ЛЕКЦИЯ 1

1. Некоторые основные понятия и законы логики.

Пусть A и B – два высказывания (предложения). Введем следующие *обозначения.*

Утверждение, противоположное некоторому высказыванию, записывается так: $\neg A$, читается: "не A" ("*отрицание* A").

Символ $\Rightarrow$ означает *логическое следствие.* Отношение $A \Rightarrow B$ означает, что "A влечет за собой B" ("A влечет B").

Отношение $A \equiv B$ означает, что "A эквивалентно B".

$A \vee B$ означает *дизъюнкцию* ("A или B").

$A \wedge B$ означает *конъюнкцию* ("A и B").

Всякая теорема, вообще говоря, может быть записана формулой

$$A \Rightarrow B$$

("Если A ..., то B ..."), где A – *условие*, B – *заключение.* Обратная теорема, которая не всегда справедлива, запишется тогда в виде

$$B \Rightarrow A.$$

Если обе теоремы (данная и обратная к ней) справедливы, то A и B эквивалентны, и такую теорему можно записать в виде

$$A \Leftrightarrow B,$$

что также выражается в форме: "Для того, чтобы A..., необходимо и достаточно ("*н. и д.*"), чтобы B...", или также "Н. и д. условием справедливости A является выполнение B", или, наконец, "A имеет место тогда и только тогда, когда выполнено B".

Справедливы следующие предложения (основные законы логики).

I. $\boxed{\neg\neg A \equiv A}$ (*закон двойного отрицания*).

II. $\boxed{[A \Rightarrow B] \equiv [\neg B \Rightarrow \neg A]}$ (*закон ложного положения*),

читается: "Предложение $A \Rightarrow B$ верно тогда и только тогда, когда верно предложение $\neg B \Rightarrow \neg A$".

Мы будем рассматривать "истинные" и "ложные" высказывания. Истинным высказываниям приписывается значение 1, а ложным – 0.

III. $\boxed{A \wedge \neg A \equiv 0}$ (*закон противоречия*).

IV. $\boxed{A \vee \neg A \equiv 1}$ (*закон исключенного третьего*),

читается: "или A, или не A".

В математических формулировках часто встречаются выражения "для всех ..." и "существует ... такое, что ...". Они обозначаются символами соответственно $\forall$ и $\exists$ и называются *кванторами*:

$$\forall - \text{ "для всех ...",}$$

$$\exists - \text{"существует ... такое, что ...".}$$

Кванторы $\forall$ и $\exists$ обычно сопровождаются некоторыми ограничениями, которые записываются в круглых скобках, например,

$$(\forall x \in \mathbf{R}),$$

или

$$(\exists y \in M,\ \varphi(y) < 1),$$

и т. д.

Пример. Условие непрерывности вещественной функции[1] φ вещественного переменного x в точке a с помощью кванторов записывается так:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) : |\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon, \quad (1)$$

читается: "Для любого положительного ε найдется δ, строго большее нуля, такое, что для всех $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполнено: $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$".

Работая с кванторами, нужно помнить следующее.

1. Порядок следования кванторов имеет важное значение. Перестановка кванторов может существенно изменить заданное свойство и в некоторых случаях привести к ложному утверждению.

Пример. Переставив кванторы в истинном утверждении

$$(\forall x \in (0,1))(\exists y \in (1,+\infty)) : y = \frac{1}{x}$$

("Для всякой правильной дроби x, $0 < x < 1$, найдется обратное к ней число y, строго большее единицы"), придем к ложному выводу:

$$(\exists y \in (1,+\infty))(\forall x \in (0,1)) : y = \frac{1}{x}.$$

("Существует число y, обратное любой правильной дроби x").

2. Если квантору $\exists$ предшествует некоторое число других кванторов, то следующая за ним буква может оказаться функцией всех букв, фигурирующих в предыдущих кванторах.

Пример 1. В формуле (1) δ зависит от $\varepsilon : \delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 2. Пусть функция f непрерывна в каждой точке числовой оси. Это означает следующее:

$$(\forall a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(a,\varepsilon) > 0)(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

[1] См. лекцию 2.

Здесь δ зависит от чисел a и ε, входящих в кванторы, предшествующие квантору $\exists$. Может оказаться, что можно выбирать δ в зависимости только от ε, но не от a. Тогда можно записать

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что функция равномерно непрерывна. Это свойство значительно сильнее свойства функции быть непрерывной. Передвинув квантор $\exists$ влево, мы получили усиление свойства. Вообще, *чем раньше стоит квантор* $\exists$*, тем свойство сильнее* (если, конечно, перестановка кванторов не искажает свойства и не приводит к бессмыслице). Произведем, например, в последней формуле еще одну перестановку кванторов:

$$(\exists \delta > 0)(\forall a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall x, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Это предложение означает, что функция f постоянна (предлагаю слушателям доказать это в качестве упражнения). Мы получили еще большее, если не сказать крайнее, усиление свойства непрерывности.

Теорема 1 *Отрицание* $\neg A$ *свойства* A*, содержащего свойство* P *и некоторое число* n *кванторов* $\forall$ *и* $\exists$*, получается заменой каждого квантора "для всех..." на квантор "существует... такое, что...", каждого квантора "существует... такое, что..." на квантор "для всех..." и свойства* P *на его отрицание* $\neg P$:

$$\begin{cases} \forall \to \exists, \\ \exists \to \forall, \\ P \to \neg P. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что $n = 1$ и имеется утверждение A:

$$(\forall x, \text{удовлетворяющий } S) : P.$$

Выполнив замену символов по схеме (2), получим утверждение, противоположное A:

$$(\exists x, \text{удовлетворяющий } S) : \neg P,$$

т. е. $\neg A$. Наоборот, заменив в последнем предложении символы по схеме (2), получим его отрицание:

$$(\forall x, \text{удовлетворяющий } S) : \neg(\neg P) \equiv P,$$

т. е. $\neg(\neg A) \equiv A$, что доказывает теорему при $n = 1$. На случай любого числа n кванторов теорема распространяется по индукции.

Пример 1. Пусть функция f непрерывна в каждой точке числовой оси, т. е.

$$(\forall a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Свойство функции быть разрывной получается отрицанием свойства непрерывности:

$$(\exists a \in \mathbf{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbf{R}, |x - a| < \delta) :$$
$$|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Пример 2. Пусть функция f, определенная в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}$, имеет своим пределом в точке x_0 число b. Это означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тогда утверждение "Число b не является пределом функции f в точке x_0" равносильно следующему:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, 0 < |x - x_0| < \delta) : |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

2. Операции над множествами.

Перечислю стандартные обозначения и термины, которыми мы будем пользоваться.

Пусть $A, B, \ldots, E, F, G, \ldots, X, Y, Z$ – множества. Выражение

$$x \in E$$

означает: "x есть *элемент* (или *точка*) множества E", или также "x принадлежит E", а выражение

$$x \notin E$$

– "x не принадлежит E". Равенство

$$x = y$$

означает: "x равно y", т. е. x совпадает с y или равно y по определению, а выражение

$$x \neq y$$

– "x не равно y", т. е. x отлично от y.

Отношения *включения*:

$$A \subset B$$

– "A содержится в B" или

$$B \supset A$$

– "B содержит A", означают, что "A есть *подмножество* или, что то же, *часть* множества B", т. е.

$$(\forall x): \ (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут

$$A = B$$

и говорят: "A равно B". Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Выражение

$$A \not\subset B$$

означает, что "A не является частью B".

Символ

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

обозначает часть A, состоящую из всех тех элементов $x \in A$, для которых истинно свойство $P(x)$, а символ

$$\emptyset = \{x \in A \mid x \neq x\}$$

– *пустое подмножество*, или *пустое множество.* Любые два пустые подмножества равны, поэтому пишем просто $\emptyset$, а не $\emptyset_A$.

$$\mathcal{P}(A)$$

есть множество всех частей множества A. Если A – конечное множество, состоящее из n элементов, то $\mathcal{P}(A)$ содержит всего

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

элементов.

Множество, состоящее из одного элемента x, обозначается символом

$$\{x\},$$

множество, состоящее из двух элементов x и y, – символом

$$\{x, y\}$$

и т. д.

Если $A \subset B$, то множество тех элементов из B, которые не принадлежат A:

$$\{x \in B \mid x \ \notin A\},$$

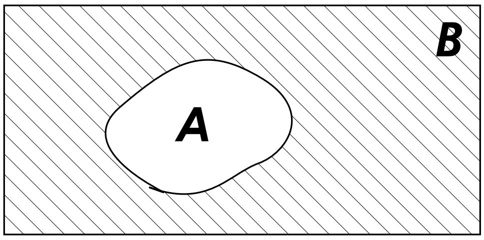

Рис. 1.

являющееся подмножеством множества B, называется *разностью между B и A*, или *дополнением* (*к*) *A в B* и обозначается одним из указанных ниже символов:

$$CA \quad \equiv \quad C_B A \quad \equiv \quad B \backslash A \quad \equiv \quad B - A$$

(см. рис. 1, где заштриховано дополнение к A в B).

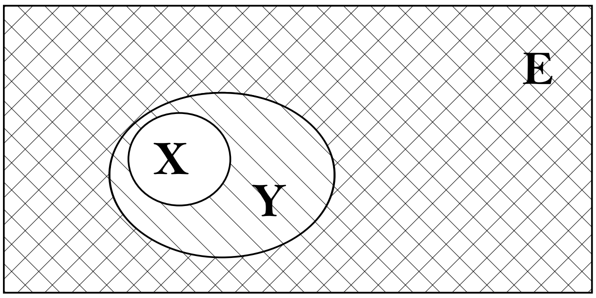

Рис. 2.

Пусть A, B, X, Y – части множества E. Тогда

$$CCY = Y,$$

$$E \backslash E = \emptyset, \quad E \backslash \emptyset = E,$$

$$(X \subset Y) \Rightarrow (CX \supset CY),$$

в последней формуле предполагается, что $CX = C_E X,\ CY = C_E Y$ (на рис. 2 дополнение к X в E заштриховано с наклоном влево, а дополнение к Y в E – с наклоном вправо).

$$A \cup B = B \cup A$$

есть *объединение множеств A и B* (заштрихованная часть на рис. 3). Оно состоит из элементов, принадлежащих, по край-

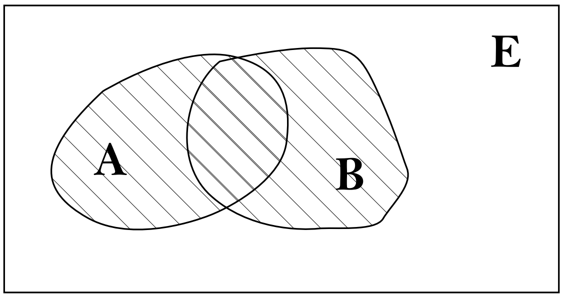

Рис. 3.

ней мере, одному из двух множеств A и B.

$$A \cap B = B \cap A$$

есть *пересечение множеств A и B* (заштрихованная часть на рис. 4). Это множество элементов, принадлежащих и A, и B:

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}.$$

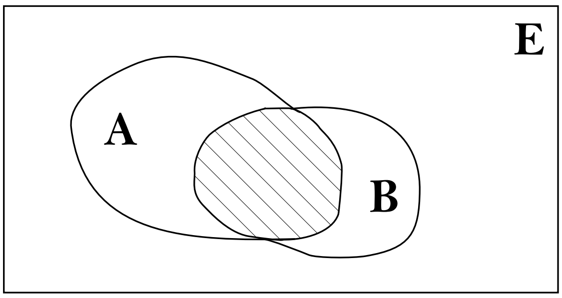

Рис. 4.

Пересечение дистрибутивно относительно объединения (рис. 5):

$$A \cap (X \cup Y) = (A \cap X) \cup (A \cap Y).$$

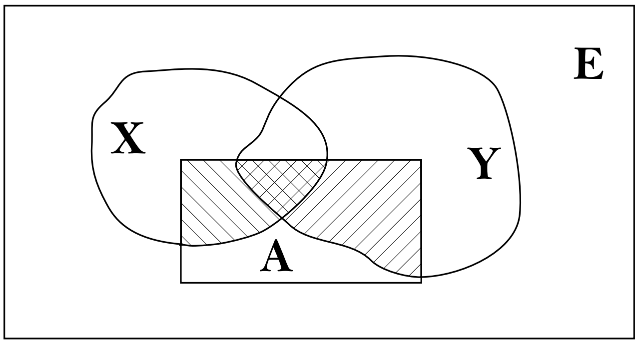

Рис. 5.

Объединение дистрибутивно относительно пересечения (рис. 6):

$$A \cup (X \cap Y) = (A \cup X) \cap (A \cup Y).$$

Кроме того, справедливы равенства:

$$C(X \cup Y) = (CX) \cap (CY),$$

$$C(X \cap Y) = (CX) \cup (CY)$$

(см. рис. 7, где дополнение к X в E заштриховано с наклоном влево, а дополнение к Y в E – с наклоном вправо).

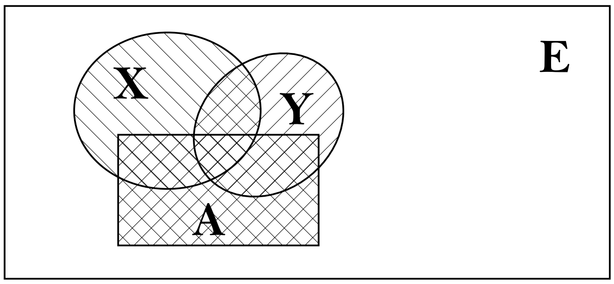

Рис. 6.

Таким образом, *преобразование* $X \to CX$ *переводит символ "содержится" в "содержит", символ "содержит" в "содержится", "объединение" в "пересечение" и "пересечение"*

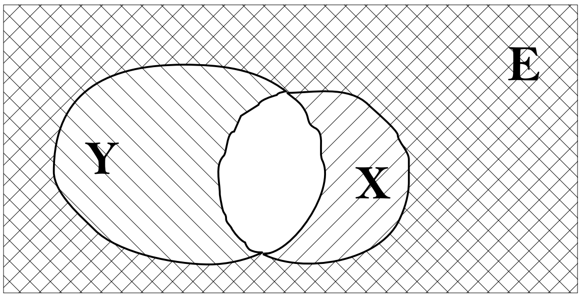

Рис. 7.

в "объединение", т. е., как говорят, "*обращает*" эти символы:

$$\boxed{\begin{array}{c} \subset\to\supset \\ \supset\to\subset \\ \cup\to\cap \\ \cap\to\cup \end{array}}$$

Совокупность всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$, $y \in B$, называется *произведением множеств* A и B и обозначается символом

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

По определению произведение $E \times F \times G$ трех множеств E, F и G есть $(E \times F) \times G = E \times (F \times G)$:

$$E \times F \times G = (E \times F) \times G = E \times (F \times G),$$

а произведение n множеств определяется по индукции:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n,$$

элемент z произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ обозначается так:

$$z = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

x_i называется i-й проекцией элемента z:

$$x_i = pr_i(z) \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Если $X_1 = X_2 = \dots = X_n$, то вместо $\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}$ пишут X^n.

Примеры.

$\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел $1, 2, \dots,$

$\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел, как положительных, так и отрицательных, включая число 0,

$\mathbf{Q}$ – множество всех рациональных чисел,

$\mathbf{R}$ – множество всех вещественных чисел,

$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}}_{n \text{ раз}}$ есть n-мерное арифметическое пространство, точка $x \in \mathbf{R}^n$ есть упорядоченный набор n вещественных чисел $x_1, \dots, x_n:\ x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$$

– открытый промежуток (интервал),

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$$

– полуоткрытый промежуток,

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$$

– полуоткрытый промежуток,

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

– замкнутый промежуток (отрезок).