЗ 30. Задачи для самостоятельного решения из ЛАВЗ: гл. I №17,19; гл. II №34.