Алгебра матриц

О. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел.

Матрица размера $m \times n$ (m строк, n столбцов):

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

a_{ij} — элементы матрицы, i — номер строки, j — номер столбца.

Две матрицы *одинакового размера* (с одинаковым количеством строк и столбцов) можно складывать и вычитать поэлементно. Любую матрицу можно умножить на число — тоже поэлементно.

Задача 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Вычислить $A + B$, $A - B$, $3A$.

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 0 & 2 + 1 \\ 0 + 0{,}5 & 1 - 0{,}5 \\ -3 - 1 & 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 & 2 - 1 \\ 0 - 0{,}5 & 1 - (-0{,}5) \\ -3 - (-1) & 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -0{,}5 & 1{,}5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$.

Любую матрицу можно транспонировать. При этом её столбцы записываются как строки (не меняя их порядка), а строки — как столбцы. Обозначение: A^T.

Задача 2. Вычислить A^T, где A — матрица из предыдущей задачи.

Ответ: $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

О. Матрица, состоящая из одной строки, называется матрицей-строкой:

$(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$ — матрица размера $1 \times n$.

О. Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом:

$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ — матрица размера $n \times 1$.

О. *Произведением строки* $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$ *на столбец* $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ называется *число* $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{s1}$. При этом строка и столбец обязательно должны содержать одинаковое количество элементов! Обозначение: AB.

Задача 3. Пусть $A = (2 \quad -3 \quad 0)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вычислить AB.

$AB = (2 \quad -3 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 8 - 9 = -1.$

Ответ: -1.

О. Пусть $A = (a_{ij})_{m \times k}$, $B = (b_{ij})_{k \times n}$ (количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы). Матрица C называется *произведением матрицы* A *на матрицу* B (обозначение: $C = AB$), если $C = (c_{ij})_{m \times n}$ и

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{ik}b_{kj} \quad \forall i, j,$$

т.е. элемент c_{ij} является произведением i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Задача 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Определены ли произведения AB и BA? Если да, то вычислить их.

Матрица A имеет размер 3×2, матрица B имеет размер 2×2, поэтому AB определено, а BA — нет. При этом AB является матрицей размера 3×2:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, BA не определено.

Задача 5. Определено ли произведение BA, где A и B — строка и столбец из задачи 3? Если да, то вычислить его.

Матрица B имеет размер 3×1, матрица A имеет размер 1×3, поэтому произведение BA определено и является матрицей размера 3×3:

$$BA = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-3) & 4 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $BA = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Как мы убедились, для матриц, вообще говоря, $AB \neq BA$. Если же $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B коммутируют.

Задача 6. Коммутируют ли матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

б) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

Решение.

а) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$.
$AB \neq BA$, поэтому матрицы A и B не коммутируют.

б) $CD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $DC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
$CD = DC$, поэтому матрицы C и D коммутируют.

Ответ: A и B не коммутируют, C и D коммутируют.

Определители *n*-го порядка

О. *Квадратной матрицей порядка n* называется матрица размера $n \times n$.

Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие число — её определитель $\det A$. Определители второго и третьего порядка мы вычисляли на семинаре 6. Определители более высокого порядка вычисляются двумя способами: с помощью разложения по строке или столбцу и методом Гаусса.

Если $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то справедливы следующие формулы:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}$$ — разложение определителя по j-му столбцу,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} M_{ij}$$ — разложение определителя по i-й строке,

где M_{ij} — минор, т.е. определитель, который получается из $\det A$ вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Особенно удобно раскладывать определитель по такому столбцу (или строке), в котором много нулевых элементов, потому что в этом случае в разложении будет менее n слагаемых, отличных от нуля.

Задача 7. Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Удобно разложить определитель по первой, третьей или четвёртой строке или по первому, третьему или четвёртому столбцу, поскольку в них есть два нулевых элемента. Например, разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot$$

$$\cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (8 - 2 - 2) + (-4) = 4.$$

Ответ: 4.

Метод Гаусса вычисления определителя основан на следующих его свойствах.

1) Перестановка двух строк (столбцов) определителя эквивалентна умножению определителя на (-1).
2) Умножение всех элементов некоторой строки (столбца) определителя на число λ эквивалентно умножению определителя на число λ.
3) Определитель не изменится, если к некоторой его строке (столбцу) прибавить другую его строку (столбец), умноженную на число λ.
4) Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов её главной диагонали, т.е.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Таким образом, для вычисления определителя его необходимо привести к треугольному виду с помощью свойств 1), 2), 3).

Задача 8. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Сперва нужно добиться того, чтобы тот элемент первого столбца, который лежит на главной диагонали, был равен 1. Здесь это уже выполнено, поэтому переходим к следующему шагу.

Занулим все элементы первого столбца, лежащие ниже главной диагонали. Для этого вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 2, а из четвёртой строки — первую строку, умноженную на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{vmatrix}.$$

Теперь добьёмся того, чтобы элемент второго столбца, лежащий на главной диагонали, был равен 1. Для этого поменяем местами вторую и третью строки. При этом определитель умножится на (-1). Заодно вынесем общий множитель 4 элементов четвёртой строки за определитель:

$$\Delta = (-1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теперь занулим все элементы второго столбца, лежащие ниже главной диагонали. Для этого прибавим к третьей строке вторую строку, умноженную на 3, а к четвёртой строке — просто вторую строку:

$$\Delta = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получился треугольный определитель, который равен произведению элементов главной диагонали, поэтому

$$\Delta = -4 \cdot 2 = -8.$$

Ответ: -8.

ДЗ 29. Задачи для самостоятельного решения из ЛАВЗ: гл. I №3, 5(б,г,д).

Вычислить определитель двумя способами — с помощью разложения по столбцу или строке и методом Гаусса:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 9 & -2 & -7 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Читать теорию и отвечать на контрольные вопросы: ЛАВЗ гл. I §2.