ЛЕКЦИЯ 3

1. Семейства. Последовательности.

Пусть заданы множество E и множество I, которое мы будем называть *множеством индексов*. Пусть также задано отображение множества индексов I в E: $i \to x_i$.

Определение 8. Множество, состоящее из x_i, где $i \in I$, обозначается

$$(x_i)_{i \in I} \text{ или } (x_i)$$

и называется *семейством элементов из E, снабженных индексами из I*.

Семейство (x_i) можно рассматривать как отображение множества I в E.

Определение 9. *Последовательностью (x_n) элементов из E* называется отображение множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел в множество E.

Последовательность записывают также в виде

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

x_n называют *n-м членом* (или *n-м элементом*) последовательности, или *членом* (*элементом*) *с номером n*.

Пусть (x_n) – некоторая последовательность элементов из E и (n_k) – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т. е. строго возрастающее отображение[4] множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$: $k \to n_k,\ n_k < n_{k+1}$.

Последовательность $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$, определенная равенством $y_k = x_{n_k},\ k = 1, 2, \dots$, называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n).

Примеры.

1°. *Вещественная числовая последовательность* – это отображение множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел в множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел.

[4]См. лекцию 4, п. 3.

2°. Последовательности

$$(1, 1, \ldots, 1, \ldots) \ \text{ и } \ (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

являются подпоследовательностями числовой последовательности

$$(1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots).$$

2. Покрытие. Разбиение.

Рассмотрим множество E и семейство $(A_i)_{i\in I}$ его подмножеств A_i.

Множество всех элементов $x \in E$, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A_i, называется *объединением семейства* (A_i) и обозначается символом

$$\bigcup_{i\in I} A_i.$$

Пересечением семейства A_i:

$$\bigcap_{i\in I} A_i,$$

называется множество тех элементов $x \in E$, которые принадлежат одновременно всем A_i.

Если $I = \mathbf{N}$, то пишут

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ – семейство частей множества E и $X \subset E$. Говорят, что семейство (A_i) *покрывает множество* X или является его *покрытием*, если

$$X \subset \bigcup_{i\in I} A_i,$$

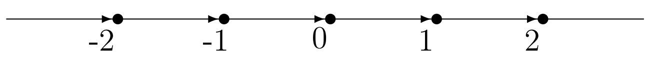

Рис. 18.

т. е. если множество X содержится в объединении семейства (A_i).

Пример. Семейство $(A_z)_{z \in \mathbf{Z}}$ интервалов $A_z = (z, z+2)$ покрывает числовую ось.

Определение 11. Семейство $(A_i)_{i \in I}$ подмножеств множества E называется *разбиением множества* $X \subset E$, если выполнены следующие условия:

1) семейство (A_i) покрывает X,

2) $(\forall i \in I) : A_i \neq \emptyset$ (множества A_i не пусты),

3) $[i \neq j] \Rightarrow [A_i \bigcap A_j = \emptyset]$ (множества A_i попарно не пересекаются).

Пример. Семейство $(A_z)_{z \in \mathbf{Z}}$, где $A_z = [z, z+1)$, образует разбиение числовой оси (рис. 18).

3. Отношение эквивалентности.

Бинарным отношением $\mathcal{R}$ на множестве E называется подмножество произведения $E \times E$, т. е. некоторое множество $\mathcal{R}$ пар (x, y) элементов x, y из E :

$$\boxed{\mathcal{R} \subset E \times E.}$$

Примеры бинарных отношений на числовой оси – множества пар $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ чисел $x, y \in \mathbf{R}$ таких, что $x = y$ или $x \leq y$, или $x^2 + y^2 = 1$, и т. д.

Определение 12. Бинарное отношение $\mathcal{R}$, определенное на множестве E, называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами:

1) *рефлексивность*: $(x, x) \in \mathcal{R}$ при любом $x \in E$,

2) *симметричность*: если $(x, y) \in \mathcal{R}$, то и $(y, x) \in \mathcal{R}$,

3) *транзитивность*: если $(x, y) \in \mathcal{R}$ и $(y, z) \in \mathcal{R}$, то $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Если $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что x *эквивалентно* y и пишут

$$\boxed{x \sim y}, \text{ или } \boxed{x \equiv y}, \text{ или } \boxed{x \equiv y \mod \mathbf{R}}$$

(x *равно* y или x *конгруентно* y *по модулю* $\mathcal{R}$).

Примеры.

1°. E – множество прямых на плоскости. Две прямые считаются эквивалентными, если они параллельны или совпадают.

2°. Всякое разбиение $(A_i)_{i \in I}$ множества E задает отношение эквивалентности:

$$x \sim y, \text{ если } (\exists i \in I) : x, y \in A_i$$

(см. рис. 19).

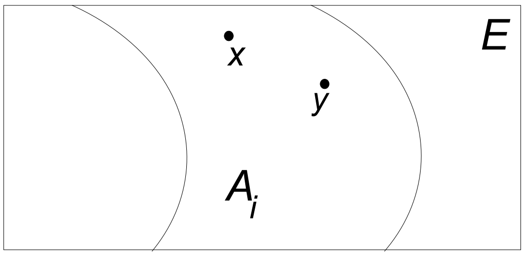

Рис. 19.

3°. E – подмножество множества $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, состоящее из всех пар (p, q) с $q \neq 0$. Отношение эквивалентности определяется формулой:

$$(p, q) \sim (p', q'), \text{ если } pq' - p'q = 0.$$

4°. Пусть E – множество всех векторов $\overrightarrow{AB}$ на плоскости. Отношение: $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, если векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ параллельны, одинаковы направлены и имеют одинаковую длину, является отношением эквивалентности в E.

5°. В множестве E всех векторов $\overrightarrow{AB}$ на плоскости определим еще одно отношение эквивалентности, положив $\overrightarrow{A'B'} \sim \overrightarrow{AB}$, если векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ лежат на одной прямой, одинаковы направлены и имеют одинаковую длину.

Определение 13. *Классом эквивалентности $\dot{x}$ в E по отношению эквивалентности $\mathcal{R}$* называется часть множества E, образованная из всех элементов этого множества, эквивалентных некоторому заданному элементу x:

$$\boxed{\dot{x} = \{y \in E \mid y \sim x\}.}$$

Предложение 1. Любые два элемента y и z, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности $\dot{x}$ в E по отношению $\mathcal{R}$, эквивалентны между собой, т. е. если $y \in \dot{x}$ и $z \in \dot{x}$, то $y \sim z$.

Доказательство. $y \in \dot{x}$ означает, что $y \sim x$. Из соотношения $z \in \dot{x}$ следует, что $z \sim x$, отсюда в силу симметричности отношения эквивалентности получим $x \sim z$. Но тогда по свойству транзитивности имеем:

$$\boxed{(y \sim x) \wedge (x \sim z)} \Rightarrow \boxed{y \sim z,}$$

ч. т. д.

Предложение 2. Любые два класса эквивалентности в E по отношению $\mathcal{R}$ либо совпадают, либо не пересекаются:

$$\boxed{\dot{x} = \dot{y}} \vee \boxed{\dot{x} \cap \dot{y} = \varnothing.}$$

Доказательство: Пусть один и тот же элемент z принадлежит двум классам эквивалентности $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Это означает, что $z \sim x$ и $z \sim y$. По свойствам транзитивности и симметричности для любого элемента $t \in \dot{x}$ имеем

$$((t \sim x) \wedge (x \sim z) \wedge (z \sim y)) \Rightarrow (t \sim y),$$

следовательно, $t \in \dot{y}$, т. е. $\dot{x} \subset \dot{y}$. Так же доказывается, что $\dot{y} \subset \dot{x}$, поэтому $\dot{x} = \dot{y}$, ч. т. д.

Из предложений 1 и 2 вытекает, что отношение эквивалентности, введенное на множестве E, определяет разбиение E на непустые[5], попарно непересекающиеся части, объединение которых совпадает с E (рис. 20).

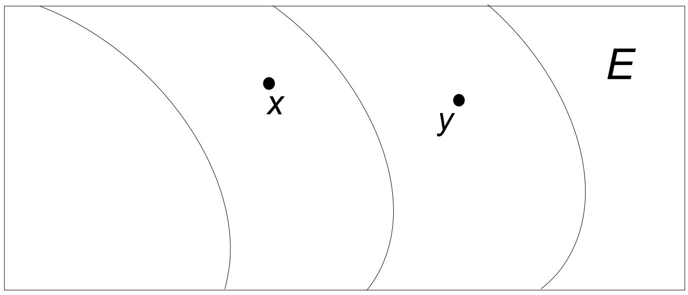

Рис. 20.

Определение 14. Множество всех классов эквивалентности множества E по отношению эквивалентности $\mathcal{R}$ называется *фактором* или *фактормножеством множества E по отношению* $\mathcal{R}$ и обозначается символом $E/\mathcal{R}$:

$$\boxed{E/\mathcal{R} \text{ – фактор множества } E \text{ по отношению } \mathcal{R}.}$$

В приведенном выше примере 1° фактор есть множество всех направлений на плоскости.

В примере 3° фактор совпадает с множеством всех рациональных чисел.

В примере 4° фактором является множество свободных векторов на плоскости. По определению свободный вектор есть класс всех эквивалентных между собой векторов.

В примере 5° фактор есть множество всех "скользящих векторов", используемых в механике. Каждый скользящий вектор является классом эквивалентности по отношению эквивалентности, введенному в этом примере.

[5] В силу свойства рефлексивности $x \in \dot{x}$ для любого элемента $x \in E$.