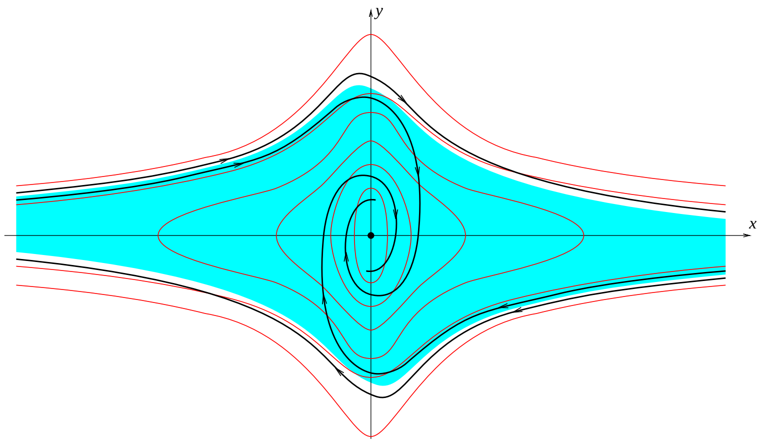
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. В. Коробков

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Учебное пособие



Новосибирск
2008

УДК 517.9(075)
ББК В.161.6я73-1
К680

Коробков М. В. Функции Ляпунова: Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2008. 46 с.

ISBN 978-5-94356-666-0

В пособии изложены сведения о функциях Ляпунова, соответствующие программе базового курса «Дифференциальные уравнения», читаемого студентам 2-го курса общефизического потока физического факультета НГУ. Приведены задачи, рекомендуемые для решения на практических занятиях по указанному курсу. Часть материала можно рассматривать как дополнительные главы по теории дифференциальных уравнений, которые полезны для более глубокого ознакомления с темой.

Предназначено студентам и преподавателям НГУ.

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. В. М. Чересиз

ISBN 978-5-94356-666-0

Предисловие

Понятие устойчивости является фундаментальным в качественной теории дифференциальных уравнений и имеет важнейшее значение для многочисленных физических приложений. В свою очередь функции Ляпунова представляют собой основной инструмент в исследовании феномена устойчивости. Они не только позволяют получить как достаточные, так и необходимые условия устойчивости, но и помогают разрешить ряд трудных и тонких вопросов: о точном определении области асимптотической устойчивости, об оценке времени нахождения траектории в области, удаленной от положения равновесия, о нахождении критериев всюду определенности решений и др. Знакомству студентов с этим удивительно простым и в то же время мощнейшим методом и посвящено данное пособие.

Пользуясь случаем, автор выражает бесконечную признательность канд. физ.-мат. наук Е. П. Волокитину, который дал множество ценных рекомендаций, а также подготовил все рисунки для настоящего пособия.

§ 1. Формулировка основ теории

1.1. Постановка задачи об устойчивости. Для упрощения изложения мы будем рассматривать только автономные системы дифференциальных уравнений вида[1]

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Предположим, что правые части системы (1), т. е. функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывны вместе со своими первыми частными производными в некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для каждой точки $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ теорема Пикара гарантирует существование единственного непродолжаемого решения $x_i = x_i(t, x^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ системы (1), удовлетворяющего начальным условиям $x_i(0, x^0) = x_i^0$. Обычно переменная t играет роль времени.

[1]Конечно, метод функций Ляпунова (иногда называемый также *вторым*, или *прямым методом Ляпунова*) разработан не только для автономных систем. Он применим и для систем с правой частью, зависящей от времени, имеется также богатая теория для уравнений с периодической правой частью. Желающих ближе познакомиться с этими вопросами, а также с *первым методом Ляпунова*, мы отсылаем к литературе (см., например, [3], [4], [10]).

В дальнейшем систему (1) мы будем записывать в сокращенной векторной форме

$$(2) \qquad \dot{x} = f(x),$$

где $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Соответственно для точки $x^0 \in \Omega$ через $x(t, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (2) с начальными данными $x(0, x^0) = x^0$. Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ через $|x|$ будем обозначать евклидову норму $|x| = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Точка $x^* \in \Omega$ называется *положением равновесия* системы (2), если $f(x^*) = 0$. Очевидно, что в этом случае $x(t) \equiv x^*$, $t \in \mathbb{R}$ — непродолжаемое решение системы (2). Такое решение называется *стационарным*, устойчивость именно таких решений мы и будем изучать. Положение равновесия x^* будем называть устойчивым, если устойчиво соответствующее стационарное решение.

Вопрос исследования устойчивости стационарного решения системы (2) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $y(t) \equiv 0$ другой автономной системы, получаемой из (2) с помощью замены $x = y + x^*$. Поэтому ниже, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $0 \in \mathbb{R}^n$ есть положение равновесия, т. е. $0 \in \Omega$ и

$$f(0) = 0.$$

Используемое ниже понятие устойчивости носит название *устойчивость по Ляпунову*. В настоящем пособии мы ограничиваемся рассмотрением устойчивости при $t \to +\infty$ (вправо).

Определение 1.1.1. Нулевое решение системы (2) называется *устойчивым*, если

1) $\exists \Delta > 0$ такое, что из неравенства $|\xi| < \Delta$ вытекает, что непродолжаемое решение $x(t, \xi)$ определено для всех $t \in [0, +\infty)$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) \in (0, \Delta]$ такое, что из неравенства $|\xi| < \delta(\varepsilon)$ вытекает оценка $|x(t, \xi)| < \varepsilon$ для всех $t \in [0, +\infty)$[2].

---

[2]Для полноты мы приведем определение устойчивости в общем случае.

Определение 1.1.1′. Пусть $\varphi(t)$, $t \in (\alpha(\varphi), \omega(\varphi))$ — непродолжаемое решение системы (2). Оно называется *устойчивым*, если 1) $\omega(\varphi) = +\infty$; 2) $\forall \tau \in (\alpha(\varphi), +\infty)$ $\exists \Delta(\tau) > 0$ такое, что из неравенства $|\xi - \varphi(\tau)| < \Delta(\tau)$ вытекает, что у непродолжаемого решения $x(t, \tau, \xi)$ задачи Коши (τ, ξ) правый конец интервала существования $\omega(\tau, \xi) = +\infty$; 3) $\forall \tau \in (\alpha(\varphi), +\infty)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\tau, \varepsilon) \in (0, \Delta(\tau)]$ такое, что из неравенства $|\xi - \varphi(\tau)| < \delta(\tau, \varepsilon)$ вытекает оценка $|x(t, \tau, \xi) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t \in [\tau, +\infty)$.

Определение 1.1.2. Нулевое решение системы (2) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и

3) $\exists \rho \in (0, \Delta]$ такое, что из неравенства $|\xi| < \rho$ вытекает сходимость $|x(t, \xi)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Открытый шар $B(0, \rho)$ называется *шаром притяжения* к нулевому решению.

Нулевое решение системы (2) называется *нейтрально устойчивым*, если оно устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

1.2. Устойчивость решений линейных систем д.у. с постоянными коэффициентами. Здесь мы будем рассматривать системы вида

$$\dot{x} = Ax, \tag{3}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ есть квадратная матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Для этого случая известны формулы решений (см., например, [12], с. 60–61), поэтому вопрос об устойчивости решается легко.

Теорема 1.2.1. *Нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда действительные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны.*

Теорема 1.2.2. *Если действительная часть хотя бы одного собственного числа матрицы A положительна, то нулевое решение системы (3) неустойчиво.*

Матрицу A будем называть *устойчивой*, если она удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1, и *неустойчивой*, если она удовлетворяет условиям теоремы 1.2.2. Если же матрица A не удовлетворяет условиям ни той, ни другой теоремы (т. е. если все собственные числа матрицы A имеют неположительные действительные части и хотя бы одно из них имеет нулевую действительную часть), то такая матрица называется *критической.*

Определение 1.1.2′. Непродолжаемое решение $\varphi(t)$, $t \in (\alpha(\varphi), \omega(\varphi))$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и 4) $\forall \tau \in (\alpha(\varphi), +\infty)$ $\exists \rho \in (0, \Delta(\tau)]$ такое, что из неравенства $|\xi - \varphi(\tau)| < \rho(\tau)$ вытекает сходимость $|x(t, \tau, \xi) - \varphi(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание. Для рассматриваемого в настоящем пособии случая стационарных решений автономных систем параметры $\Delta(\tau)$, $\rho(\tau)$, $\delta(\tau, \varepsilon)$ вовсе не зависят от τ — это можно вывести из формулы $x(t, \tau, \xi) = x(t - \tau, 0, \xi) = x(t - \tau, \xi)$. В общем случае (для нестационарных решений φ) если хотя бы для одного $\bar{\tau} \in (\alpha(\varphi), +\infty)$ существуют указанные параметры $\Delta(\bar{\tau})$, $\rho(\bar{\tau})$, $\delta(\tau, \varepsilon)$, то они существуют и для всех $\tau \in (\alpha(\varphi), +\infty)$ — это следует из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных. Поэтому определение устойчивости достаточно проверить хотя бы для одного $\bar{\tau}$.

Задача 1. Найдите необходимые и достаточные условия на критическую матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, чтобы нулевое решение системы (3) было устойчивым.

Существенное отличие случая критических матриц от ситуаций, описанных в теоремах 1.2.1 и 1.2.2, становится ясным при переходе от системы (3) к общим системам вида (2).

В заключение данного раздела напомним полезный критерий отрицательности всех вещественных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \tag{4}$$

Обозначим через Δ_i главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n, \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

Критерий Льенара – Шипара: *Для отрицательности всех вещественных частей корней уравнения (4) необходимо и достаточно, чтобы все $a_i > 0$ и чтобы $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$,...*

1.3. Устойчивость по первому приближению. Через $f'(x)$ будем обозначать матрицу Якоби $f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$.

Теорема 1.3.1. *Если матрица $f'(0)$ устойчива, то и нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво. Если матрица $f'(0)$ неустойчива, то и нулевое решение системы (2) неустойчиво.*

Однако в случае, когда матрица $f'(0)$ критическая, определить устойчивость нулевого решения системы (2) по первому приближению невозможно. Другими словами, в критическом случае, каким бы ни был ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения системы (3) с $A = f'(0)$, ответ на тот же вопрос для системы (2) может оказаться диаметрально противоположным.

Пример 1.3.2. Рассмотрим уравнение первого порядка ($n = 1$)

$$\dot{x} = ax^3. \tag{5}$$

Здесь $f(x) = ax^3$, $f'(0) = 0$, поэтому линеаризованное уравнение (в первом приближении) имеет вид $\dot{x} = 0$. Решения задачи Коши $(0, \xi)$

для данного уравнения определяются по простой формуле $x(t,\xi) \equiv \xi$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому нулевое решение устойчиво (с параметрами $\Delta = +\infty$ и $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, см. Определение 1.1.1), но не асимптотически, так как $\rho = 0$ (см. Определение 1.1.2). Налицо нейтральная устойчивость. Теперь вернемся к исходному уравнению (5). Поскольку $f(0) = 0$, то при любом $a \in \mathbb{R}$ функция $x(t) \equiv 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ будет непродолжаемым решением уравнения (5). Методом разделения переменных легко находятся другие решения данного уравнения: $x(t,\xi) = \frac{\operatorname{sgn}\xi}{\sqrt{\xi^{-2}-2at}}$ при $\xi \neq 0$. Теперь все зависит от знака a.

1) $a > 0$. Тогда выписанное решение $x(t,\xi)$ определено лишь при $t \in (-\infty, \frac{1}{2a\xi^2})$. Здесь $\Delta = 0$, таким образом, нулевое решение неустойчиво.

2) $a < 0$. Тогда решение $x(t,\xi)$ определено при $t \in (\frac{1}{2a\xi^2}, +\infty)$. Поэтому $\Delta = +\infty$. Далее $\forall \varepsilon > 0$ $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, так как модуль функции $x(t,\xi)$ строго убывает с ростом t. Наконец, $\rho = +\infty$, поскольку $\forall \xi$ $x(t,\xi) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, нулевое решение асимптотически устойчиво.

3) $a = 0$. Тогда уравнение (5) совпадает с линеаризованным уравнением, поэтому снова имеет место нейтральная устойчивость.

Задача 2. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = ax^m, \tag{6}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$.

Обратный пример — когда решение линеаризованной системы неустойчиво, а решение нелинейной системы устойчиво — возможен только при системах из двух и более уравнений и строится несколько сложнее. Явный пример такого рода мы укажем в одной из задач п. 4.2, а пока ограничимся следующим простым вопросом.

Задача 3. Пусть $n = 2$ и известно, что нулевое решение системы (3) с $A = f'(0)$ неустойчиво, а нулевое решение системы (2) устойчиво. Какова жорданова форма матрицы A?

К сожалению, рассмотренная в задаче 2 ситуация — большая редкость: у нелинейных систем нечасто удается найти общее решение. Поэтому для того, чтобы исследовать устойчивость в критических случаях, нужен более тонкий инструмент, чем линеаризация. С подобным инструментом мы познакомимся в следующем параграфе.

1.4. Функции Ляпунова и теоремы об устойчивости. Пусть $V = V(x_1, \ldots, x_n) : B(0,h) \to \mathbb{R}$ есть непрерывно дифференцируемая функция, определенная в некотором открытом шаре $B_h = B(0,h) \subset \Omega$ с центром в 0 и радиусом h. Мы будем изучать поведение функции V вдоль траекторий системы (2) и на основании этого делать вывод об устойчивости или неустойчивости и т. п. Функции V, имеющие указанное назначение, принято называть *функциями Ляпунова*.

Основная идея метода функций Ляпунова состоит в том, что можно посчитать производную вдоль траекторий системы, даже не решая ее. В самом деле, пусть $x = x(t)$ — некоторое решение системы (2). По известной формуле анализа $\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_1}\frac{dx_1(t)}{dt} + \cdots + \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_n}\frac{dx_n(t)}{dt}$. Учитывая, что $x(t)$ есть решение системы (1), имеем

(7)

$$\frac{dV(x(t))}{dt}=\frac{\partial V(x(t))}{\partial x_1}f_1(x(t))+\cdots+\frac{\partial V(x(t))}{\partial x_n}f_n(x(t))=\operatorname{grad} V(x(t))\cdot f(x(t)).$$

Теперь построим новую зависящую только от x функцию, которую мы обозначим через $\dot{V}$, и будем вычислять ее по формуле

$$\dot{V}(x) = \operatorname{grad} V(x) \cdot f(x).$$

Определенная таким образом функция $\dot{V} : B(0,h) \to \mathbb{R}$ называется *производной функции V в силу системы (2)*. Она вполне оправдывает как свое название, так и свое обозначение, поскольку в силу формулы (7) для каждого решения $x(t)$ системы (2) справедливо тождество $\frac{dV(x(t))}{dt} = \dot{V}(x(t))$ в шаре $B(0,h)$. В частности, для каждой точки $x^0 \in B(0,h)$ имеет место равенство $\dot{V}(x^0) = \frac{dV(x(t,x^0))}{dt}|_{t=0}$, где $x(t,x_0)$, напомним, есть решение задачи Коши для системы (2) с начальными данными $x(0,x^0) = x^0$.

Для формулировки результатов об устойчивости нам понадобятся некоторые дополнительные определения. Функцию $V(x)$ назовем *положительно определенной* в шаре B_h, если $V(0) = 0$ и при всех $x \in B_h$, исключая точку $x = 0$, имеет место неравенство $V(x) > 0$. Если же вместо этого выполняется неравенство $V(x) < 0$, то функция $V(x)$ называется *отрицательно определенной*. В обоих этих случаях функцию $V(x)$ назовем *знакоопределенной*.

Функция $V(x)$ называется *знакопостоянной* в шаре B_h, если для всех $x \in B_h$ выполняется неравенство $V(x) \geq 0$ или неравенство $V(x) \leq 0$. В первом случае $V(x)$ является *знакоположительной*, а во втором — *знакоотрицательной*.

Если же функция $V(x)$ принимает в шаре B_h как положительные значения, так и отрицательные, то назовем ее *знакопеременной* в шаре B_h.

Пример 1.4.1. Если $n = 2$, то функция $V(x,y) = x^2 + y^2$ является[3] положительно определенной во всем пространстве $\mathbb{R}^2$. Далее функция

[3] При $n = 2$ или $n = 3$ компоненты вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ мы, как правило, обозначаем привычными символами (x,y) и (x,y,z) соответственно.

$V(x,y) = (x+y)^2$ является знакопостоянной, но уже не знакоопределенной. Наконец, функция $V(x,y) = x^2 - y^2$ является знакопеременной.

Задача 4. Выяснить, являются ли следующие функции двух переменных знакоопределенными, знакопостоянными, знакопеременными: 1) $V(x,y) = x^2+y^2-2y^3$; 2) $V(x,y) = (x-y)^2$; 3) $V(x,y) = 1-\cos x+y^4$; 4) $V(x,y) = x^2y+xy^2$; 5) $V(x,y) = -x^2$; 6) $V(x,y) = -\sin^2 x-(x-y)^2$.

Теперь мы можем сформулировать теоремы Ляпунова об устойчивости.

Теорема 1.4.2 *Если существует функция $V \in C^1(B(0,h))$, положительно определенная в шаре $B(0,h)$, причем ее производная $\dot{V}$ в силу системы (2) является знакоотрицательной в том же шаре, то нулевое решение системы (2) устойчиво.*

Теорема 1.4.3 *Если существует функция $V \in C^1(B(0,h))$, положительно определенная в шаре $B(0,h)$, причем ее производная $\dot{V}$ в силу системы (2) является отрицательно определенной в том же шаре, то нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво.*

Эти теоремы имеют наглядный геометрический смысл. Множества уровня $V(x) = c$ при малых $c > 0$ ограничивают области, из которых не может "вырваться" никакая траектория, т. е., *однажды* попав в такую область при некотором моменте времени t_0, решение останется в этой области *навсегда* — при всех $t > t_0$. Для доказательства утверждения об устойчивости нужно еще учесть, что указанные области сжимаются к началу координат при $c \to 0$.

Пример 1.4.4. Рассмотри систему д.у.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{8}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем функцию $V(x,y) = x^2 + y^2$. Эта функция, очевидно, положительно определена. Вычислим ее производную в силу системы (8): $\dot{V} = 2xy - 2yx = 0$. Таким образом, функция V является первым интегралом системы (8) и удовлетворяет условиям теоремы 1.4.2 (откуда вытекает устойчивость нулевого решения), но не удовлетворяет условиям теоремы 1.4.3. Легко проверить, что нулевое решение в самом деле не будет асимптотически устойчивым, таким образом, здесь имеет место нейтральная устойчивость.

Теперь немного изменим систему (8), добавив члены более высокого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - y^3. \end{cases} \tag{9}$$

Возьмем ту же самую функцию Ляпунова $V(x,y) = x^2 + y^2$. Как мы уже только что отмечали, эта функция положительно определена. Но ее производная в силу системы (9) будет уже иной: $\dot{V} = 2x(y - x^3) + 2y(-x - y^3) = -2x^4 - 2y^4$. Налицо выполнение условий теоремы 1.4.3, и, таким образом, имеет место асимптотическая устойчивость.

Задача 5. Пусть $V \in C^2(B(0,h))$ — положительно определенная функция в шаре $B(0,h) \subset \mathbb{R}^n$. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}. \end{cases}$$

Задача 6. Доказать теорему 1.4.2, «расшифровав» идею, изображенную на рис. 1.

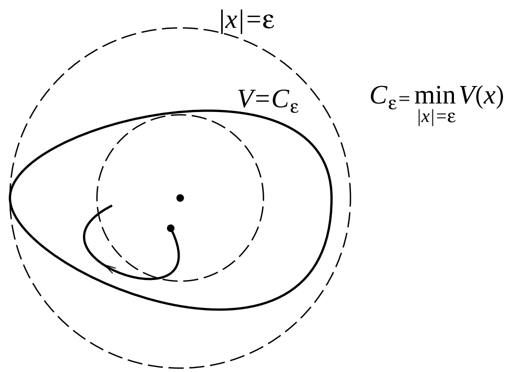


Рис. 1

Задача 7. Доказать теорему 1.4.3.

Теорема 1.4.3 допускает обращение. Следующий результат доказан итальянским математиком Массера И. Л. в 1949 г. (см., например, [10, с. 310]).

Теорема 1.4.5. *Если нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво, то существует функция $V \in C^1(B(0,h))$, положительно определенная в некотором шаре $B(0,h)$, причем ее производная $\dot{V}$ в силу системы (2) является отрицательно определенной в том же шаре.*

Замечание 1.4.6. В условиях предыдущей теоремы, если функция f из (2) однородна (т. е. если все функции f_i однородны с одинаковой степенью), то и функцию V можно подобрать однородной.

Доказательство теоремы 1.4.5 сложнее технически, и, конечно, не может быть предложено в качестве упражнения. Но из теоремы 1.4.5 можно легко вывести другой интересный результат Массера.

Задача 8. Предположим, что нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво, и пусть соответствующая функция Ляпунова из теоремы 1.4.5 определена на шаре $B(0,h)$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого непродолжаемого решения $x = x(t)$ той же системы с начальным условием $|x(0)| < \delta(h/2)$ справедливо неравенство $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t > T$, где параметр $\delta(h/2)$ взят из определения устойчивости п. 1.1 (в нашей задаче он не зависит от ε!).

Свойство, описанное в последней задаче, называется *асимптотической устойчивостью, равномерной относительно начальных данных.*

Теорема 1.4.2, в отличие от теоремы 1.4.3, не имеет обращения, как видно из следующей задачи.

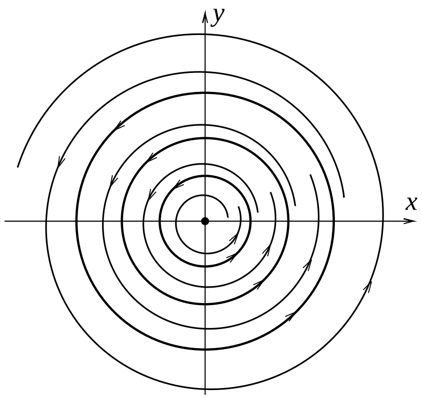


Рис. 2

Задача 9. Предположим, что имеется система (2) размерности $n = 2$, и фазовый портрет ее траекторий представляет собой «центрофокус» — некую смесь центра и фокуса (рис. 2). А именно существует счетная строго убывающая последовательность чисел $r_\nu \to 0$ такая, что 1) если $|x(0)| = r_\nu$, то траектория представляет собой окружность с центром в начале координат, в частности, $|x(t)| \equiv r_\nu$ для всех $t \in \mathbb{R}$; 2) если же $|x(0)| \in (r_{\nu+1}, r_\nu)$, то траектория $x(t)$ представляет собой спираль, которая при $t \to +\infty$ «накручивается» на внешнюю окружность ($|x(t)| \to r_\nu$ при $t \to +\infty$), а при $t \to -\infty$ эта же траектория «накручивается» на внутреннюю окружность ($|x(t)| \to r_{\nu+1}$ при $t \to -\infty$). Доказать, что в этом случае имеет место нейтральная устойчивость нулевого решения, но не существует функции Ляпунова V, удовлетворяющей условиям теоремы 1.4.2.

1.5. Функции Ляпунова и теоремы о неустойчивости.

Теорема 1.5.1 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Пусть функция $V \in C^1(B(0,h))$ такова, что $V(0) = 0$ и в любой окрестности точки 0 функция V принимает хотя бы одно отрицательное значение. Тогда, если производная $\dot{V}$ — отрицательно определенная, то нулевое решение системы (2) неустойчиво.*

Задача 10. Докажите теорему 1.5.1.

Теорема 1.5.2 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Пусть функция V такая же, как в теореме 1.5.1. Тогда если для производной $\dot{V}$ справедливо равенство*

$$\dot{V} = \lambda V + W, \tag{10}$$

где $\lambda > 0$, $W(x)$ — знакоотрицательная функция, то нулевое решение системы (2) неустойчиво.

С первого взгляда формулировка последней теоремы кажется несколько искусственной, ее значение станет ясно из § 2.

Задача 11. Докажите теорему 1.5.2.

Две приведенные теоремы Ляпунова о неустойчивости имеют тот недостаток, что в них требуется выполнение оценок на $\dot{V}$ во всем шаре $B(0,h)$. Утверждение, охватывающее обе эти теоремы, но использующее более узкую область, получил в начале 1930-х гг. Н. Г. Четаев.

Теорема 1.5.3 (рис. 3). *Пусть Ω_1 — открытое множество, содержащееся в шаре $B(0,h)$, и пусть функция $V \in C^1(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega}_1 \cap B(0,h))$ обладает следующими свойствами:*

1) $V(x) < 0$, $\dot{V}(x) < 0$ при $x \in \Omega_1$;

2) $V(x) = 0$ при $x \in B(0,h) \cap \partial\Omega_1$;

3) $0 \in \partial\Omega_1$.

Тогда нулевое решение системы (2) неустойчиво[4].

---

[4]Здесь и в дальнейшем символами $\bar{\Omega}_1$ и $\partial\Omega_1$ мы обозначаем замыкание и границу множества Ω_1 соответственно.

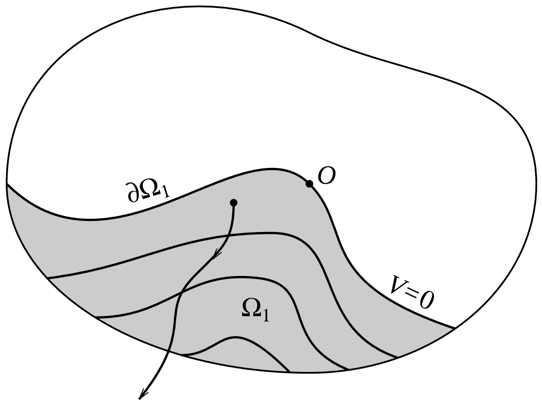


Рис. 3

Задача 12. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$$

Докажите, что нулевое решение неустойчиво. Для этого найдите область Ω_1 и радиус круга $B(0, h)$, для которых выполнены условия теоремы 1.5.3 с функцией $V = -xy$.

Задача 13. Выведите теоремы 1.5.1 и 1.5.2 из теоремы 1.5.3.

Задача 14. Докажите теорему 1.5.3.

Пример 1.5.4. Рассмотрим консервативную колебательную систему с n степенями свободы. Состояние системы в любой момент может быть описано с помощью n обобщенных координат $q_1, \dots, q_n$ и n обобщенных импульсов $p_1, \dots, p_n$. Тогда закон движения системы в обобщенных координатах q, p запишется в векторной форме при помощи гамильтоновой функции $H(q, p)$ следующим образом:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Пусть начало координат — изолированное положение равновесия (т. е. все частные производные H в начале координат равны 0). Аддитивную постоянную в H выберем так, чтобы $H(0, 0) = 0$. В обычных динамических системах функция H имеет смысл полной энергии и ее можно представить в виде $H(p, q) = T(p) + W(q)$, где T — кинетическая, а W — потенциальная энергии. Кинетическая энергия T — положительно определенная функция от p. Если потенциальная энергия имеет изолированный минимум при $q = 0$, то W — положительно определенная функция q. Следовательно, функция H является положительно определенной и, поскольку $\dot{H} = 0$, положение равновесия $p = 0$, $q = 0$ устойчиво. Это хорошо известная теорема Лагранжа, впервые сформулированная Лагранжем и доказанная Дирихле: *Состояние консервативной системы, в котором потенциальная энергия имеет изолированный минимум, является устойчивым положением равновесия.*

Допустим теперь, что H есть аналитическая функция, причем

$$T(p) = T_2(p),$$
$$W(q) = W_k(q) + W_{k+1}(q) + \ldots,$$

где $W_j(q)$ суть члены j-й степени от q и выполнены следующие ограничения:

$(*)$ *$T_2(p)$ есть положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, а знак $W(q)$ совпадает со знаком $W_k(q)$ вблизи начала координат.*

Разберем случай, когда начало координат — изолированный максимум потенциальной энергии. Тогда в силу наших предположений форма k-й степени $W_k(q)$ будет отрицательно определена. Определим функцию $V = -p \cdot q = -\sum_{i=1}^{n} p_i q_i$. С помощью тождества Эйлера для однородных функций нетрудно посчитать производную: $\dot{V} = -2T_2(p) + kW_k(q) + (k+1)W_{k+1}(q) + \ldots$ В последней формуле отрицательные члены $-2T_2(p) + kW_k(q)$ являются доминирующими вблизи начала координат, поэтому производная $\dot{V}$ отрицательно определена. Очевидно, что выбранная функция V знакопеременная, поэтому по теореме 1.5.1 начало координат неустойчиво. Таким образом, мы установили следующую теорему Ляпунова: *В предположениях $(*)$ состояние консервативной системы, в котором потенциальная энергия имеет изолированный максимум, является неустойчивым положением равновесия.*

Задача 15. Используя функцию $V = (p \cdot q)\, H$ и теорему 1.5.3, докажите следующую теорему: *В предположениях $(*)$ положение равновесия консервативной системы, в котором потенциальная энергия не имеет минимума, неустойчиво.*

§ 2. Квадратичные функции Ляпунова для линейных систем д.у. с постоянными коэффициентами

В этом параграфе нам предстоит познакомиться со сравнительно простым, но элегантным разделом теории — речь пойдет о так называемом *уравнении Ляпунова.*

Пусть $V(x)$ есть квадратичная форма: $V(x) = x^*Bx = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{i,j}x_ix_j$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — вещественная симметричная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$ — как и ранее, вектор-столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, а символом * мы обозначаем операцию транспонирования.

Рассмотрим производную $\dot{V}$ в силу системы (3) (в этом параграфе мы будем работать именно с такими системами). Нетрудно вычислить, что

$$\dot{V} = (Ax)^*Bx + x^*B(Ax) = x^*(A^*B + BA)x. \tag{11}$$

Используя симметричность матрицы B, легко проверить, что матрица $A^*B + BA$ тоже симметрична, и, таким образом, $\dot{V}$ также является квадратичной формой.

Потребуем теперь, чтобы

$$\dot{V} = W, \tag{12}$$

где W — заданная наперед квадратичная форма $W(x) = x^*Cx$. Это приводит нас к уравнению относительно неизвестной матрицы B

$$A^*B + BA = C, \tag{13}$$

которое и называется *уравнением Ляпунова.* Оно позволяет найти функцию Ляпунова V в виде квадратичной формы по заданной наперед производной W.

Обозначим через $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}, n)$ множество вещественных симметричных матриц $n\times n$. Левая часть уравнения (13) порождает линейный оператор $F : \mathrm{Sim}(\mathbb{R}, n) \to \mathrm{Sim}(\mathbb{R}, n)$, действующий по правилу $F(B) = A^*B + BA$. Ясно, что $\mathrm{Sim}(\mathbb{R}, n)$ есть конечномерное вещественное линейное пространство (размерности $\frac{n(n+1)}{2}$). Поэтому для существования обратного оператора $F^{-1} : \mathrm{Sim}(\mathbb{R}, n) \to \mathrm{Sim}(\mathbb{R}, n)$ необходимо и достаточно, чтобы среди собственных чисел оператора F не было нулевых. Разумеется, это эквивалентно тому, что 0 не является собственным числом оператора $F : \mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n) \to \mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n)$, действующего по той же формуле $F(B) = A^*B + BA$ в пространстве $\mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n) \ni B$ симметричных матриц с комплексными элементами[5].

---

[5]Хотя мы, если специально не оговорено противного, работаем только с вещественными функциями и матрицами, но в теореме 2.1 мы используем комплексное пространство, чтобы проще решить задачу о собственных числах.

Теорема 2.1. *Множество собственных чисел оператора* $F : \mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n) \to \mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n)$ *совпадает с множеством чисел вида* $\lambda_k + \lambda_l$, *где* λ_k, λ_l *суть всевозможные собственные числа матрицы* A.

Доказательство теоремы 2.1 разбивается на три этапа, которые мы оформим в виде трех задач.

Задача 16. Докажите, что каждое число вида $\lambda_k + \lambda_l$ является собственным числом оператора F.

Задача 17. Предполагая, что все величины $\lambda_k+\lambda_l$ различны между собой[6], докажите, что все собственные числа оператора F исчерпываются числами вида $\lambda_k + \lambda_l$.

Задача 18. Закончите доказательство теоремы 2.1.

Из доказанной теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.2. *Если собственные числа матрицы* A *таковы, что* $\lambda_k + \lambda_l \neq 0$ *ни для каких* $k, l = 1, \ldots, n$, *то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма* W, *существует единственная квадратичная форма* V, *удовлетворяющая уравнению (12).*

Приводимые ниже результаты получены А. М. Ляпуновым, который строил функции в виде однородных форм m-го порядка. Мы для простоты ограничиваемся квадратичными функциями.

Теорема 2.3. *Пусть матрица* A *устойчива. Тогда, какова бы ни была отрицательно определенная квадратичная форма* W, *существует единственная квадратичная форма* V, *удовлетворяющая уравнению (12), и эта форма будет положительно определенной.*

Задача 19. Докажите теорему 2.3, используя теоремы 2.2, 1.5.1 и 1.2.1.

Теорема 2.4. *Пусть матрица* A *неустойчива. Тогда если* $\lambda_k + \lambda_l \neq 0$ *ни для каких* $k, l = 1, \ldots, n$, *то какова бы ни была отрицательно определенная квадратичная форма* W, *существует единственная квадратичная форма* V, *удовлетворяющая уравнению (12), и эта форма будет принимать отрицательные значения.*

Задача 20. Докажите теорему 2.4, используя теоремы 2.2, 1.4.3 и 1.2.2.

Если в формулировке теоремы 2.4 опустить условие $\lambda_k + \lambda_l \neq 0$, то эта теорема станет неверной, как показывает следующая

Задача 21. Предположим, что матрица A вырождена, т. е. $\det A = 0$. Докажите, что в этом случае ни для какой квадратичной формы V производная $\dot{V}$ не будет отрицательно определенной.

Чтобы преодолеть указанное затруднение в построении функции Ляпунова для неустойчивой матрицы A в общем случае, нам понадобится

[6] Это значит, что $\lambda_k + \lambda_l \neq \lambda_i + \lambda_j$, если только $\{k, l\} \neq \{i, j\}$.

та самая "искусственная" формулировка теоремы 1.5.2, которая теперь становится вполне естественной.

Теорема 2.5. *Пусть матрица A неустойчива. Тогда какова бы ни была отрицательно определенная квадратичная форма W, существует число $\lambda > 0$ и квадратичная форма V такие, что выполнено равенство (10), причем V принимает отрицательные значения.*

Задача 22. Докажите теорему 2.5, используя теорему 2.4.

Возникает естественный вопрос: а зачем искать функции Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами, ведь для этого случая и так известны явные формулы для решений и критерии устойчивости? Один из ответов на этот вопрос содержится в следующей задаче.

Задача 23. Докажите теорему 1.3.1 об устойчивости по первому приближению, используя теоремы 2.3, 2.5, 1.4.3 и 1.5.2.

Теперь рассмотрим практический вопрос вычисления решений уравнения Ляпунова (13).

Задача 24. Пусть матрица A устойчива, а квадратичная форма W отрицательно определена. Докажите, что форму V, о которой идет речь в теореме 2.3, можно посчитать по формуле $V(x^0) = -\int\limits_0^{+\infty} W(x(t))dt$, где $x(t)$ есть решение системы (3), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x^0$.

Несмотря на кажущуюся простоту, сформулированная выше задача содержит глубокую идею, на которой основан наиболее универсальный метод нахождения функций Ляпунова — интегрирование вдоль траекторий. Именно таким методом была доказана обратная теорема 1.4.5 и другие интересные результаты. Увы, за универсальность надо платить — метод этот незаменим при теоретических построениях, но практически, не зная решений, с его помощью сложно что-нибудь посчитать. Но для систем с постоянными коэффициентами решения известны, следовательно, здесь этот метод вполне подходит.

Задача 25. Используя предыдущую задачу, докажите, что для устойчивой матрицы A решение B матричного уравнения Ляпунова

$$A^*B + BA = -E \tag{14}$$

(здесь и в дальнейшем E — единичная $n \times n$ матрица) вычисляется по формуле

$$B = \int\limits_0^{+\infty} [\Phi(t)]^* \Phi(t)\, dt, \tag{15}$$

где $\Phi(t)$ — матрица фундаментальной системы решений для уравнений (3) с начальным условием $\Phi(0) = E$.

Задача 26. Используя формулу (15), решить матричное уравнение Ляпунова (14) для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вот еще несколько задач на матричное уравнение Ляпунова.

Задача 27. Пусть задана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1+\alpha \end{pmatrix}.$$

При каких вещественных значениях параметра α разрешимо уравнение (14)? При каких α решение B положительно определено?

Задача 28. Пусть задана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\alpha. \end{pmatrix},$$

где $\alpha > 0$. Используя формулу (15), найти формулу для элемента b_{ij} матрицы B, являющейся решением уравнения Ляпунова (14).

Задача 29. Пусть задана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & \beta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & \beta \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\alpha. \end{pmatrix},$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Используя предыдущую задачу, найти формулу для элемента b_{ij} матрицы B, являющейся решением уравнения Ляпунова (14).

Задача 30. В условиях предыдущей задачи, используя напрямую матричное соотношение (14), вывести рекуррентные формулы для b_{ij}. Проверить, что они согласуются с полученными ранее (методами дифференциальных уравнений) явными формулами для b_{ij}.

§ 3. Построение функций Ляпунова в некоторых частных случаях для нелинейных систем

Как уже говорилось, не существует универсальных методов вычисления функций Ляпунова[7], когда решения системы д.у. неизвестны. Однако в частных случаях эти функции удается посчитать с помощью некоторых специальных приемов, изложению которых и посвящен настоящий параграф.

3.1. Нахождение функции Ляпунова в виде суммы квадратичной формы и интегралов от нелинейных функций, входящих в правую часть системы.

Пример 3.1.1. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + g(x) = 0$, где $g \in C^1(\mathbb{R})$. Это уравнение можно интерпретировать как закон движения по прямой. Оно эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \tag{16}$$

Предположим, что $g(0) = 0$ и $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$. Обозначим $G(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds$. Тогда в качестве функции Ляпунова можно взять функцию $V(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$. Непосредственно проверяется, что $\dot{V} = 0$[8]. Легко проверить, что данная функция Ляпунова удовлетворяет условиям теоремы 1.4.2, значит, имеет место устойчивость. Вместе с тем, асимптотической устойчивости не будет, так как траектории нашей системы представляют собой замкнутые кривые — линии уровня $V(x, y) = k$, и, следовательно, ни одна из траекторий не стремится асимптотически к началу координат. Налицо нейтральная устойчивость.

Задача 31. Найдите все положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

и исследуйте их на устойчивость.

Задача 32. Изменим уравнение движения из примера 3.1.1 таким образом, чтобы появились силы трения: $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(x) = 0$, где $\varphi, g \in$

---

[7] Доказано, что даже для случая, когда правые части системы (2) суть полиномы, поиск функций Ляпунова, дающих критерий устойчивости, представляет собой (в общем случае) *алгебраически неразрешимую задачу* (см., например, [13]).

[8] Это же равенство можно получить и из физических соображений, как следствие закона сохранения энергии, трактуя $\frac{y^2}{2}$ как кинетическую энергию, а $G(x)$ — как потенциальную.

$C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = g(0) = 0$. Это уравнение, очевидно, эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - \varphi(y). \end{cases} \tag{17}$$

В предположениях, что $g(x)x > 0$ при $x \neq 0$, $\varphi(y)y > 0$ при $y \neq 0$, исследовать на устойчивость нулевое решение.

Задача 33. Докажите, что *уравнение Льенара* $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, описывающее колебания в электрическом контуре, эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x), \end{cases} \tag{18}$$

где $F(x) = \int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi$. В предположениях, что f — четная функция, а g — нечетная возрастающая функция класса C^1, причем $g(x)F(x) > 0$ при $x \neq 0$, исследовать на устойчивость нулевое решение.

Задача 34. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$, эквивалентное системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x, y). \end{cases} \tag{19}$$

В предположениях, что $f(x, 0)x > 0$, $[f(x, y) - f(x, 0)]y > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$, исследовать на устойчивость нулевое решение.

Задача 35. Рассмотрим систему, описывающую колебания n материальных точек с массой m_i:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = m_i y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dot{y}_i = -\mu_i(y_i) - f_i(x_i) - \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x_i - x_k), \end{cases}$$

где $m_i > 0$, $\mu_i(0) = f_i(0) = \varphi_{ik}(0) = 0$, все функции из правой части гладкие, $\varphi_{ik} = \varphi_{ki}$, причем φ_{ik} суть нечетные функции. Какие дополнительные условия нужно наложить на функции из правой части, чтобы функция Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{x_i} f_i(\xi)\,d\xi + \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_0^{x_i - x_k} \varphi_{ik}(\xi)\,d\xi$$

гарантировала асимптотическую устойчивость нулевого решения?

3.2. Метод разделения переменных.

Пример 3.2.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = by + ax^3, \\ \dot{y} = cx + dy^5, \end{cases} \tag{20}$$

где a, b, c, d суть вещественные числа. Сначала применим критерий устойчивости по первому приближению. Система уравнений первого приближения в данном случае имеет вид $\dot{x} = by$, $\dot{y} = cx$. Соответствующее ей характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - bc = 0$. Если $bc > 0$, то корни характеристического уравнения действительны и имеют разные знаки, следовательно, нулевое решение данной системы неустойчиво. Если же $bc \le 0$, то действительные части корней равны нулю, так что имеет место критический случай — первого приближения уже недостаточно, чтобы сделать вывод об устойчивости или неустойчивости.

Поскольку правая часть каждого из данных уравнений представляет собой сумму двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y, попробуем искать функцию $V(x, y)$ в виде $V(x, y) = A(x) + B(y)$, где A, $B \in C^1(\mathbb{R})$, $A(0) = B(0) = 0$. Имеем $\dot{V} = \frac{dA}{dx}(by + ax^3) + \frac{dB}{dy}(cx + dy^5)$. Потребуем далее, чтобы функция $\dot{V}$ наследовала ту же структуру, т. е. чтобы $\dot{V}$ также была суммой двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — от y. Для этого должно выполняться равенство $\frac{dA}{dx}by + \frac{dB}{dy}cx = 0$ или $\frac{by}{\frac{dB}{dy}} = -\frac{cx}{\frac{dA}{dx}}$. Последнее равенство возможно, если его левые и правые части — постоянные, равные, например, $\frac{1}{2}$.

Из равенств $\frac{dB}{dy} = 2by$, $\frac{dA}{dx} = -2cx$ находим $B(y) = y^2$, $A(x) = -cx^2$, т. е. $V(x, y) = by^2 - cx^2$. Предположим далее, что $bc < 0$, тогда функция V является знакоопределенной. Имеем $\dot{V} = -2acx^4 + 2bdy^6$. Теперь если $a \le 0$, $d \le 0$, то из теоремы 1.4.2 следует устойчивость, если $a < 0$, $d < 0$, то из теоремы 1.4.3 вытекает асимптотическая устойчивость, а если $a > 0$, $d > 0$, то по теореме 1.5.1 нулевое решение неустойчиво. Однако в том случае, когда a и d разных знаков, на этом пути мы не можем сделать определенного вывода об устойчивости. В § 4 мы изложим общий метод, которым можно до конца исследовать вопрос об устойчивости во всех подобных случаях (когда характеристические корни чисто мнимые).

На практике при решении задач стоит поискать функцию Ляпунова в виде $ax^2 + by^2$ или, более общо, в виде $ax^m + by^k$.

В следующих задачах требуется исследовать на устойчивость нулевое решение систем.

Задача 36.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y - 2x^3, \\ \dot{y} = 2x - 3y^3. \end{cases}$$

Задача 37.

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^4 y. \end{cases}$$

Задача 38.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + 2xy^2, \\ \dot{y} = x^2 y. \end{cases}$$

Задача 39.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$$

Задача 40.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^5. \end{cases}$$

Задача 41.

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y), \end{cases}$$

где $\operatorname{sgn} f_i(z) = \operatorname{sgn} z$, $i = 1, 2, 3, 4$.

§ 4. Начальная классификация критических случаев положений равновесия

Как следует из названия этого параграфа, мы здесь рассматриваем случай, когда у системы (2) матрица $A = f'(0)$ критическая[9]. Предполагается, что все входящие в правую часть системы функции аналитичны, т. е. могут быть представлены степенными рядами, сходящимися в некотором шаре $B(0, h)$.

---

[9]Желающих более подробно ознакомиться с темой данного параграфа мы отсылаем к монографии [13].

4.1. Одно нулевое собственное значение. Здесь мы считаем, что все остальные корни имеют отрицательную вещественную часть. Забегая вперед, отметим, что фактически дело сведется к задаче 2 — здесь, как и в других критических случаях, систему можно расщепить, т. е., по сути, рассматривать критические переменные (соответствующие корням с нулевой вещественной частью) отдельно. С помощью (вообще говоря, нелинейных) преобразований координат (которые, хотя и запутаны, но совсем несложны) можно свести нашу систему к следующему "нормальному" виду (одну из координатных функций обозначим чрез y, а остальные — через $z_1, \dots, z_{n-1}$, объединяя их в $(n-1)$-мерный вектор z):

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y) + f_0(z) + f_1(z)y + f_2(z)y^2 + \dots, \\ \dot{z} = Qz + H(y) + h_0(z) + h_1(z)y + h_2(z)y^2 + \dots, \end{cases} \tag{21}$$

где обозначения имеют следующий смысл: $F(y)$ — степенной ряд с младшим членом ay^N, $N \geq 2$, H,f_i,h_i — степенные ряды, младшие члены которых имеют степень не ниже: $N+1$ для H, 2 для h_0,f_0,f_1, …, f_{N-1}, 1 для h_1,h_2,…, f_N,f_{N+1},…; далее, Q есть постоянная матрица, характеристические корни которой те же, что и у матрицы A, за исключением нуля, так что все характеристические корни матрицы Q имеют отрицательные действительные части.

Теперь воспользуемся результатами § 2 (см. теорему 2.3) и возьмем положительно определенную квадратичную форму $U(z)$ такую, что $\operatorname{grad} U \cdot Qz = -|z|^2$. Рассмотрим два возможных случая.

N четное. Зададим квадратичную форму $V(y,z) = U(z) - \frac{y^2}{2}$. Тогда неравенство $V(y,z) < 0$ определяет два конуса. Выберем тот из них, в котором величина ay положительна, и обозначим его K. Непосредственно вычисляем, что $\dot{V} = \dot{U} - y\dot{y} = -(|z|^2 + ay^{N+1}) + \dots$, где под многоточием здесь и ниже понимаются члены, бесконечно малые по сравнению с выписанными (например, y^{N+2}, yz^2, z^3 и т. д.). Таким образом, вблизи начала координат производная $\dot{V}$ является отрицательно определенной в конусе K. На основании теоремы Четаева 1.5.3 имеем неустойчивость (в качестве области Ω_1 из условий этой теоремы надо взять $\Omega_1 = K \cap B(0,h)$, где радиус h выбрать достаточно малым).

N нечетное. В этом случае возьмем $V(y,z) = \frac{y^2}{2} - aU(z)$, так что $\dot{V} = y\dot{y} - a\dot{U} = a(y^{N+1} + |z|^2) + \dots$ Вблизи начала координат производная $\dot{V}$ является знакоопределенной — ее знак совпадает со знаком a. Если $a > 0$, то функция V знакопеременная, и из теоремы 1.5.1 вытекает неустойчивость. Если же $a < 0$, то функция V положительно

определена и по теореме 1.4.3 нулевое решение асимптотически устойчиво.

Суммируя сказанное, приходим к следующему результату Ляпунова.

Теорема 4.1.1. *Если число N нечетно и коэффициент a отрицателен, то нулевое решение системы (21) асимптотически устойчиво. Если же хотя бы одно из указанных двух условий нарушено, то нулевое решение неустойчиво.*

Задача 42. Найти функцию Ляпунова и исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$$

В действительности требования на степени, которые мы наложили выше при анализе системы (21), чересчур жесткие и неудобные на практике. Можно построить функции Ляпунова V и при менее обременительных ограничениях.

Задача 43. Пусть система имеет вид (21), причем младшие члены рядов H,f_i,h_i имеют степень не ниже: $\frac{N+2}{2}$ для H; 2 для h_0 и для всех f_k при $2k \leq N-2$; 1 для h_1, h_2,... и для всех f_k при $2k > N-2$. Докажите, что тогда справедливо утверждение теоремы 4.1.1. Для этого в принятых выше обозначения используйте функции Ляпунова $V = \sigma U(z) - \frac{y^2}{2}$ при четном N и $V = \frac{y^2}{2} - a\sigma U(z)$ при нечетном $N \geq 1$, где параметр $\sigma > 0$ достаточно велик.

Пример 4.1.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^3 + x^2 + xy, \\ \dot{x} = -x + y^3 + xy. \end{cases} \tag{22}$$

Эта система имеет вид (21) с параметрами, удовлетворяющими условиям последней задачи[10]. Поскольку $N = 3$ нечетно и $a = -1$, немедленно получаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Парадокс: мы решили вопрос об устойчивости "с первого взгляда" на систему (22), смотря только на коэффициент при y^3 в верхнем уравнении и не обращая внимания на стоящие рядом члены более "весомого" второго порядка xy, x^2. Законность такой "небрежности" вытекает из задачи 43. Впрочем, содержащиеся там требования не всегда оптимальны. А именно можно ослабить условия на H, усилив условия на f_k.

[10]Здесь $F = -y^3$, $H = y^3$, $h_1 = x$, $f_0 = x^2$, $f_1 = x$, остальные полиномы f_k, h_k равны 0.

Задача 44. Пусть система имеет вид (21), причем младшие члены рядов H,f_i,h_i имеют степень не ниже: $\frac{N+1}{2}$ для H; 2 для h_0 и для всех f_k при $2k \leq N-1$; 1 для h_1, h_2,..., и для всех f_k при $2k > N-1$. Докажите, что тогда справедливо утверждение теоремы 4.1.1. Для этого в принятых выше обозначения используйте функции Ляпунова $V = \sigma U(z) - \frac{y^2}{2}$ при четном N и $V = \frac{y^2}{2} - a\sigma U(z)$ при нечетном $N \geq 1$, где параметр $\sigma > 0$ достаточно мал.

Пример 4.1.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^3 + x^2, \\ \dot{x} = -x + 2y^2 + xy. \end{cases}$$

Эта система имеет вид (21) с параметрами, уже не удовлетворяющими условиям задачи 43 (из за наличия члена y^2 во втором уравнении), но зато условия задачи 44 будут выполнены[11]. Поскольку $N = 3$ нечетно и $a = -1$, немедленно получаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Оптимальность требований в последних двух задачах вытекает из следующего примера. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^3 + xy, \\ \dot{x} = -x + 2y^2. \end{cases} \tag{23}$$

Эта система тоже имеет вид (21). Причем первое из ее уравнений удовлетворяет требованиям задачи 43, а второе — требованиям задачи 44. Но в совокупности требования ни одной из указанных задач не выполняются, расплатой за что является неустойчивость.

Задача 45. Докажите, что нулевое решение системы (23) неустойчиво, используя функцию Ляпунова $V = 3(y + xy)^2 - x^2$.

Используя результаты задач 43–44, в следующих задачах требуется найти функцию Ляпунова и исследовать устойчивость нулевого решения выписанных ниже систем (сделав, если нужно, линейную замену координат, приводящую систему к виду (21) с параметрами, удовлетворяющими условиям одной из задач 43, 44).

Задача 46.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

[11]Здесь $F = -y^3$, $H = 2y^2$, $h_1 = x$, $f_0 = x^2$, остальные полиномы f_k, h_k равны 0.

Задача 47.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

4.2. Два нулевых собственных значения в одной жордановой клетке. Мы здесь рассматриваем случай, когда $n = 2$ и жорданова форма матрицы $A = f'(0)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда нулевое решение линеаризованной системы (3) неустойчиво, и поэтому естественно ожидать, что неустойчивость будет и для нелинейной системы (2). И в самом деле, нулевое решение системы (2) будет неустойчивым *почти всегда*, но все-таки может случиться и устойчивость.

После линейных координатных преобразований система принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + O(|z|^2), \\ \dot{y} = ax^2 + bxy + cy^2 + O(|z|^3), \end{cases} \tag{24}$$

где символом z обозначен вектор из $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y), так что $|z|^2 = x^2 + y^2$.

Наша цель — доказать, что *при $a \neq 0$ положение равновесия неустойчиво*. Будем считать, что $a > 0$ (случай $a < 0$ сводится к данному заменой x,y на $-x$,$-y$). Желаемый результат содержится в следующей задаче.

Задача 48. Докажите, что функция $V = -xy$ удовлетворяет теореме Четаева 1.5.3 в квадранте $\Omega_1 = \{x > 0, y > 0\} \cap B(0, h)$, где $h > 0$ — достаточно малый радиус.

Если же в системе (24) параметр $a = 0$, то ситуация драматически усложняется. Мы не будем здесь формулировать найденный Ляпуновым критерий устойчивости для данного случая (соответствующие неравенства чрезвычайно громоздки), но ограничимся лишь сравнительно простым примером.

Задача 49. Покажите, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - 3x^2 y \end{cases} \tag{25}$$

соответствует случаю, разобранному выше в задаче 34. Используя ответ к указанной задаче, напишите функцию Ляпунова для данной системы (25), гарантирующую устойчивость.

4.3. Два чисто мнимых собственных значения. Мы здесь рассматриваем случай, когда $n = 2$ и матрица $A = f'(0)$ имеет собственные числа $\pm\beta i$, где $\beta > 0$, i есть мнимая единица. После линейной замены переменных приходим к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \dots, \\ \dot{y} = -\beta x + \dots, \end{cases} \tag{26}$$

где многоточием обозначены ряды из однородных полиномов от переменных x, y степени 2 и выше. Этот критический случай допускает элегантное решение с помощью комплексных чисел. Положим $z = x + iy$. Тогда система (26) удобно записывается в виде одного уравнения:

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = (\beta y + \dots) + i(-\beta x + \dots) = -i\beta z + P_2(z, \bar{z}) + P_3(z, \dot{z}) + O(z^4), \tag{27}$$

где $P_k(z, \dot{z})$ суть однородные полиномы степени k от переменных z, $\dot{z}$ (при переходе от (26) к (27) мы использовали также стандартные формулы $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$). Оказывается, что большую часть этих полиномов можно уничтожить! А именно координатным преобразованием

$$w = z + Q_2(z, \bar{z}) + Q_3(z, \bar{z}), \tag{28}$$

где Q_2, Q_3 суть однородные полиномы от переменных $z, \bar{z}$ степени 2 и 3 соответственно, уравнение (27) приводится к следующему упрощенному виду:

$$\dot{w} = -i\beta w + Aw^2\bar{w} + O(w^4), \tag{29}$$

где $A \in \mathbb{C}$ есть некоторая константа. Теперь в качестве функции Ляпунова можно взять просто

$$V = |w|^2 = w\bar{w}. \tag{30}$$

В самом деле, применяя к обеим частям равенства (29) операцию сопряжения, получаем

$$\dot{\bar{w}} = i\beta\bar{w} + \bar{A}\bar{w}^2 w + O(w^4), \tag{31}$$

следовательно

$$\dot{V} = \dot{w}\bar{w} + w\dot{\bar{w}} = (-i\beta w + Aw^2\bar{w})\bar{w} + (i\beta\bar{w} + \bar{A}\bar{w}^2 w)w + O(w^5) = a|w|^4 + O(w^5), \tag{32}$$

где $a = 2\,\mathrm{Re}\,A$. Параметр a, который называют *ляпуновской величиной*, и отвечает на вопрос об устойчивости. Если $a < 0$, то из формулы (32) очевидно, что $\dot{V}$ определена отрицательно, стало быть, нулевое решение асимптотически устойчиво (по теореме 1.4.3). Если же $a > 0$, то V,$\dot{V}$ положительно определены, и по теореме 1.5.1 имеется неустойчивость[12].

Осталось только пояснить, как именно происходит уничтожение лишних членов в уравнении (27), т. е. как выбрать полиномы Q_k из (28). Предположим для простоты, что мы уже избавились от квадратичных членов, т. е. уравнение (27) имеет вид

$$\dot{z} = -i\beta z + p_{30}z^3 + p_{21}z^2\bar{z} + p_{12}z^1\bar{z}^2 + p_{03}\bar{z}^3 + O(z^4). \tag{33}$$

Соответственно, ищем замену в виде

$$w = z + q_{30}z^3 + q_{21}z^2\bar{z} + q_{12}z^1\bar{z}^2 + q_{03}\bar{z}^3. \tag{34}$$

Из теорем анализа следует, что в этом случае обратное преобразование имеет вид

$$z = w - (q_{30}w^3 + q_{21}w^2\bar{w} + q_{12}w^1\bar{w}^2 + q_{03}\bar{w}^3) + O(w^4). \tag{35}$$

Дифференцируя соотношение (34) по времени, и учитывая (35), (33), получаем равенство

$$\dot{w}=-i\beta w+\sum_{m_1+m_2=3,\, m_1,m_2\geq 0}[p_{m_1m_2}-i\beta q_{m_1m_2}(m_1-m_2-1)]w^{m_1}\bar{w}^{m_2}+O(w^4). \tag{36}$$

Сравнивая (36) и упрощенную систему (29), находим искомые соотношения:

$$q_{m_1m_2} = \frac{p_{m_1m_2}}{i\beta(m_1-m_2-1)} \quad \text{при } m_1+m_2 = 3,\ m_1,m_2 \geq 0. \tag{37}$$

Для индексов $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ из (36), (29) вытекает, что $A = p_{21}$, т. е. мы можем посчитать ляпуновскую величину и ответить на вопрос об устойчивости *с первого взгляда на исходную систему* (33) *еще до проведения координатной замены.* Если же нам все-таки нужно построить функцию Ляпунова, то, очевидно, можно положить $q_{21} = 0$ — этот коэффициент ни на что не влияет.

Пример 4.3.1. Рассмотрим уравнение Ван-Дер-Поля, возникающее при описании колебаний в электрическом контуре: $\ddot{x} - (\nu - x^2)\dot{x} + x = 0$, где ν есть некоторый вещественный параметр. Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \nu y - x^2 y. \end{cases} \tag{38}$$

[12]Если окажется $a = 0$, то тем же методом можно исследовать члены более высокого порядка: этот метод позволяет до конца решить вопрос об устойчивости в разбираемом случае пары мнимых корней (см., например, [13]).

Собственные числа здесь $\lambda = \frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{4} - 1}$. Поэтому при $\nu < 0$ будет асимптотическая устойчивость, а при $\nu > 0$ — неустойчивость. Особый интерес представляет случай $\nu = 0$. Тогда имеем пару чисто мнимых собственных чисел, и система принимает вид

$$(39) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - x^2 y. \end{cases}$$

Воспользуемся изложенной выше технологией. Вводя новую переменную $z = x + iy$, после описанных выше преобразований получаем $\dot{z} = y - i(x + x^2 y) = -iz - i\frac{(z+\bar{z})^2}{4}\frac{(z-\bar{z})}{2i} = -iz + \frac{1}{8}(-z^3 - z^2\bar{z} + z\bar{z}^2 + \bar{z}^3)$. Как видим, ляпуновская величина $a = 2(\frac{-1}{8}) = -\frac{1}{4}$ отрицательна, откуда сразу заключаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Если же мы хотим вдобавок построить функцию Ляпунова, то нужно посчитать w по формулам (34), (37). Тогда $q_{30} = q_{12} = \frac{i}{16}$, $q_{03} = \frac{i}{32}$, $q_{21} = 0$. Таким образом $w = z + \frac{i}{32}(2z^3 + 2z\bar{z}^2 + \bar{z}^3)$. Искомая функция Ляпунова $V = w\bar{w}$. Если в правой части последнего равенства отбросить члены выше четвертого порядка, которые не влияют на знакоопределенность V и $\dot{V}$, то получим простую формулу $V = x^2 + y^2 - \frac{xy^3}{4} + \frac{x^3 y}{4}$. Тогда $\dot{V} = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + O(z^5)$.

Задача 50. Найти функцию Ляпунова (со знакоопределенной производной $\dot{V}$) и исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$$

Задача 51. Найти функцию Ляпунова и исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 8x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$$

§ 5. Некоторые приложения функций Ляпунова

Помимо определения «устойчивость» – «неустойчивость», функции Ляпунова можно использовать и для решения других вопросов, возникающих при изучении фазового портрета.

5.1. Определение области асимптотической устойчивости. Тема данного раздела мотивирована не только математическими, но и практическими соображениями. Предположим, что некоторый электрический прибор рассчитан на напряжение в 210 вольт. Прибор устроен так, что малые отклонения напряжения несущественны. Однако как велики могут быть допустимые отклонения? Система может быть асимптотически устойчивой, однако она может перестать нормально функционировать уже при отклонениях напряжения, например, свыше одного милливольта. Итак, эта система, теоретически асимптотически устойчивая, оказывается на практике неустойчивой. Асимптотическая устойчивость имела бы практический смысл, если бы были допустимы отклонения, скажем, в несколько вольт. Таким образом, возникает нужда в следующем ниже определении.

Сначала напомним, что мы рассматриваем систему (2), правая часть f которой является C^1-гладкой функцией, заданной на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем $0 \in \Omega$ и $f(0) = 0$. Если нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво, то *областью асимптотической устойчивости* будем называть множество всех точек $x^0 \in \Omega$ таких, что для всякого решения $x(t)$ с начальным условием $x(0) = x^0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0. \tag{40}$$

Область асимптотической устойчивости будем обозначать символом $\mathcal{D}_A$.

Задача 52. Докажите, что $B(0,\rho) \subset \mathcal{D}_A$, где ρ есть параметр из определения асимптотической устойчивости (см. п. 1.1).

Задача 53. Докажите, что множество $\mathcal{D}_A$ оправдывает свое название и в самом деле является областью, т. е. D_A представляет собой открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.1.1. *Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{D} \subset \Omega$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V : \bar{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$, обладающая следующим набором свойств:*

(i) V положительно определена в $\mathcal{D}$, т. е. $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$;

(ii) $\dot{V}$ знакоотрицательна в $\mathcal{D}$, т. е. $\dot{V}(x) \le 0$ для всех $x \in \mathcal{D}$;

(iii) $V(x) \equiv l$ для всех $x \in \partial\mathcal{D}$, где $l > 0$ — произвольная константа;

(iv) множество $\{x \in \mathcal{D} : \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, кроме начала координат[13]*.*

Тогда нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво, причем $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_A$.

---

[13]Это значит, что для всякого непродолжаемого решения $x(t)$ если $\dot{V}(x(t)) \equiv 0$ в любой момент времени t из области определения решения, то $x(t) \equiv 0$.

Эта весьма полезная теорема не только дает нам оценку области $\mathcal{D}_A$, но и содержит существенное усиление теоремы 1.4.3, так как здесь не требуется отрицательная определенность $\dot{V}$.

Пример 5.1.2. Обратимся снова к встречавшемуся выше уравнению Льенара $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$, которое, напомним, эквивалентно системе

$$\begin{cases}\dot{x}=y-F(x),\\ \dot{y}=-g(x),\end{cases} \tag{41}$$

где $F(x)=\int\limits_0^x f(x)\,dx$. Как и ранее, предположим, что f — четная функция, а g — нечетная возрастающая функция класса $C^1(\mathbb{R})$, причем

$$g(x)F(x)>0 \quad \text{при } 0\neq|x|<a, \tag{42}$$

$$G(x)<l \quad \text{только при } |x|<a, \tag{43}$$

где $G(x)=\int\limits_0^x g(x)\,dx$, и l,a суть некоторые положительные константы. В этих предположениях при решении задачи 33 мы выяснили, что функция $V=\frac{1}{2}y^2+G(x)$ гарантирует устойчивость, поскольку сама функция V положительно определена, а ее производная знакоотрицательная: $\dot{V}=-g(x)F(x)\leq 0$. Однако $\dot{V}=0$ при $x=0$, т. е. на оси O_Y, так что $\dot{V}$ не является отрицательно определенной, и до настоящего параграфа мы не могли доказать асимптотической устойчивости. Теперь это сделать легко. В самом деле, в качестве области $\mathcal{D}$ из условий теоремы 5.1.1 возьмем $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : V(x,y)<l\}$. Тогда из предположения (43) вытекает, что $|x|<a$, $|y|^2<2l$ при всех $(x,y)\in\mathcal{D}$, так что область $\mathcal{D}$ действительно ограничена. Далее в точках оси O_Y (где $\dot{V}=0$), отличных от начала координат, угловой коэффициент

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-g(x)}{y-F(x)}$$

имеет конечное значение (равен нулю), т. е. касательная к траектории пересекает ось O_Y под ненулевым углом, значит, ось O_Y в самом деле не содержит целых траекторий. Таким образом, все условия (i)–(iv) теоремы 5.1.1 выполнены, откуда следует асимптотическая устойчивости нулевого решения, причем область асимптотической устойчивости содержит множество $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : V(x,y)<l\}$.

Задача 54. Рассмотрим уравнение Ван-Дер-Поля $\ddot{x}+\nu(x^2-1)\dot{x}+x=0$. Оно относится к разобранному выше типу, в частности, эквивалентно системе

$$\text{(44)} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y - \nu\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Используя рассуждения Примера 5.1.2, докажите, что нулевое решение системы (44) асимптотически устойчиво при всех $\nu < 0$, причем $B(0, \sqrt{3}) \subset \mathcal{D}_A$ при всех $\nu < 0$ (радиус круга не зависит от ν!).

Задача 55. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + \dot{x} + 6x + 3x^2 = 0$, эквивалентное системе

$$\text{(45)} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -y - 6x - 3x^2. \end{cases}$$

Используя функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}y^2 + 3x^2 + x^3$ с производной $\dot{V} = -y^2$ и теорему 5.1.1, докажите, что нулевое решение асимптотически устойчиво, и оцените область $\mathcal{D}_A$ (рис. 4).

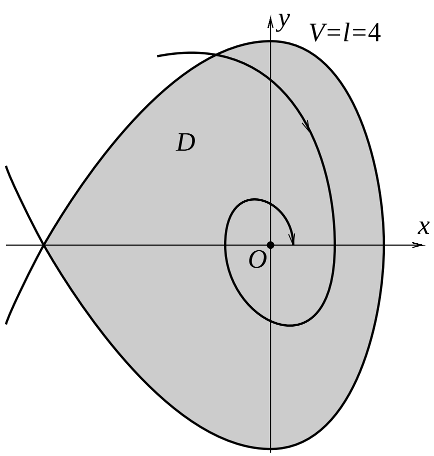


Рис. 4

Задача 56. Немного изменим формулировку задачи 54 и рассмотрим несколько иное (но тоже встречавшееся ранее) уравнение Ван-Дер-Поля $\ddot{x} - (\nu - x^2)\dot{x} + x = 0$, эквивалентное системе

$$\text{(46)} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + (\nu - x^2)y. \end{cases}$$

Это уравнение имеет простую функцию Ляпунова $V = x^2 + y^2$ с производной $\dot V = 2\nu y^2 - 2x^2y^2$. При $\nu < 0$ эта функция гарантирует асимптотическую устойчивость (по теореме 1.4.3), однако при $\nu = 0$ производная $\dot V = -2x^2y^2$ лишь знакоотрицательная, но не являются отрицательно определенной. Поэтому ранее в примере 4.3.1 нам пришлось затратить очень серьезные усилия для доказательства асимптотической устойчивости (со сравнительно трудоемким вычислением сложной функции Ляпунова с членами четвертого порядка). Но применяя Теорему 5.1.1, подобных сложностей можно избежать. В самом деле, используя функцию $V = x^2 + y^2$, докажите с помощью теоремы 5.1.1, что нулевое решение системы (46) асимптотически устойчиво при всех $\nu \le 0$, причем $\mathcal{D}_A = \mathbb{R}^2$ при всех $\nu \le 0$.

Последняя задача дает пример так называемой устойчивости в целом. А именно говорят, что нулевое решение системы (2) *устойчиво в целом*, если $\mathcal{D}_A = \mathbb{R}^n$.

Теорема 5.1.3. *Пусть правая часть системы (2) непрерывно дифференцируема во всем $\mathbb{R}^n$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, обладающая следующим набором свойств:*

(i) V положительно определена в $\mathbb{R}^n$;

(ii) $\dot V$ знакоотрицательная в $\mathbb{R}^n$;

(iii) множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot V(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, кроме начала координат.

Тогда каждое решение, остающееся ограниченным при $t \ge 0$, стремится к началу координат при $t \to +\infty$.

Следствие 5.1.4 (теорема Барбашина – Красовского). *Пусть правая часть системы (2) непрерывно дифференцируема во всем $\mathbb{R}^n$. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, обладающая следующим набором свойств:*

(i) V положительно определена в $\mathbb{R}^n$;

(ii) $\dot V$ знакоотрицательная в $\mathbb{R}^n$;

(iii) множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \dot V(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий, кроме начала координат;

(iv) справедлива формула

$$V(x) \to +\infty \quad \text{при } |x| \to \infty. \tag{47}$$

Тогда имеет место устойчивость в целом.

Задача 57. Выведите следствие 5.1.4 из теоремы 5.1.3.

Пример 5.1.5. Снова рассмотрим систему (41), но теперь заменим условия (42)–(43) следующими:

$$g(x)F(x) > 0 \quad \text{при } |x| \neq 0, \tag{48}$$

$$G(x) \to +\infty \quad \text{при } |x| \to \infty. \tag{49}$$

В качестве V возьмем ту же самую функцию $V = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$. Тогда из следствия 5.1.4 вытекает устойчивость в целом нулевого решения системы (41).

Задача 58. Рассмотрим снова систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases} \tag{50}$$

Эта система имеет простую функцию Ляпунова $V = x^2 + (x-y)^2$ с производной $\dot{V} = -2y^2(x^2+(x-y)^2)$, которая лишь знакоотрицательная, но не является отрицательно определенной. Поэтому для доказательства асимптотической устойчивости в задаче 50 нам не хватило указанной простой функции Ляпунова, а пришлось «достраивать» ее, добавляя слагаемые четвертого порядка и т.п. Теперь, учитывая следствие 5.1.4, мы можем избежать этих трудоемких выкладок. Используя указанную простую функцию Ляпунова и следствие 5.1.4, докажите, что нулевое решение системы (50) устойчиво в целом.

Задача 59. Используя ответы к задачам 32, 34, 35, 36, 37, 39, 41, выяснить, возможна ли там устойчивость в целом, и если да, то при каких условиях.

Отметим, что условие (47) в следствии 5.1.4 существенно, как показывает следующая задача.

Задача 60. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \\ \dot{y} = -\frac{2y}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{cases} \tag{51}$$

В качестве функции Ляпунова возьмем $V = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$. Эта функция будет, очевидно, положительно определена в $\mathbb{R}^2$. Ее производная имеет вид

$$\dot{V} = -4\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2}\right),$$

в частности, $\dot{V}$ отрицательно определена во всем $\mathbb{R}^2$. Тем самым условия (i)–(iii) следствия 5.1.4 выполнены. Докажите, однако, что устойчивости в целом не будет[14]. Для этого проанализируете, как траектории системы (51) пересекают кривую $y = 2 + \frac{1}{1+x^2}$. А именно установите существование такого числа $a > 1$, что при $x \geq a$ угловой коэффициент наклона указанной кривой будет меньше, чем угловой коэффициент наклона траекторий (в точке их пересечения с кривой). Отсюда выведите, что траектории не могут покинуть область $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a, y \geq 2 + \frac{1}{1+x^2}\}$, так как они пересекают границу этой области снаружи внутрь.

Однако более тонким анализом иногда удается доказать устойчивость в целом и без требования (47).

Задача 61. Обратимся снова к уравнению Льенара $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x) = 0$, только теперь мы запишем эквивалентную систему в другом виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y. \end{cases}$$

Введем следующие предположения:

$$xg(x) > 0 \quad \text{при всех } x \neq 0,$$

$$f(x) > 0 \quad \text{при всех } x \neq 0,$$

$$|F(x)| = \left| \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi \right| \to \infty \quad \text{при } |x| \to \infty.$$

Возьмем функцию Ляпунова $V(x) = \frac{1}{2}y^2 + G(x)$, где $G(x) = \int\limits_0^x g(x)\, dx$. Тогда $\dot{V} = -f(x)y^2 \leq 0$. Легко проверить, что множество, где $\dot{V} = 0$, состоит из координатных осей и не содержит целых траекторий (кроме начала координат). Однако поскольку из сделанных предположений не вытекает, что $G(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, условие (47) следствия 5.1.4, вообще говоря, не выполнено. Поэтому мы можем только утверждать на основании теоремы 5.1.3, что каждое *ограниченное* при всех $t \geq 0$ решение стремится к началу координат при $t \to \infty$. Таким образом, для установления устойчивости в целом надо показать, что все решения при сделанных предположениях ограничены при $t \geq 0$. **Докажите**

[14]Поскольку не выполнено условие (47). Обращаем внимание читателя, что фазовый портрет данной системы (в несколько измененном масштабе) изображен на обложке данного пособия, причем черным цветом нарисованы траектории, красным — линии уровня функции Ляпунова, а голубым цветом закрашена область асимптотической устойчивости.

это, проверив, что для каждого решения найдутся параметры $l > 0$, $a > 0$ такие, что это решение никогда не сможет покинуть области $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) < l, [y + F(x)]^2 < a^2\}$ (рис. 5). При этом положительные параметры a, l подбираются так, чтобы начальная точка нашего решения $x(0)$ очутилась в $\mathcal{D}$. Кроме того, при фиксированном l параметр a выбирают столь большим, чтобы на границе $\partial\mathcal{D}$ при $y + F(x) = a$ выполнялось неравенство $x > 0$, а при $y + F(x) = -a$ выполнялось $x < 0$.

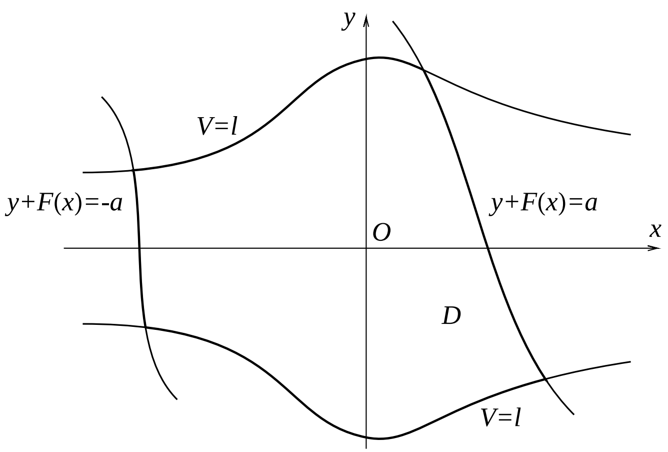


Рис. 5

В заключение данного раздела отметим, что для произвольной автономной системы с помощью функций Ляпунова можно не просто получить оценку области асимптотической устойчивости, но и дать ее точное описание[15]. Более подробно об этом можно прочитать в монографии [4].

5.2. Оценка времени переходного процесса. Мы едва затронем настоящий вопрос, но совсем умолчать о нем не можем ввиду очевидной практической значимости. *Временем переходного процесса* (для системы с асимптотически устойчивым нулевым решением) называется наименьшее время $t(x^0, \varepsilon)$, необходимое для того, чтобы решение с начальным условием $x(0) = x^0$ попало в заданную ε-окрестность начала координат и осталось там при $t > t(x^0, \varepsilon)$.

[15]Это значит указать необходимые и достаточные условия на область, чтобы она была областью асимптотической устойчивости.

Покажем, как можно оценить время переходного процесса, используя идеи из доказательства теорем 1.4.2, 1.4.3. Пусть система (2) удовлетворяет условиям теоремы 1.4.3. Будем считать, что начальное условие x^0 берется столь малыми, что решение не выйдет за пределы шара $B(0, h/2)$ (напомним, что шар $B(0, h)$ является областью знакоопределенности V, $\dot V$). Возьмем параметр $\delta = \delta(\varepsilon)$ из определения устойчивости и обозначим $l = \min\limits_{|x|=\delta} V(x)$. Это значит, что если $|x(t_0)| < \delta$, то $|x(t)| \le \varepsilon$ при $t \ge t_0$. Таким образом, чтобы наше решение навсегда осталось в желаемой ε-окрестности, ему достаточно однажды попасть в δ-окрестность. Для оценки времени однократного попадания в эту δ-окрестность вспомним, что поскольку производная $\dot V$ отрицательно определена, то существует константа $\sigma > 0$ такая, что $\dot V(x) < -\sigma$ в шаровом слое $|x| \in [\delta, h/2]$.

Задача 62. При сделанных предположениях докажите, что

$$t(x^0, \varepsilon) \le \frac{V(x^0) - l}{\sigma}. \tag{52}$$

Порядок времени переходного процесса существенно зависит от того, является ли система линейной или нет.

Пример 5.2.1. Рассмотрим линейную систему (3) с устойчивой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Возьмем положительно определенную квадратичную форму $V = x^* Bx$ с производной

$$\dot V = -x^2 \tag{53}$$

(существование такой квадратичной формы V вытекает из теоремы 2.3). Из курса линейной алгебры известны оценки

$$\lambda_1 |x|^2 \le V(x) \le \lambda_n |x|^2, \tag{54}$$

где λ_1, λ_n суть соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы B. Последние неравенства можно переписать в виде

$$-\frac{V}{\lambda_n} \ge -|x|^2 \ge -\frac{V}{\lambda_1}. \tag{55}$$

Из (53), (55) следует неравенство

$$-\frac{V}{\lambda_1} \le \dot V \le -\frac{V}{\lambda_n}, \tag{56}$$

которое можно записать в виде

$$-\frac{dt}{\lambda_1} \le \frac{dV}{V} \le -\frac{dt}{\lambda_n}. \tag{57}$$

Интегрируя последнее неравенство от 0 до t и обозначая $V_0 = V(x(0)) = V(x^0)$, получим

$$V_0 \exp\bigl(-\frac{t}{\lambda_1}\bigr) \le V \le V_0 \exp\bigl(-\frac{t}{\lambda_n}\bigr). \tag{58}$$

Используя (55), получаем окончательную оценку вдоль решения системы (3):

$$\frac{V_0}{\lambda_n} \exp\bigl(-\frac{t}{\lambda_1}\bigr) \le |x|^2 \le \frac{V_0}{\lambda_1} \exp\bigl(-\frac{t}{\lambda_n}\bigr). \tag{59}$$

Это неравенство служит основой для вычисления времени переходного процесса. В самом деле, разрешая относительно t уравнение $\frac{V_0}{\lambda_1} \exp\bigl(-\frac{t}{\lambda_n}\bigr) = \varepsilon^2$, получим $t = -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{V_0}$. Таким образом, время переходного процесса $t(x^0, \varepsilon)$, т. е. время, необходимое для того, чтобы величина $|x|$ стала и оставалась в дальнейшем меньше ε, удовлетворяет неравенству

$$t(x^0, \varepsilon) \le -\lambda_n \ln \frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{V_0}. \tag{60}$$

Задача 63. По образцу в приведенном только что примере выведите соответствующие (качественные) аналоги оценок (59), (60) для системы из задачи 39 (используя найденную при решении этой задачи функцию Ляпунова $V = x^2 + y^4$ и предполагая, что начальные условия достаточно малы).

Исторические сведения

Ляпунов Александр Михайлович (25.5.1857, Ярославль – 3.11.1918, Одесса), русский математик и механик, академик Петербургской АН (1901; член-корреспондент 1900 г.). В 1880 г. окончил Петербургский университет. С 1885 г. доцент, с 1892 г. профессор Харьковского университета; с 1902 г. работал в Петербургской АН. Ученик Пафнутия Львовича Чебышёва (1821 – 1891), другого великого русского математика и механика. Чебышёв считал, что молодые творчески одаренные люди должны сразу браться за трудные проблемы. Поэтому он поставил перед Ляпуновым в 1880 г. задачу о неэллипсоидальных формах равновесия вращающейся жидкости. Как говорил В. А. Стеклов, "Чебышёв уже тогда усматривал из ряда вон выходящие силы в молодом человеке, если рискнул возложить на его плечи такой непосильный труд". Ляпунов работал над поставленной задачей в течение двух лет, но, как он писал: "После нескольких неудачных попыток я должен был отложить решение вопроса на неопределенное время. Но вопрос этот навел меня на другой, именно на вопрос об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия, который и составил предмет моей магистерской диссертации".

Выполненные за несколько лет работы могли бы составить выдающуюся докторскую диссертацию, но Ляпунов, отличавшийся высокой требовательностью к себе, отказался ее защищать. Отказался он также до получения докторской степени и от звания исполняющего должность экстраординарного профессора, что повышало жалование вдвое.

А. М. Ляпунов вместе с А. Пуанкаре разделил славу создания качественной теории дифференциальных уравнений. В 1892 г. вышел отдельным изданием Харьковского математического общества основополагающий труд А. М. Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения" (современное переиздание см. [8]), составивший впоследствии его докторскую диссертацию. В ней и было введено обсуждаемое в настоящем пособии понятие устойчивости, известное сейчас во всем мире как "устойчивость по Ляпунову", и были доказаны ставшие классическими теоремы Ляпунова об устойчивости.

Поразительно, что Ляпунов не только, как говорится, "заложил основы" новой теории, но сразу удивительно далеко продвинулся в ее глубину, получив в ряде высоконетривиальных "критических" случаев (когда первое приближение не дает ответа) окончательные результаты. В современных несколькосотстраничных монографиях не редкость встретить фразы типа "этот трудный случай был полностью разобран в книге Ляпунова, и мы не будем здесь описывать этот случай из-за его сложности", "наша теорема дает более слабый критерий, чем соответствующая теорема Ляпунова, но зато формулировка нашей теоремы проще" и т. п. В предисловии к изданию [9] в 1963 г. одной (до того времени не опубликованной) рукописи А. М. Ляпунова сказано, что эта работа "до сих пор представляет большой теоретический интерес, так как содержит новые результаты и новые методы исследования. В работе четко сформулированы некоторые вопросы, не решенные автором и остающиеся не выясненными до сих пор". Подумать только, эти слова произнесены через 70 лет после написания рукописи, когда теория устойчивости уже десятки лет была вдоль и поперек исследована множеством сильных математиков!!

Однако научные достижения А. М. Ляпунова не ограничиваются теорией устойчивости. Впоследствии он разрешил задачу, предложенную ему еще в начале его научной деятельности Чебышёвым, и получил множество других фундаментальных результатов по этой теме. Небольшим по объему, но весьма важным для дальнейшего развития науки был цикл работ Ляпунова по некоторым вопросам математической физики. В теории вероятностей Ляпунов предложил новый метод исследования (метод "характеристических функций"), замечательный по своей общности и плодотворности; обобщая исследования П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова (старшего), Ляпунов доказал так называемую центральную предельную теорему теории вероятностей при значительно более общих условиях, чем его предшественники.

Научные заслуги А. М. Ляпунова были признаны всем миром: он состоял почетным членом Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, почетным членом Харьковского математического общества, иностранным членом Академии в Риме, членом-корреспондентом Парижской академии наук.

Летом 1917 г. Ляпунов с тяжело больной туберкулезом женой уехал в Одессу. Как и для большинства российской интеллигенции, революционное лихолетье трагически отразилось на судьбе Ляпунова: находясь в стесненных материальных условиях, академик не мог обеспечить своей больной супруге полноценное питание. А. М. Ляпунов трагически погиб 3 ноября 1918 г., через три дня после смерти жены.

Как отмечал В. А. Стеклов, А. М. Ляпунов представлял собой лучший тип идеалиста 60-х гг. XIX в. Все свои силы он отдавал науке и часто говорил, что без научного творчества жизнь для него ничего не стоит. Многие годы он работал до 4–5 утра, а иногда и ночи напролет, не позволяя себе почти никаких развлечений.

Список литературы

[1] *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

[2] *Годунов С. К., Гордиенко В. М., Демиденко Г. В. и др.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Новосибирск: НГУ, 1986.

[3] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

[4] *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. шк., 1973.

[5] *Краснов М. Л., Киселев А. И, Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высш. шк., 1978.

[6] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[7] *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.

[8] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения: Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. II.

[9] *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1963.

[10] *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

[11] *Самойленко А. М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989.

[12] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1992.

[13] *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.

Коротко прокомментируем эти книги.

Большая часть представленного нами материала содержится в монографиях [1], [7]. Отметим, что [1] является своеобразным справочником по приемам построения функций Ляпунова, а для первого чтения лучше подходит книга иностранных математиков [7]. Подробный разбор "критических случаев", где наиболее ощущается нужда в функциях Ляпунова, проделан в [13].

Учебник [3] является классическим введением в общую теорию устойчивости решений дифференциальных уравнений (органической частью которой является теория функций Ляпунова). Для более глубокого ознакомления с предметом можно посоветовать монографии отечественных ученых [4], [6], [10], адресованные специалистам. Отметим, что в середине XX столетия в России сформировалась сильнейшая в мире математическая школа по развитию идей А. М. Ляпунова, поэтому неудивительно, что именно к этому периоду относятся большинство ценных монографий по предмету.

Значительная часть приводимых в настоящем пособии задач позаимствована из сборников [2], [5], [11]–[12].

Ответы и указания

1. Все жордановы клетки, соответствующие собственным числам с нулевой действительной частью, должны иметь единичный размер. **2.** При четных m неустойчивость. При нечетных m устойчивость при $a < 0$ и неустойчивость при $a > 0$. **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** 1) положительно определенная; 2) знакоположительная; 3) положительно определенная; 4) знакопеременная; 5) знакоотрицательная; 6) отрицательно определенная. **5.** Устойчиво; асимптотически устойчиво, если $\operatorname{grad} V \neq 0$ в проколотой окрестности начала координат. **6.** *Указание.* В качестве $\delta(\varepsilon)$ из определения устойчивости можно при $\varepsilon \in (0, h/2]$ взять $\delta(\varepsilon) = \min\{|x| : V(x) = C_\varepsilon\}$, где $C_\varepsilon = \min\{V(x) : |x| = \varepsilon\}$. Тогда при $\varepsilon > h/2$ можно доопределить $\delta(\varepsilon) = \delta(h/2)$, а также положить $\Delta = \delta(h/2)$. **7.** *Указание.* Нужно воспользоваться уже установленной теоремой 1.4.2 и доказывать (от противного), что для всякого решения $x(t)$ системы (2) с начальным условием $|x(0)| < \delta(h/2)$ справедливо предельное равенство $\lim\limits_{t \to 0} V(x(t)) = 0$. См. также указание к следующей задаче. **8.** *Указание.* Нужно воспользоваться следующим фактом, вытекающим из отрицательной определенности $\dot V$: для любых чисел r, R, таких, что $0 < r < R < h$, существует $\sigma > 0$ такое, что $\dot V(x) < -\sigma$ при $|x| \in [r, R]$. **9.** *Указание.* Нужно доказывать от противного. При этом, используя невозрастание функции V на траекториях, нужно сначала установить, что существует последовательность чисел $c_\nu > 0$ таких, что $V(x) \equiv c_\nu$ при $|x| = r_\nu$. Затем, снова обыгрывая указанную монотонность и учитывая непрерывность V, нужно доказать, что $c_{\nu+1} \geq c_\nu$. Отсюда легко получить противоречие с условием $V(0) = 0$. **10.** *Указание.* Воспользуйтесь указанием к задаче 8. **11.** *Указание.* Надо ввести в рассмотрение новую функцию $V_1(x) = e^{-\lambda t} V(x)$ и доказать, что $\dot V_1 = e^{-\lambda t} W(x) \leq 0$. **12.** $h = 1$, Ω_1 есть пересечение круга $B(0,1)$ с первым квадрантом $\{x > 0, y > 0\}$. **13.** *Указание.* При выполнении условий теорем 1.5.1 или 1.5.2 в качестве открытого множество Ω_1 надо брать множество $\{x \in B(0,h) : V(x) < 0\}$. **14.** *Указание.* Для проверки неустойчивости достаточно доказать, что если $x(0) \in \Omega_1$, то $|x(T)| \geq h/2$ при некотором $T \geq 0$. Предполагая противное, из условий теоремы нужно вывести, что $\exists \sigma_1 > 0 \ \operatorname{dist}(x(t), \partial\Omega_1) \geq \sigma_1$ при всех $t \geq 0$. Отсюда, в свою очередь, выводится, что $\exists \sigma > 0 \ \dot V(x(t)) \leq -\sigma$ при всех $t \geq 0$, и уже легко получить противоречие. **15.** *Указание.* В качестве Ω_1 возьмите открытое множество, состоящее из точек шара $B(0,h)$ малого радиуса, в которых одновременно выполнены оба неравенства $p \cdot q > 0$, $H(p,q) < 0$. **16.** *Указание.* В качестве соответствующего собственного вектора оператора F нужно взять симметричную $n \times n$-матрицу $B = x^k(x^l)^* + x^l(x^k)^*$, где x^k, x^l суть собственные вектора матрицы A^*, соответствующие собственным числам λ_k, λ_l, т. е. $A^*x^k = \lambda_k x^k$, $A^*x^l = \lambda_l x^l$. При этом надо проверить, что $B \neq 0$. Предположив противное, т. е. что $x^k(x^l)^* = -x^l(x^k)^*$, нужно вывести, что тогда векторы x^k, x^l должны быть пропорциональны, т. е. $x^k = \alpha x^l$, а отсюда уже легко получить противоречие. **17.** *Указание.* При указанном условии общее количество различных величин вида $\lambda_k + \lambda_l$ равно $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Каждая из этих величин является собственным числом оператора $F : \mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n) \to \mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n)$ (это доказано в предыдущей задаче). С другой стороны, количество собственных чисел оператора F не превосходит размерности пространства $\mathrm{Sim}(\mathbb{C}, n)$, которая также равна N. **18.** *Указание.* Осталось разобраться с ситуацией, когда среди величин $\lambda_k + \lambda_l$ есть одинаковые. В этому случае нужно чуть-чуть изменить матрицу A так, чтобы все эти величины, изменившись сколь угодно мало, снова стали различными. Тогда можно применить предыдущую задачу. Совершая предельный переход, получаем, что все собственные числа оператора F исчерпываются величинами указанного вида. **19.** *Указание.* Существование и единственность V следует из теоремы 2.2 и определения устойчивой матрицы (см. п. 1.2). Осталось доказать положительную определенность V. Предположим сначала, что $V(x) < 0$ в какой-нибудь точке $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда с учетом однородности функции V получаем, что V принимает отрицательные значения в любой окрестности начала координат. Тогда по теореме 1.5.1 нулевое решение неустойчиво — получили искомое противоречие с теоремой 1.2.1. Если же предположить, что $V(x) = 0$ при некотором $x \neq 0$, то этот случай сводится к только что разобранному использованием отрицательной определенности $\dot{V}$. **20.** *Указание.* Существование и единственность V следует из теоремы 2.2. Осталось доказать, что V принимает отрицательные значения. Предположим сначала, что $V(x) > 0$ при всех $x \neq 0$. Тогда по теореме 1.4.3 нулевое решение устойчиво — получили искомое противоречие с теоремой 1.2.2. Если же предположить, что $V(x) = 0$ при некотором $x \neq 0$, то в силу отрицательной определенности $\dot{V}$ на проходящей через x траектории найдется точка y, в которой $V(y) < 0$, что согласуется с утверждением доказываемой теоремы. **21.** *Указание.* Из условий задачи вытекает существование вектора $x \neq 0$ такого, что $Ax = 0$. Используя формулу (11), покажите, что $\dot{V}(x) = 0$. **22.** *Указание.* Рассмотрим систему д.у. с модифицированной матрицей $\frac{dx}{d\tau} = (A - \frac{\lambda}{2}E)x$. Подбирая положительный параметр λ достаточно малым, можно добиться, чтобы матрица $(A - \frac{\lambda}{2}E)$ по-прежнему была неустойчивой, и чтобы $\rho_k + \rho_l \neq 0$ ни для каких $k, l = 1, \ldots, n$,

где $\rho_i = \lambda_i - \frac{\lambda}{2}$ — собственные числа модифицированной матрицы. Тогда по теореме 2.4 существует квадратичная форма V, принимающая отрицательные значения, и такая, что $\frac{dV}{d\tau} = W$, где символом $\frac{dV}{d\tau}$ мы обозначили производную по времени в силу модифицированной системы, т. е. $\frac{dV}{d\tau}(x) = \operatorname{grad} V \cdot (A - \frac{\lambda}{2}E)x$. Осталось проверить равенство $\frac{dV}{d\tau} = \frac{dV}{dt} - \lambda V$ (при проверке последнего равенства нужно использовать тождество Эйлера для однородных функций: $\operatorname{grad} V \cdot x = 2V$ для всех вектор-столбцов $x \in \mathbb{R}^n$). **23.** *Указание.* Обозначим $A = f'(0)$. Допустим, что матрица A устойчива. Тогда положим $W(x) = -|x|^2$ и возьмем квадратичную функцию Ляпунова V, существование которой утверждается в теореме 2.3. По определению дифференцируемости $f(x) = Ax + \gamma(x)|x|$, где $\gamma(x) \to 0$ при $x \to 0$. Отсюда выведите, что V удовлетворяет условиям теоремы 1.4.3 при достаточно малом h. Если же матрица A неустойчива, то нужно действовать по той же схеме, используя теоремы 2.5 и 1.5.2. **25.** *Указание.* В условиях предыдущей задачи $W(x(t)) = -|x(t)|^2 = -|\Phi(t)x(0)|^2$. **26.** $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
27. $\alpha \neq 0$; $\alpha < 0$. **28.** $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} \frac{(i+j-2k)!}{(i-k)!(j-k)!(2\alpha)^{i+j+1-2k}}$. **29.** $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} \frac{(i+j-2k)!\beta^{i+j-2k}}{(i-k)!(j-k)!(2\alpha)^{i+j+1-2k}}$. **30.** $b_{ii} = \frac{1}{2\alpha}(1 + \beta b_{(i-1)i} + \beta b_{i(i-1)})$; $b_{ij} = \frac{\beta}{2\alpha}(b_{(i-1)j} + b_{i(j-1)})$ при $i \neq j$. **31.** $(2k\pi, 0)$ — нейтрально устойчивые, $V = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$; $(\pi + 2k\pi, 0)$ — неустойчивые по первому приближению. **32.** Устойчиво, $V = \frac{1}{2}y^2 + \int\limits_0^x g(\xi)\,d\xi$. **33.** Устойчиво, $V = \frac{1}{2}y^2 + \int\limits_0^x g(\xi)\,d\xi$. **34.** Устойчиво, $V = \frac{1}{2}y^2 + \int\limits_0^x f(\xi, 0)\,d\xi$. **35.** $\mu_i(y)y > 0$, $f_i(x)x > 0$, $\varphi_{ik}(x)x > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$. **36.** Асимптотически устойчиво, $V = 2x^2 + 3y^2$. **37.** Нейтральная устойчивость, $V = x^4 + y^4$. **38.** Неустойчиво, $V = y^2 - x^2$. *Указание.* Используйте теорему 1.5.3 с множеством $\Omega_1 = \{(x,y) : V(x,y) < 0\}$. **39.** Асимптотически устойчиво, $V = x^2 + y^4$. *Указание.* Можно отбрасывать величины высоких порядков, не влияющие на положительную определенность $\dot{V}$ при малых x, y. **40.** Неустойчиво, $V = y^4 - x^4$. **41.** Асимптотически устойчиво, $V = \int\limits_0^x f_3(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^y f_2(\xi)\,d\xi$. **42.** Неустойчиво, $V = x^2 - y^2$. **43.** *Указание.* Для проверки, что отрицательные слагаемые в $\dot{V}$ по норме превосходят положительные, воспользуйтесь следствием из неравенства Коши – Буняковского: $2|z||y|^k \leq$

$\varepsilon^2|z|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|y|^{2k}$ для любого $\varepsilon > 0$. **45.** *Указание.* Используйте теорему 1.5.1 и неравенство Коши – Буняковского $2|x|y^2 \le x^2+y^4$. **46.** Асимптотически устойчиво, $V = (y + 2x)^2 + (y - 3x)^2$. **47.** Асимптотически устойчиво, $V = (x - 2y)^2 + (y + x)^2$. **48.** *Указание.* Воспользуйтесь указанием к задаче 43. **49.** $V = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4$. **50.** Асимптотически устойчиво, $V = x^2+(y-x)^2-x^4+(y-x)^4$. *Указание.* Сделать замену $z = x+(x-y)i$. **51.** Асимптотически устойчиво, $V = x^2 + y^2 - \frac{43}{4}x^3y - \frac{29}{4}xy^3$. *Указание.* Сделать замену $z = x + iy$, тогда $w = z + \frac{i}{32}(18z^3 - 54z\bar{z}^2 - 7\bar{z}^3)$, $V = |w|^2 + O(w^5)$. **53.** *Указание.* Воспользуйтесь теоремой о том, что решения дифференциального уравнения на заданном конечном временном интервале непрерывно зависят от начальных данных. **55.** $\mathcal{D}_A \supset \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ есть область, ограниченная линиями $y = \pm\sqrt{8 - 6x^2 - 2x^3}$. *Указание.* Докажите, что множество $\{(x, y) : \dot{V}(x, y) = 0\}$ содержит ровно две траектории (обе одноточечные): начало координат и точку $(-2, 0)$. В качестве $\mathcal{D}$ из условий теоремы 5.1.1 теперь можно взять область $\{(x, y) : V(x, y) < l\}$, где $l = V(-2, 0) = 4$. **56.** *Указание.* Зафиксируйте произвольно $l > 0$, возьмите круг $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2+y^2 < l\}$ и докажите по теореме 5.1.1, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_A$. **60.** *Указание.* Докажите, что угловой коэффициент наклона кривой асимптотически эквивалентен величине $-\frac{2}{x^3}$, а угловой коэффициент наклона траекторий (в точках кривой) имеет асимптотику $-\frac{1}{2x^3}$. **61.** *Указание.* Используйте неравенства $\dot{V} \le 0$ и оценки $\frac{d}{dt}[y+F(x)]^2 = -2a|g(x)| < 0$ на границе $\partial\mathcal{D}$ при $[y+F(x)]^2 = a^2$. **62.** *Указание.* Выведите оценку $v(x^0) - v(t) \ge \sigma t$, если решение до момента времени t ни разу не попало в δ-окрестность. **63.** Обозначим $z = (x, y)$, тогда найдутся постоянные C_1,C_2,$h > 0$, такие, что при $|z^0| < h$ справедливы неравенства $\frac{C_1\sqrt{V_0}}{1+t\sqrt{V_0}} \le |z|^2 \le \left(\frac{C_2V_0^2}{1+tV_0^2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\frac{C_1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\sqrt{V_0}} \le t(z^0, \varepsilon) \le \frac{C_2}{\varepsilon^8} - \frac{1}{V_0^2}$.

Оглавление