ЛЕКЦИЯ 2

1. Функции, или отображения.

Определение 1. Пусть E и F – два множества. *Отображением (из) E в F* или *функцией, определенной на E со значениями в F*, называется соответствие f, которое каждому элементу x из E относит некоторый элемент y из F, обозначаемый через $f(x)$:

$$y = f(x).$$

Элемент x из E называется *переменным*, а элемент y, или $f(x)$, из F называется *значением функции f в точке x* или *образом элемента x при отображении f*.

Множество E *называют областью определения функции f*. Мы будем говорить также, что *функция f определена на E*.

Множество $\{y = f(x) \mid x \in E\}$ всех значений функции f называется ее *областью значений*.

Если задано отображение f множества E в F, то это записывается в виде

$$x \to f(x),$$

или

$$E \xrightarrow{f} F.$$

Заметим, что символы x, f и $f(x)$ означают элементы трех различных множеств: $x \in E$, $f(x) \in F$, а f принадлежит множеству всех отображений из E в F, которое мы будем обозначать через F^E, так что $f \in F^E$:

$$\boxed{F^E \text{ – множество всех отображений из } E \text{ в } F.}$$

Два отображения f и g из E в F называются *равными*, если $f(x) = g(x)$ для любого $x \in E$.

Примеры.

1°. *Тождественное отображение.* Так называется отображение id_E множества E в E, определенное равенством

$$\mathrm{id}_E(x) = x,$$

$$\boxed{\mathrm{id}_E \text{ – тождественное отображение множества } E.}$$

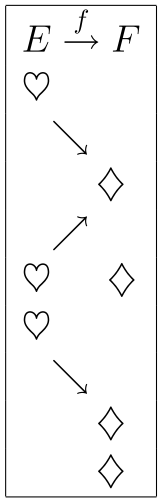
2°. *Постоянное отображение.* Если для любого $x \in E$ значение функции f, определенной на E со значениями в F, есть один и тот же элемент $b \in F$, то f называется *постоянной функцией* или *постоянным отображением.*

3°. *Вещественной функцией вещественного переменного* называется отображение множества $E \subset \mathbf{R}$ в множество $F \subset \mathbf{R}$.

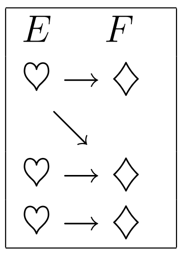
Определение 2. Пусть f – отображение множества E в F и $A \subset E$. Отображение, которое каждому элементу $x \in A$, рассматриваемому как элемент из E, ставит в соответствие $f(x) \in F$, называется *сужением* или *ограничением* функции f на A и обозначается символом f_A:

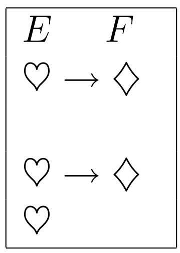
$$\boxed{f_A \text{ – сужение } f \text{ на } A \ \equiv \ \text{ограничение } f \text{ на } A.}$$

Отображение[2]:



Не отображения:





2. Инъекции, сюръекции, биекции.

Определение 3. Отображение f множества E в F называется *инъективным отображением* или *инъекцией*, если для любых $x, x' \in E$ имеет место соотношение:

$$(\forall x, x' \in E) : (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')) \,,$$

[2] В этих и следующих таблицах в левом столбце стоят элементы множества, указанного в верхней строке слева, а в правом – элементы множества, указанного в верхней строке справа, стрелка $\to$ связывает элемент и его образ.

или, что равносильно,

$$(f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

Иными словами, отображение f является инъекцией, если два различных элемента из E имеют образами при отображении f два различных элемента из F.

Инъекции:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & G \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ & & \clubsuit \end{array}}$$

Не инъекция:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \diamondsuit \\ \heartsuit & \to & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \end{array}}$$

Определение 4. Отображение f множества E в F называют *сюръективным отображением* или *сюръекцией*, если каждый элемент из F является образом при отображении f, по крайней мере, одного элемента из E, т. е. если

$$(\forall y \in F)(\exists x \in E) : y = f(x).$$

Сюръекции:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{g} & G \\ \heartsuit & \rightarrow & \clubsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \clubsuit \\ & & \\ \heartsuit & \rightarrow & \clubsuit \\ \hline\end{array}$$

Не сюръекция:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \diamondsuit \\ & & \diamondsuit \\ \hline\end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение f множества E в F называется *взаимно однозначным* или *биективным отображением*, или также *биекцией*, если каждый элемент из F является образом при отображении f единственного элемента из E.

Отображение биективно тогда и только тогда, когда оно одновременно инъективно и сюръективно.

Биекция (конечного) множества на себя называется *перестановкой*.

Биекция:

$$\begin{array}{|ccc|}\hline E & \xrightarrow{f} & F \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \heartsuit & \rightarrow & \diamondsuit \\ \hline\end{array}$$

Отображение, которое не является ни биекцией, ни сюръекцией, ни инъекцией[3]:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & G \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ \heartsuit & \to & \clubsuit \\ & \nearrow & \\ \heartsuit & & \clubsuit \\ & & \clubsuit \end{array}}$$

Пусть f – биекция и y – произвольный элемент из F. Тогда существует единственный элемент x такой, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет биекцию множества F в E, которую называют *обратной биекцией* или *обратной функцией* (*обратным отображением*) к f и обозначают f^{-1}.

3. Образ и прообраз подмножества.

Определение 6. Пусть f – отображение множества E в F и A – часть E. Часть F, состоящая из всех элементов $f(x)$, где $x \in A$, называется *образом части A при отображении f* и обозначается символом $f(A)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A : \ y = f(x)\} \\ \text{– образ части } A \subset E \text{ при отображении } f : E \to F. \end{array}}$$

Определение 7. Если B – часть множества F, то часть множества E, состоящая из всех элементов x таких, что $f(x) \in B$, называется *прообразом части B при отображении f* и обозначается через $f^{-1}(B)$:

$$\boxed{\begin{array}{c} f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \\ \text{– прообраз части } B \subset F \text{ при отображении } f : E \to F. \end{array}}$$

[3]Пример показывает существование таких отображений.

Очевидно, что

$$f(\varnothing) = \varnothing, \quad f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$

Замечание. Прообраз непустой части B может оказаться пустым множеством, если отображение f не сюръективно (рис. 8).

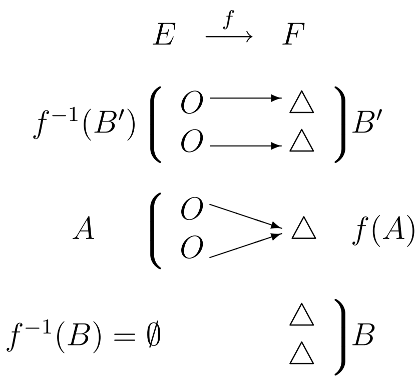


Рис. 8.

Определения 6 и 7 задают два отображения – отображение

$$A \to f(A)$$

множества $\mathcal{P}(E)$ всех частей множества E в множество $\mathcal{P}(F)$ всех частей множества F ("*образ*") и отображение

$$B \to f^{-1}(B)$$

множества $\mathcal{P}(F)$ всех частей множества F в множество $\mathcal{P}(E)$ всех частей множества E ("*прообраз*"). Эти отображения обладают следующими свойствами.

Прообраз f^{-1} сохраняет 5 символов: $\subset, \supset, \cap, \cup$ и C, т. е.

$$(B \subset B') \Rightarrow \left(f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')\right),$$

$$(B' \supset B) \Rightarrow \left(f^{-1}(B') \supset f^{-1}(B)\right),$$

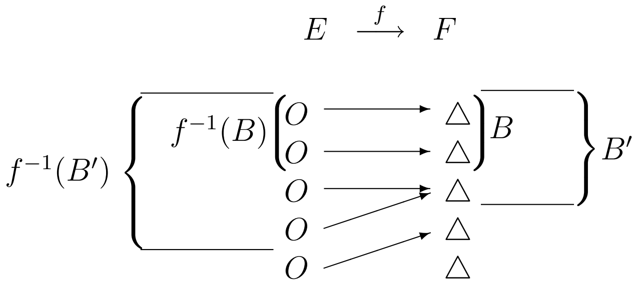


Рис. 9.

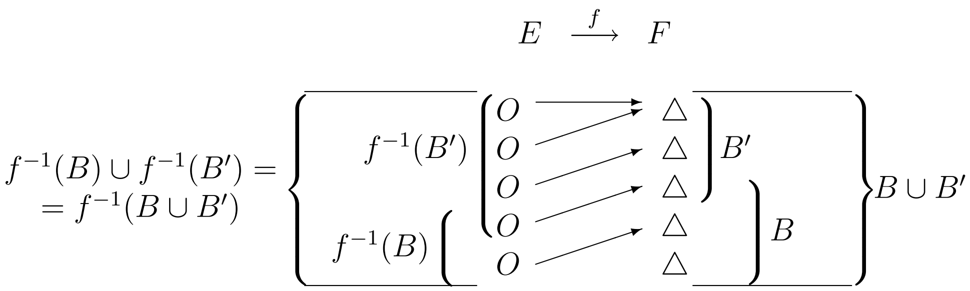


Рис. 10.

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'),$$
$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'),$$
$$f^{-1}(CB) = Cf^{-1}(B)$$

(рис. 9–12).

Образ f обладает менее простыми свойствами, сохраняя лишь операции включения и объединения (см. рис. 13–14):

$$(A \subset A') \Rightarrow (f(A) \subset f(A'))\,,$$
$$(A' \supset A) \Rightarrow (f(A') \supset f(A))\,,$$
$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'),$$
$$f(A \cap A') \subset (f(A) \cap f(A'))\,. \tag{3}$$

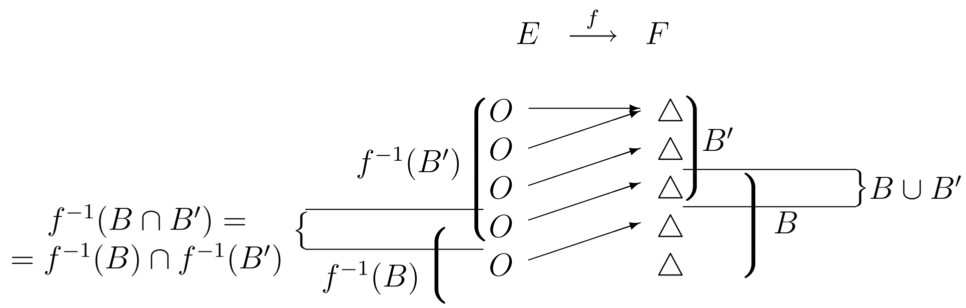


Рис. 11.

$$\begin{array}{ccc} & E \xrightarrow{f} F & \\ f^{-1}(B') & \left(\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \triangle \\ O & \longrightarrow & \triangle \\ O & \longrightarrow & \triangle \end{array}\right) & B \\ Cf^{-1}(B) = f^{-1}(CB) & \left(\begin{array}{ccc} O & \longrightarrow & \triangle \\ O & \longrightarrow & \triangle \\ & & \triangle \end{array}\right) & CB \end{array}$$

Рис. 12.

Покажем, что в общем случае $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$. Предположим, что в последней формуле стоит знак равенства, и рассмотрим случай

$$A \cap A' = \varnothing, \quad f(E) = \{b\}, \quad f(A) = f(A') = \{b\}$$

(см. рис. 15). Тогда, с одной стороны, $f(A) \cap f(A') = \{b\}$. С другой стороны, из равенства $A \cap A' = \varnothing$ следует $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$. Так как, по предположению, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$, то $\varnothing = \{b\}$. Полученное противоречие показывает, что в общем случае в формуле (3) имеет место лишь включение.

Легко убедиться в том, что если f – биекция, то образ при отображении f сохраняет все пять символов:

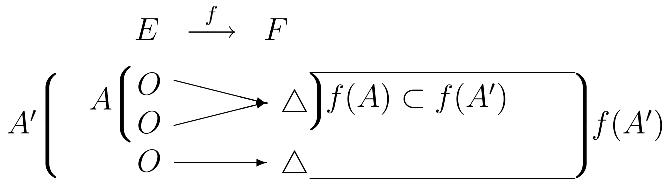


Рис. 13.

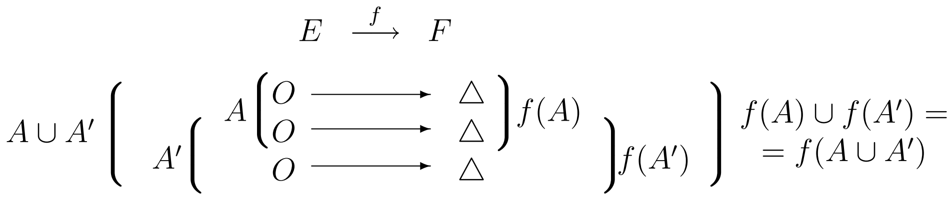


Рис. 14.

$$\boxed{f\text{ – биекция}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (A \subset A') \Rightarrow (f(A) \subset f(A'))\,, \\ (A' \supset A) \Rightarrow (f(A') \supset f(A))\,, \\ f(A \cup A') = f(A) \cup f(A'), \\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'), \\ f(CA) = Cf(A). \end{array}}$$

Если f – отображение множества E в F, то $f(E)$ – область значений функции f, а условие сюръективности отображения f с помощью образа записывается так: $f(E) = F$,

$$\boxed{f\text{ – сюръекция}} \Leftrightarrow \boxed{f(E) = F.}$$

4. Композиция отображений.

Пусть $E,\ F$ и G – три множества, $f:\ E \to F$ – отображение множества E в F и $g:\ F \to G$ – отображение множества F в G (рис. 16).

Каждому $x \in E$ отображение f ставит в соответствие элемент $f(x)$ из F. Отображение g переводит $f(x)$ в $g(f(x)) \in G$.

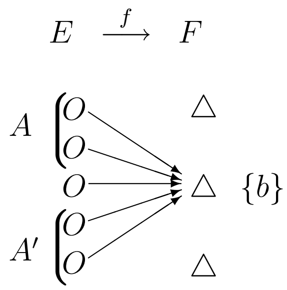


Рис. 15.

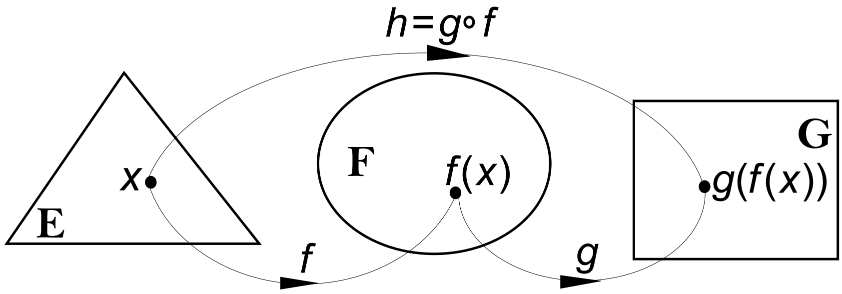


Рис. 16.

Тем самым определено отображение h множества E в множество G:

$$x \to h(x) = g(f(x)).$$

Это отображение называется *композицией отображения f на отображение g* (коротко – *композиция f на g*) и обозначается $g \circ f$ (*символ читается справа налево!*):

$$\boxed{h = g \circ f :\ x \to g(f(x)) - \text{ композиция } f \text{ на } g.}$$

Композиция отображений ассоциативна:

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3),$$

поэтому пишут просто $f_1 \circ f_2 \circ f_3$.

Если f и g – биекции, то их композиция $g \circ f$ также является биекцией. Кроме того, справедливы равенства (см. рис. 17):

$$\boxed{f \text{ и } g \text{ – биекции}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}, \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E, \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F. \end{array}}$$

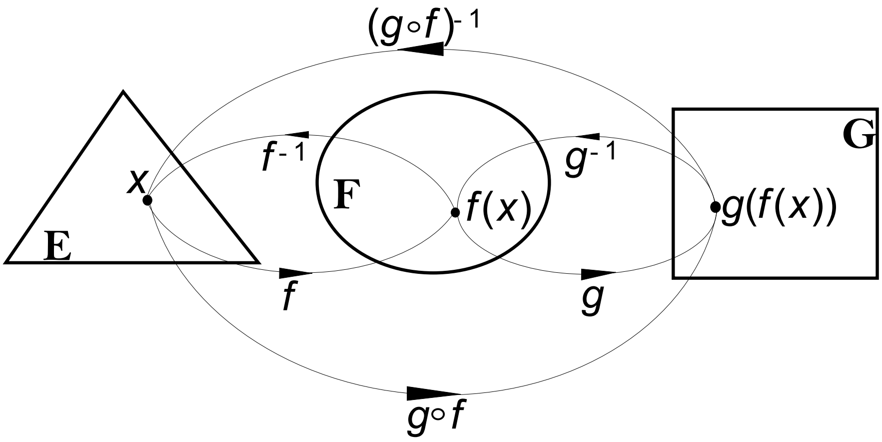


Рис. 17.