ЛЕКЦИЯ 4

1. Отношение порядка.

Определение 15. Бинарное отношение $\mathcal{R}$, определенное на множестве E, называется *отношением порядка* и обозначается символом $\leq$ или $\leq_R$, если оно

1) *рефлексивно:* $x \leq x$ при любом x из E,

2) *транзитивно:* если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$:

$$\boxed{(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z),}$$

3) *антисимметрично:* если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$:

$$\boxed{(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y).}$$

Терминология и обозначения.

$x \leq y$ читается: "x меньше y".

Отношение $y \geq x$ ("y больше x") по определению эквивалентно отношению $x \leq y$:

$$\boxed{(y \geq x) \equiv (x \leq y).}$$

Отношение $x < y$ ("x строго меньше y") означает, что $x \leq y$ и $x \neq y$:

$$\boxed{x < y} \equiv \boxed{(x \leq y) \wedge (x \neq y).}$$

Отношение $y > x$ ("y строго больше x") означает, что x строго меньше y :

$$\boxed{(y > x) \equiv (x < y).}$$

Определение 16. Множество E, на котором задано отношение порядка, называется *упорядоченным множеством.*

Отношение порядка на множестве E называется *полным*, а E – *вполне упорядоченным* или *линейно упорядоченным множеством*, если для любых двух элементов x, y из E выполняется одно из следующих трех условий: $x < y$, $x = y$ и $x > y$:

$$\boxed{(\forall x, y \in E) : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y).}$$

Если множество E не вполне упорядоченное, то существуют x и y из E, не связанные никакими из трех указанных соотношений. О них говорят, что они *несравнимы*.

Примеры.

1°. Отношение $x \leq y$ в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, в множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, в множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел и в множестве $\mathbf{R}$ вещественных чисел является полным отношением порядка, а множества $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ – вполне упорядоченными множествами.

2°. Отношение включения $A \subset B$ есть отношение порядка на множестве $\mathcal{P}(E)$ подмножеств множества E. В общем случае это отношение порядка не является полным, ибо любые два непустых непересекающихся подмножеств множества E несравнимы.

3°. В произвольном множестве E отношение "$x \leq y$, если $x = y$" является отношением порядка. Такой порядок называется *хаотическим*.

2. Максимум и минимум. Точная верхняя и точная нижняя грани.

Определение 17. Пусть E – упорядоченное множество. Если существует такой элемент $a \in E$, что $x \leq a$ (соответственно $a \leq x$) для всех $x \in E$, то a называется *максимумом* (соответственно *минимумом*). Максимум и минимум обозначаются символами соответственно $\max E$ и $\min E$:

$$\boxed{\max E = \max_{x \in E} x \text{ – максимум множества } E,}$$

$$\boxed{\min E = \min_{x \in E} x \text{ – минимум множества } E.}$$

Предложение 3. Если E имеет максимум (соответственно минимум), то этот максимум (соответственно минимум) единствен.

Доказательство. Если a и b – два максимума множества E, то $a \leq b$ и $b \leq a$. В силу антисимметричности отношения прядка $\leq$ отсюда следует, что $a = b$. Случай минимума исчерпывается аналогично.

Примеры.

1°. $\mathcal{P}(X)$ – множество всех частей множества X, упорядоченное отношением включения $\subset$. Для любого $A \in \mathcal{P}(X)$ имеем: $\emptyset \subset A \subset X$, поэтому

$$\min \mathcal{P}(X) = \emptyset, \quad \max \mathcal{P}(X) = X.$$

2°. Множество $E = (0, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ с обычным отношением $\leq$ имеет максимум $\max E = 2$, но не имеет минимума.

3°. Множества $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ с обычным отношением $\leq$ не имеют ни максимумов, ни минимумов. Множество $\mathbf{N}$ имеет минимум $\mathbf{N} = 1$, но не имеет максимума.

Определение 18. Пусть E – упорядоченное множество и $A \subset E$ – его подмножество. *Верхней гранью* (*верхней границей*) или *мажорантой* (соответственно *нижней гранью* (*нижней границей*) или *минорантой*) множества A называется любой элемент $a \in E$, для которого $x \leq a$ (соответственно $a \leq x$) при всех $x \in A$. Если такой элемент a существует, то часть A называют *ограниченной сверху* или *мажорируемой* (соответственно *ограниченной снизу* или *минорируемой*) и говорят, что *a ограничивает сверху* или *мажорирует* (соответственно *a ограничивает снизу* или *минорирует*) часть A.

Если подмножество одновременно мажорируемо и минорируемо, т. е. имеет верхнюю и нижнюю грани, то оно называется *ограниченным.*

Определение 19. Пусть A – часть множества E. Говорят, что часть A *имеет точную верхнюю грань*, если множество её верхних граней (мажорант) имеет минимум. Этот минимум называется *точной верхней гранью*, или *супремумом* множества A и обозначается $\sup_E A$ или $\sup A$:

$$\boxed{\sup_E A \text{ – точная верхняя грань множества } A \subset E.}$$

Если множество минорант части $A \subset E$ имеет максимум, то этот максимум называют *точной нижней гранью*, или *инфимумом* множества A и обозначают $\inf_E A$ или $\inf A$:

$$\boxed{\inf_E A \text{ – точная нижняя грань множества } A \subset E.}$$

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

1. Если точная верхняя грань части A принадлежит A, то она является максимумом, и наоборот:

$$\boxed{b = \sup A \in A} \Longleftrightarrow \boxed{b = \max A.}$$

Аналогично:

$$\boxed{a = \inf A \in A} \Longleftrightarrow \boxed{a = \min A.}$$

2. Если $A \neq \emptyset$, то $\inf A \leq \sup A$.

3. Если $A \subset B$ и существуют $\sup A$ и $\sup B$, то $\sup A \leq \sup B$.

4. Если существуют $\inf A$ и $\inf B$, то $\inf B \leq \inf A$.

Примеры.

1°. Пусть A – ограниченное подмножество $(0, 2]$ множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Любое число $b \geq 2$ – его верхняя граница (мажоранта) , любое число $a \leq 0$ – его нижняя граница (миноранта), $\sup A = \max A = 2,\ \inf A = 0$.

2°. Если $A = \{1, 10\}$ – множество, состоящее из двух элементов: 1 и 10, то $\sup\{1, 10\} = \max\{1, 10\} = 10$. Аналогично: $\inf\{0, 2, 1/2\} = \min\{0, 2, 1/2\} = 0$.

3°. В множестве $\mathcal{P}(E)$ всех частей множества E при отношении порядка $A \subset B$ каждое подмножество F имеет супремум и инфимум. В самом деле, пусть например, $F = \{A, B, C\}$. Тогда $\sup F = A \cup B \cup C$, $\inf F = A \cap B \cap C$.

3. Монотонные функции.

Пусть E и F – два упорядоченных множества. Отображение f множества E в F называется *возрастающим* отображением, если

$$\boxed{x \leq y} \Rightarrow \boxed{f(x) \leq f(y),}$$

и *убывающим* отображением, если

$$\boxed{x \leq y} \Rightarrow \boxed{f(x) \geq f(y).}$$

Отображение f называют *строго возрастающим*, если, сверх того,

$$\boxed{x < y} \Rightarrow \boxed{f(x) < f(y),}$$

и *строго убывающим*, если

$$\boxed{x < y} \Rightarrow \boxed{f(x) > f(y).}$$

Возрастающие и убывающие отображения называются вместе *монотонными*. Строго возрастающие и строго убывающие отображения называются вместе *строго монотонными*.

Примеры.

1°. Последовательность (x_n), где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

является строго возрастающей. В этом легко убедиться, если разложить правую часть по формуле бинома ([5], с. 99).

2°. Функция $x \to e^{-x}$ вещественного переменного является строго убывающей.

4. Мощности.

Определение 20. Множество X называется *равномощным* множеству Y, если существует биекция множества X на Y.

Если существует инъекция множества X в Y и не существует инъекции множества Y в X, то говорят, что Y имеет *мощность, строго большую мощности* множества X, или что X имеет *мощность, строго меньшую мощности* множества Y.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2 [*Теорема Бернштейна.*] *Для любых двух множеств X и Y*

(1) *либо существует инъекция множества X в Y, либо существует инъекция множества Y в X (одно не исключает другое);*

(2) *если существуют одновременно инъекция множества X в Y и инъекция множества Y в X, то существует также биекция множества X на Y.*

Эту теорему называют *теоремой сравнения мощностей.* Из нее следует, что любые два множества X и Y либо равномощны, либо одно из них имеет мощность, строго большую мощности другого.

Предложение 4. Бинарное отношение "X равномощно Y" является отношением эквивалентности $\sim$: $X \sim Y$.

Доказательство. Действительно, для произвольного множества X тождественное отображение id_X будет биекцией множества X на себя. Следовательно,

$$X \sim X$$

(рефлексивность).

Далее, если существует биекция f множества X на Y, то f^{-1} будет биекцией множества Y на X, т. е.

$$\boxed{(X \sim Y) \Rightarrow (\mathrm{Y} \sim X)}$$

(симметричность).

Наконец, если существует биекция f множества X на Y и биекция g множества Y на Z, то композиция $g \circ f$ будет биекцией множества X на Z, т. е.

$$\boxed{((X \sim Y) \wedge (Y \sim Z)) \Rightarrow (X \sim Z)}$$

(транзитивность), ч. и т. д.

Рассмотренное отношение эквивалентности делит все множества на классы эквивалентности, называемые *мощностями* или *кардинальными числами*. Мощность множества X обозначается символом card$X$:

$$\boxed{\text{card X – мощность множества } X.}$$

Таким образом, каждому множеству X ставится в соответствие объект card X, называемый кардинальным числом или мощностью X, причем двум множествам X и Y сопоставляется одно и то же кардинальное число тогда и только тогда, когда X равномощно Y, т. е. когда X биективно Y.

Конечные кардинальные числа являются классами эквивалентности конечных множеств. Мощность бесконечного множества (бесконечное кардинальное число) называется *трансфинитным кардинальным числом* или *трансфинитным числом.*

Определим в множестве кардинальных чисел бинарное отношение:

$$\text{если } A \subset E, \text{ то card } A \leq \text{card } E. \tag{4}$$

Это отношение рефлексивно, так как $(A \subset A) \Rightarrow (\text{card } A \leq \text{card } A)$, и транзитивно, ибо если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ и, следовательно, card $A \leq$ card C.

Покажем, что отношение (4) антисимметрично, т. е.

$$((\text{card } A \leq \text{card } B) \wedge (\text{card } B \leq \text{card } A)) \Rightarrow$$

$$(\text{card } A = \text{card } B).$$

Пусть $E \subset F$. Назовем инъекцию f множества E в F, определенную равенством $f(x) = x$, *канонической инъекцией* множества E в F. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то одновременно существуют каноническая инъекция множества A в B и каноническая инъекция множества B в A. Тогда по теореме Бернштейна существует биекция множества A на B и, следовательно, множества A и B равномощны, т. е. card $A =$ card B.

Мы доказали, что *бинарное отношение* (4) рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, поэтому оно *является отношением порядка.*

5. Счетные множества.

Определение 21. Всякое множество, равномощное множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, называется *счетным.* Мощность ν счетного множества – это мощность множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $\nu \equiv \text{card } \mathbf{N}$.

Множество E *конечно*, если оно равномощно множеству n натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Всякое множество E, не являющееся конечным, будем называть *бесконечным множеством.*

Множество E называется *несчетным*, если оно не конечно и не счетно. Если множество E конечно или счетно, будем говорить, что E *не более чем счетно.*

Пример. Множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел счетно. Действительно, расположим элементы множеств $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{N}$ в следующем порядке:

N	1	2	3	4	5	6	7	...
Z	0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Теперь видно, что функция, определенная формулой

$$\mathbf{N} \to \mathbf{Z} : n \to f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четно}, \\ -\dfrac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases}$$

является биекцией множества $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Z}$.

В этом примере часть $\mathbf{N}$ множества $\mathbf{Z}$ оказывается равномощной всему множеству $\mathbf{Z}$. Это возможно только для бесконечных множеств. Конечное множество E не может быть равномощно никакому своему подмножеству, отличному от E.

Теорема 3 *$\nu \equiv \mathrm{card}\,\mathbf{N}$ является наименьшим трансфинитным кардинальным числом.*

Доказательство. Пусть E – бесконечное множество, для которого соотношение $\mathrm{card}\,E > \mathrm{card}\,\mathbf{N}$ не имеет места. Тогда по теореме Бернштейна существует инъекция множества E в $\mathbf{N}$ и, следовательно, биекция $g : E \to P$ множества E на некоторую бесконечную часть $P \subset \mathbf{N}$. Расположим элементы множества P в порядке возрастания и обозначим n-й элемент полученной таким образом последовательности через x_n. Отображение $f : \mathbf{N} \to P : n \to x_n$ будет биекцией множества $\mathbf{N}$ на P, а композиция $g \circ f : \mathbf{N} \to E$ – биекцией множества $\mathbf{N}$ на E. Следовательно, $\mathrm{card}\,E = \mathrm{card}\,\mathbf{N}$, ч. и т. д.

Теорема показывает, что всякое бесконечное множество обязательно содержит счетное подмножество. В частности, всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно, и никакое непустое несчетное множество не может быть частью счетного.

Теорема 4 *Если (A_n) – последовательность счетных множеств, то объединение*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{5}$$

счетно.

Доказательство. Учитывая, что каждое счетное множество A_k биективно $\mathbf{N}$, расположим элементы множества A_k в последовательность (x_{kn}) и составим бесконечную таблицу, содержащую все элементы множества E (рис. 21). Если перенумеровать эти элементы в порядке, указанном на рис. 21 стрелками:

$$x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \ldots,$$

то получится последовательность, определяющая биекцию множества $\mathbf{N}$ на E. Следовательно, $\operatorname{card} E = \nu$ и E счетно, ч. и т. д.

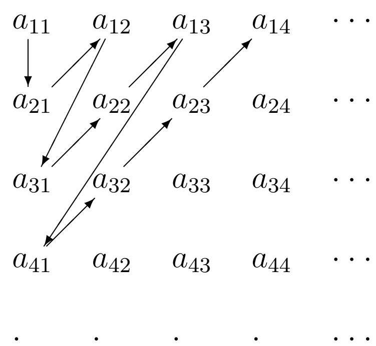

Рис. 21.

Следствие 1. Если I не более чем счетно и множество B_i при каждом $i \in I$ не более чем счетно, то объединение

$$F = \bigcup_{i \in I} B_i$$

не более чем счетно.

Действительно, F равномощно некоторому подмножеству множества (5).

Теорема 5 *Если X – счетное множество, то произведение X^n также является счетным множеством.*

Доказательство. Для $n = 1$ теорема очевидна. Пусть она верна для $k = n - 1$, т. е. X^{n-1} счетно. Представим элементы произведения X^n в виде

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \equiv (a, b),$$

где $a \in X^{n-1},\ b \in X$. При каждом фиксированном a множество всех пар (a, b) равномощно множеству X и, следовательно, счетно. Таким образом, X^n является объединением счетного множества счетных множеств и по предыдущей теореме будет счетным, ч. и т. д.

Следствие 2. Множество всех рациональных чисел счетно.

В самом деле, каждое рациональное число $r = p/q$ ($q \neq 0$) определяется парой $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Так как по теореме 5 произведение $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ счетно, то множество рациональных чисел $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ не более чем счетно. Но $\mathbf{Q}$ содержит $\mathbf{N}$, поэтому $\mathbf{Q}$ счетно.

Следствие 3. Множество всех точек $\mathbf{R}^n$ с рациональными координатами счетно, ибо $\mathbf{Q}^n$ счетно.

Теорема 6 [*Теорема Кантора.*][6] *Множество всех вещественных чисел несчетно:*

$$\boxed{\text{card}\ \mathbf{N} < \text{card}\ \mathbf{R}.}$$

6. Мощность континуума.

Определение 22. Мощность интервала $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ называется *мощностью континуума.*

Справедливы следующие утверждения.

[6] Доказательство теоремы см., например, в книге В. А. Зорича [6, гл. 2, §4, п. 2].

1. Множество $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел имеет мощность континуума, ибо функция

$$x \to \ln \frac{x}{1-x}$$

является биекцией интервала $(0, 1)$ на $\mathbf{R}$.

2. Множества $\mathbf{R},\ \mathbf{R}^2, \ldots, \mathbf{R}^n$ имеют мощность континуума и, следовательно, равномощны друг другу.

3. Множество $\mathbf{C}$ всех комплексных чисел имеет мощность континуума, ибо оно равномощно $\mathbf{R}^2$.

4. Любое векторное пространство конечного числа измерений n над полем вещественных (или комплексных) чисел имеет мощность континуума, ибо оно равномощно $\mathbf{R}^n$ (или $\mathbf{R}^{2n}$).

5. Множество всех непрерывных вещественных функций вещественной переменной имеет мощность континуума.

6. Множество всех вещественных функций вещественного переменного имеет мощность, строго большую мощности континуума.

Континуум–гипотезой называется предположение, согласно которому не существует множеств E таких, что $\nu = \text{card}\, \mathbf{N} < \text{card}\, E < \text{card}\, \mathbf{R}$, т. е. вслед за кардинальным числом ν идет сразу кардинальное число card $\mathbf{R}$, между ними нет промежуточных кардинальных чисел.

Коэн доказал *неразрешимость* континуум-гипотезы, показав, что ее истинность или ложность не могут быть установлены в рамках существующей аксиоматики теории множеств, что заставляет "критически взглянуть" на основания современной "канторовской" математики, оперирующей бесконечными процессами [7].