Линейные пространства

О. Множество L объектов произвольной природы называется *линейным пространством* (ЛП) над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, если на нём каким-либо способом введены операции сложения двух элементов и умножения элемента на число, так что $x + y \in L$, $\lambda \cdot x \in L$ для любых $x, y \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и выполняются восемь аксиом:

1° $x + y = y + x \;\; \forall x, y \in L$ (коммутативность сложения);
2° $x + (y + z) = (x + y) + z \;\; \forall x, y, z \in L$ (ассоциативность сложения);
3° $1 \cdot x = x \;\; \forall x \in L$ (особая роль числа 1);
4° $\exists \theta \in L$: $x + \theta = x \;\; \forall x \in L$ (существование нулевого элемента);
5° $\forall x \in L \;\; \exists x' \in L$: $x + x' = \theta$ (существование противоположного элемента);
6° $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad \forall x, y \in L, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения относительно суммы элементов);
7° $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \quad \forall x \in L, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения относительно суммы чисел);
8° $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \;\; \forall x \in L, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ассоциативность умножения).

Замечание. Знак $\cdot$ при умножении элемента ЛП на число будем опускать.
Замечание. Аналогично определяется ЛП над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.
Замечание. Элементы ЛП называют *векторами*.

Пример 1. Является ли ЛП
а) $C[a, b]$ — множество всех функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$;
б) множество всех многочленов степени n;
в) P_n — множество всех многочленов степени не выше n;
г) T_n — множество всех столбцов, состоящих из n элементов;
д) множество всех строк, состоящих из n элементов;
е) H_n^m — множество всех матриц размера $m \times n$;
ж) V_2 — множество всех геометрических векторов на плоскости;
з) V_3 — множество всех геометрических векторов в пространстве?

(Во всех случаях рассматриваются стандартные для элементов данного множества операции сложения элементов и умножения элемента на число.)
Укажите нулевой и противоположный элемент ЛП.
Ответ:
а) да, нулевой элемент $\theta(t) \equiv 0$, противоположный элемент к функции $x(t)$ — это функция $-x(t)$;
б) нет, ибо сумма двух многочленов степени n может быть многочленом меньшей степени;
в) да, нулевой элемент $\theta(t) \equiv 0$, противоположный элемент к многочлену $x(t)$ — это многочлен $-x(t)$;

г) да, нулевой элемент $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, противоположный элемент к столбцу $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ — это столбец $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$;

д) да, нулевой элемент $(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0)$, противоположный элемент к строке $(a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n)$ — это строка $(-a_1 \quad -a_2 \quad \ldots \quad -a_n)$;

е) да, нулевой элемент $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, противоположный элемент к матрице $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — это матрица $\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$;

ж) да, нулевой элемент — это нулевой вектор $\vec{0}$, противоположный элемент к вектору $\vec{a}$ — это вектор $-\vec{a}$;

з) да, нулевой элемент — это нулевой вектор $\vec{0}$, противоположный элемент к вектору $\vec{a}$ — это вектор $-\vec{a}$.

О. Некоторое подмножество M элементов ЛП L называется *линейным подпространством* (ЛПП), если операции сложения элементов и умножения элемента на число не выводят их из данного множества:

1) $\forall x, y \in M \;\; x + y \in M$ и
2) $\forall x \in M, \lambda \in \mathbb{R} \;\; \lambda x \in M$.

Можно доказать, что ЛПП само является ЛП.

Пример 2. Какие из приведённых подмножеств ЛП V_2 являются ЛПП:

а) множество всех векторов $\{x, y\}$: $y = x$;
б) множество всех векторов $\{x, y\}$: $x + y = 1$;
в) множество всех векторов $\{x, y\}$: $x^2 + y^2 = 1$;
г) множество всех векторов $\{x, y\}$: $x^2 + y^2 \leq 1$;
д) множество всех векторов $\{x, y\}$: $x^2 + y^2 \geq 1$;
е) множество всех векторов $\{x, y\}$: $x \geq 0$;
ж) множество всех векторов $\{x, y\}$, расположенных в I или III квадрантах плоскости?

Здесь x, y — декартовы координаты.

а) Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a} = \{x, y\}$ из данного множества векторов M. Для него выполняется условие $y = x$. Если мы умножим вектор $\vec{a}$ на число λ, то получится вектор $\lambda\vec{a} = \{\lambda x, \lambda y\}$. Если $y = x$, то $\lambda y = \lambda x$, значит, $\lambda\vec{a} \in M$.
Рассмотрим произвольные два вектора $\vec{a}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{a}_2 = \{x_2, y_2\}$ из множества M. Для них выполняются равенства: $y_1 = x_1, y_2 = x_2$. Но тогда
$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$, и справедливо равенство $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$, значит, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \in M$.

Таким образом, данное множество является ЛПП.

б) Если вектор $\vec{a} = \{x, y\}$, удовлетворяющий условию $x + y = 1$, умножить на число $\lambda \neq 1$, то получится вектор $\lambda\vec{a} = \{\lambda x, \lambda y\}$, не удовлетворяющий этому условию: $\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda$. Значит, данное множество не является ЛПП.

в) Нет, по той же причине.

г) Нет: $(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda(x^2 + y^2)$ может быть > 1, если выбрать достаточно большое λ.

д) Нет (аналогично).

е) Нет: если вектор $\vec{a} = \{x, y\}$, для которого $x > 0$, умножить на отрицательное число, то получится вектор, не принадлежащий данному множеству.

ж) Нет. Сумма двух векторов из данного множества может ему не принадлежать:

$$\underbrace{\{2, 2\}}_{\text{из I квадранта}} + \underbrace{\{-3, -1\}}_{\text{из III квадранта}} = \underbrace{\{-1, 1\}}_{\text{из II квадранта}}.$$

Во всех пунктах полезно также нарисовать чертёж.

Ответ: а) да, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет, ж) нет.

О. *Линейной комбинацией* (ЛК) векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$ называется вектор вида $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k \in L$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

О. Векторы x_1, x_2, …, $x_k \in L$ называются *линейно зависимыми* (ЛЗ), если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = \theta$.

О. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L$ называются *линейно независимыми* (ЛНЗ), если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = \theta \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Пример 3 (ЛАВЗ гл. II № 18ж). В ЛП $C[0; 2\pi]$ даны элементы $\cos t$, $\sin t$. Доказать, что они ЛНЗ.

Доказательство. Пусть ЛК элементов $\cos t$, $\sin t$ равна нулевому элементу:
$\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t = \theta(t)$,
где $\theta(t) \equiv 0$ — нулевой элемент пространства $C[0; 2\pi]$, λ_1, λ_2 — постоянные множители. Равенство должно выполняться для всех $t \in [0; 2\pi]$ (поскольку это равенство *функций*), т. е. $\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t \equiv 0$. Положив $t = 0$, получим $\lambda_1 = 0$. Положив $t = \frac{\pi}{2}$, получим $\lambda_2 = 0$. Таким образом, ЛК равна нулевому элементу ($\lambda_1 \cos t + \lambda_2 \sin t \equiv 0$) $\Leftrightarrow$ все коэффициенты ЛК равны нулю ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$), поэтому элементы $\cos t$ и $\sin t$ ЛНЗ, ч.т.д.

О. Упорядоченная совокупность $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторов ЛП L называется *базисом*, если

а) эти векторы ЛНЗ и

б) любой вектор $x \in L$ является их ЛК:
$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$,
где числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ называются *координатами* вектора x в базисе e.

Можно показать, что разложение вектора x по базису e единственно, т.е. координаты данного вектора в данном базисе определяются однозначно.

О. Если в ЛП L есть n ЛНЗ векторов, а любые $n + 1$ векторов пространства L являются ЛЗ, то число n называется *размерностью* ЛП L. Т.е. размерность — это максимальное число ЛНЗ векторов в этом пространстве. Обозначение: $\dim L$.

Т. (о связи размерности с длиной базиса). Если в ЛП L есть базис, состоящий из n векторов, то $\dim L = n$. Если $\dim L = n$, то любые n ЛНЗ векторов пространства L образуют базис.

Пример 4. В T_3 (ЛП всех столбцов, состоящих из трёх элементов) даны столбцы $f_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

а) найти размерность пространства T_3;
б) доказать, что столбцы f_1, f_2, f_3 образуют базис в T_3;
в) найти x_f — столбец координат элемента x в базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$.

а) Определим размерность пространства T_3.
Рассмотрим произвольный элемент $y \in T_3$. Его можно представить в виде
$$y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = y_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1} + y_2 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2} + y_3 \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3}.$$
Таким образом, любой элемент $y \in T_3$ является ЛК столбцов e_1, e_2, e_3. При этом столбцы e_1, e_2, e_3 ЛНЗ, т.к. их ЛК равна нулевому столбцу тогда и только тогда, когда все коэффициенты ЛК равны нулю:
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \theta = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Следовательно, столбцы e_1, e_2, e_3 образуют базис в T_3 (он называется стандартным базисом пространства T_3). Поэтому $\dim T_3 = 3$. Значит, *любые три ЛНЗ столбца образуют базис в* T_3 (аналогично, стандартным базисом пространства T_n является $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, $\dim T_n = n$, поэтому в T_n любые n ЛНЗ столбцов образуют базис).

б) Докажем, что столбцы f_1, f_2, f_3 ЛНЗ и образуют базис.
Составим определитель из столбцов f_1, f_2, f_3 и вычислим его с помощью разложения по третьему столбцу:
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$
Поскольку определитель, построенный на столбцах f_1, f_2, f_3, отличен от нуля, то (по теореме о базисном миноре) эти столбцы ЛНЗ, и поэтому они образуют базис в пространстве T_3, т.к. $\dim T_3 = 3$, ч.т.д.

в) Найдём координаты элемента x в базисе f. Надо разложить элемент x по базису f:
$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$,
где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — координаты элемента x в базисе f. Таким образом,
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2\\\lambda_1 - \lambda_2\\2\lambda_1 - \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1, & (1) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1, & (2) \\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 1, & (3) \end{cases}$$

Сложив уравнения (1) и (2), найдём $\lambda_1 = 1$, после этого из уравнения (1) получим $\lambda_2 = 0$. Теперь из уравнения (3) найдём $\lambda_3 = 1$.

Таким образом,

$x = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$,

$x_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — столбец координат элемента x в базисе f.

Ответ: $\dim T_3 = 3$, $x_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ДЗ 8. ЛАВЗ гл. II № 1–4, 7, 8, 17–19, 21, 31, 35.
Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: гл. II § 6.