Простейшие ОДУ

Изучение дифференциальных уравнений мы начнём с обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):
$F\big(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\big) = 0$ — ОДУ n-го порядка.
Здесь $y = y(x)$ — неизвестная n раз дифференцируемая вещественная функция вещественной независимой переменной x, F — известная функция, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, …
Кроме ОДУ мы будем также изучать уравнения в частных производных (УрЧП) — в конце семестра.
Сегодня мы рассмотрим ОДУ 1-го порядка:
$F(x, y, y') = 0.$
Если отсюда можно выразить $y' = \frac{dy}{dx}$ в явном виде, то получится
$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ — ОДУ 1-го порядка, разрешённое относительно производной.
Решить дифференциальное уравнение означает найти все функции $y = y(x)$, обращающие уравнение в тождество (в более общем смысле — найти все кривые на плоскости Oxy, вдоль которых ДУ обращается в тождество — *интегральные кривые*).
Иногда не удаётся найти $y(x)$ в явном виде, а только в неявном:
$\varphi(x, y) = 0$, где φ — некоторая известная функция.
Иногда удобно считать y независимой переменной, а $x = x(y)$ — функцией (обратной по отношению к $y(x)$), и решать уравнение относительно $x(y)$:
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}.$
Иногда ОДУ 1-го порядка записывают в дифференциалах; например, уравнение
$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ можно записать в виде
$dy - f(x, y)\,dx = 0.$

ОДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

Это уравнение, которое можно записать в дифференциалах в виде:
$\boxed{f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy.}$
Левая часть зависит только от x, правая — только от y. Тогда в левой части стоит дифференциал от первообразной функции $f_1(x)$, в правой части — дифференциал от первообразной функции $f_2(y)$:
$d\big(\int f_1(x)\,dx\big) = d\big(\int f_2(y)\,dy\big).$
Здесь неопределёнными интегралами обозначены соответствующие первообразные.
Из равенства (тождественного) дифференциалов следует, что и сами первообразные равны друг другу с точностью до произвольной аддитивной константы:
$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$
Таким образом, уравнение с разделяющимися переменными можно проинтегрировать.
Чтобы решить произвольное ОДУ 1-го порядка, его надо тем или иным способом свести к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}$.

Уравнение имеет смысл при $x \neq 0$. Разделим переменные, умножив уравнение на dx и поделив на y:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}. \qquad (1)$$

При этом, поделив на y, мы могли потерять возможное решение $y = 0$. Подставив эту функцию в исходное уравнение, убеждаемся, что она действительно является решением. Запомним, что

$\boxed{y = 0}$ — одно из решений.

Теперь интегрируем уравнение (1):

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2\frac{dx}{x} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C_1.$$

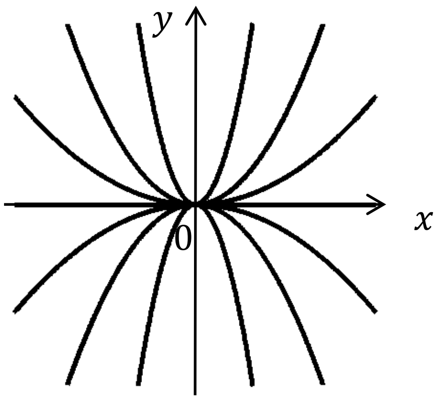
$$|y| = e^{2\ln|x| + C_1} = e^{C_1}e^{2\ln|x|} = e^{C_1}|x|^2 = e^{C_1}x^2.$$

$$y = \pm e^{C_1}x^2.$$

Обозначим $C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0$. Тогда

$\boxed{y = C_2x^2, \qquad C_2 \neq 0.}$

Заметим, что выписанное выше решение $y = 0$ можно объединить с этим, включив значение $C_2 = 0$.



Ответ: $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$.

Через каждую точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 \neq 0$, проходит единственная интегральная кривая (график решения ОДУ). При $x = 0$ дифференциальное уравнение не имеет смысл. Функции вида $y = Cx^2$ являются решениями уравнения в областях $x < 0$ и $x > 0$. Единственное решение можно выделить заданием дополнительного условия вида $y(x_0) = y_0$ (условие Коши), из которого определяется значение константы C.

Заметим, что общее решение (ОР) ОДУ 1-го порядка есть однопараметрическое семейство интегральных кривых, т. е. зависит от одной произвольной константы.

Пример 2. Решить уравнение $y\ln y\, dx = x\, dy$.

Уравнение имеет смысл при $y > 0$ (мы будем пока рассматривать только вещественные функции). Чтобы разделить переменные, поделим его на $xy\ln y$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y\ln y}.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\ln y}{\ln y}. \qquad (2)$$

При этом мы могли потерять возможные решения: $x = 0$, $\ln y = 0$. Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, убеждаемся, что, в самом деле,

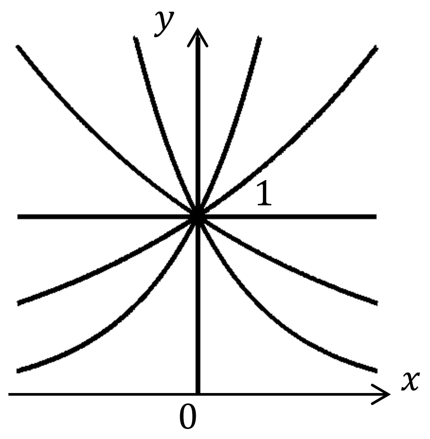
$\boxed{x = 0,}$ $\boxed{y = 1}$ — решения.

Далее, интегрируем уравнение (2):

$$\ln|x| = \ln|\ln y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$|x| = e^{C_1}|\ln y|.$$

$$x = \pm e^{C_1}\ln y.$$



Обозначим $C_2 = \pm e^{C_1}$, $C_2 \neq 0$.

$\boxed{x = C_2 \ln y, \qquad C_2 \neq 0.}$

Мы нашли x как функцию от y. Нетрудно также отсюда выразить y как функцию от x (получится $y = e^{\frac{x}{C_2}}$).

Объединяя все найденные решения, получим

Ответ: $x = C \ln y$, $C \in \mathbb{R}$; $y = 1$.

Через каждую точку $(x_0; y_0)$, где $y_0 > 0$, кроме точки $(0;\ 1)$, проходит единственная интегральная кривая.

Уравнение вида

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),}$$

где a, b, c — константы, $b \neq 0$, сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены неизвестной функции:

$z(x) = ax + by(x) + c.$

Тогда

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} = a + bf(z),$$

и для новой функции $z(x)$ имеем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Однородное ОДУ 1-го порядка

Это уравнение, которое можно записать в виде

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

или в виде $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, где $P(kx, ky) \equiv k^\alpha P(x, y)$, $Q(kx, ky) \equiv k^\alpha Q(x, y)$, т. е. $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — *однородные* функции одной и той же степени.

Оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если сделать замену

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Пример 3. Решить уравнение $(x^2 + xy + y^2)\,dx = x^2\,dy$.

Уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

т. е. оно однородное. При этом при делении на x^2 и dx мы могли потерять решения $x = 0$ и $dx = 0$, т. е. $x = \mathrm{const}$. Подставив $x = \mathrm{const}$ в исходное уравнение, мы видим, что левая часть тождественно равна нулю, а правая часть будет тождественно равна нулю, только если $\mathrm{const} = 0$. Таки образом, исходное уравнение имеет решение $\boxed{x = 0.}$

Чтобы решить однородное уравнение, делаем замену

$$z(x) = \frac{y(x)}{x},$$

т. е. $y(x) = xz(x)$. Тогда
$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$
Подставив это в уравнение (3), получим
$$z + x\frac{dz}{dx} = 1 + z + z^2,$$
т. е.
$$x\frac{dz}{dx} = 1 + z^2,$$
а это уравнение с разделяющимися переменными. Дома доделать.

Обобщённо-однородное ОДУ 1-го порядка: такое, которое приводится к однородному с помощью замены типа $y(x) = z^m(x)$ или $z(x) = y^k(x)$.

Пример 4 (Филиппов № 155). Решить уравнение $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$.
Заметим, что уравнение можно записать в виде
$$\frac{x\,d(y^2)}{2} = (y^2 + x)\,dx,$$
поэтому можно сделать замену $y^2(x) = z(x)$ (или $y = \pm\sqrt{z}$). Тогда уравнение принимает вид
$$\frac{x\,dz}{2} = (z + x)\,dx,$$
$\frac{dz}{dx} = 2\frac{z}{x} + 2 = f\left(\frac{z}{x}\right)$ — однородное уравнение.
Поделив на x и dx, мы могли потерять решение вида $x = \mathrm{const}$, для которого $dx = 0$. Действительно,
$\boxed{x = 0}$ — решение исходного уравнения.
Остаётся решить полученное однородное уравнение. Дома доделать.

К однородному уравнению или к уравнению с разделяющимися переменными сводится уравнение вида
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),} \tag{4}$$
где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, $c_2 = \mathrm{const}$.
Рассмотрим две прямых на плоскости:
l_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$,
l_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Возможны два случая.

1) $l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.
   Тогда с помощью замены $z(x) = a_1x + b_1y(x)$ или $z(x) = a_2x + b_2y(x)$ получим уравнение с разделяющимися переменными.
2) $l_1 \nparallel l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.
   Пусть $(x_0;\ y_0)$ — точка пересечения прямых l_1 и l_2. Тогда замена
   $$\begin{cases} x = x_0 + \xi, \\ y = y_0 + \eta, \end{cases}$$
   где $\eta = \eta(\xi)$ — новая неизвестная функция, приводит к однородному уравнению.

Пример 5 (дополнительный). Решить уравнение $(x-2y+5)\,dx+(2x-y+4)\,dy=0$.
Это уравнение вида (4). Рассмотрим прямые
l_1: $x-2y+5=0$,
l_2: $2x-y+4=0$.
Они не параллельны. Точка их пересечения $(x_0;\ y_0)$ находится из системы
$$\begin{cases} x_0-2y_0+5=0, \\ 2x_0-y_0+4=0. \end{cases}$$
Тогда $x_0=-1$, $y_0=2$. Делаем замену
$$\begin{cases} x=-1+\xi, \\ y=2+\eta, \end{cases}$$
откуда
$$\begin{cases} \xi=x+1, \\ \eta=y-2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} dx=d\xi, \\ dy=d\eta. \end{cases}$$
Подставив x, y, dx, dy в исходное уравнение, получим
$(\xi-2\eta)\,d\xi+(2\xi-\eta)\,d\eta=0$.
Отсюда
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi-2\eta}{\eta-2\xi}=\frac{1-2\frac{\eta}{\xi}}{\frac{\eta}{\xi}-2}=f\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$
— однородное уравнение. При делении на $d\xi$ и $\eta-2\xi$ решения не теряются, т. к. функции $\xi=\text{const}$ и $\eta=2\xi$ не являются решениями ДУ.
Остаётся решить однородное уравнение. Дома доделать.

Линейные ОДУ 1-го порядка

$$\boxed{y'+P(x)y=Q(x).} \qquad (5)$$
Сначала решим соответствующее *линейное однородное* уравнение (ЛОДУ; не путать с однородным уравнением вида $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ — неудачная терминология) — с нулевой правой частью:
$$\bar{y}'+P(x)\bar{y}=0. \qquad (6)$$
Это уравнение с разделяющимися переменными. Его ОР
$\bar{y}=C\exp\left(-\int P(x)\,dx\right),\qquad C\in\mathbb{R}$,
где $\int P(x)\,dx$ — некоторая первообразная функции $P(x)$.
Теперь решим *линейное неоднородное* уравнение (ЛНДУ) (5).
I способ (метод вариации постоянной). Ищем решение уравнения (5) в виде
$$y=C(x)\exp\left(-\int P(x)\,dx\right), \qquad (7)$$
т. е. берём ОР линейного однородного уравнения и заменяем в нём константу C на неизвестную функцию $C(x)$. Подставив выражение (7) в уравнение (5), получим для определения функции $C(x)$ уравнение с разделяющимися переменными.
II способ. Если удаётся подобрать одно из решений линейного неоднородного уравнения $\bar{\bar{y}}$, то ОР линейного неоднородного уравнения (5) имеет вид
$y=\bar{y}+\bar{\bar{y}}$,
где $\bar{y}$ — ОР линейного однородного уравнения (6), а $\bar{\bar{y}}$ — *частное* решение (ЧР) линейного неоднородного уравнения (5).

Решение задачи Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{8}$$

существует, единственно, и его можно записать в виде

$$y(x) = y_0 K(x, x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} K(x, s) Q(s)\, ds, \tag{9}$$

где $K(x, s)$ — *функция Коши,* которая зависит от s как от параметра и удовлетворяет по x линейному однородному уравнению с дополнительным условием:

$$\begin{cases} K_x{}'(x, s) + P(x)K(x, s) = 0, \\ K(x, s)|_{x=s} = 1. \end{cases}$$

Формула (9) позволяет, один раз построив функцию Коши, получать решения задачи Коши (8) для любой правой части $Q(x)$ и любого начального значения y_0.

Пример 6. Решить уравнение $(1 - x^2)y' + 2xy = (1 - x^2)^2$.
Запишем его в виде

$$y' + \frac{2x}{1 - x^2} y = 1 - x^2 \tag{10}$$

(функции $x = \pm 1$ не являются решениями). Это линейное неоднородное уравнение. Сначала находим ОР соответствующего линейного однородного уравнения:

$$\bar{y}' + \frac{2x}{1 - x^2} \bar{y} = 0. \tag{11}$$

$$\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = \frac{2x}{x^2 - 1} dx.$$

(Потеряно решение $\boxed{\bar{y} = 0.}$)

$$\ln|\bar{y}| = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx + C_1 = \int \frac{d(x^2 - 1)}{x^2 - 1} + C_1 = \ln|x^2 - 1| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$|\bar{y}| = e^{C_1}|x^2 - 1|.$$

$$\bar{y} = \pm e^{C_1}(x^2 - 1).$$

$$\boxed{\bar{y} = C_2(x^2 - 1), \qquad C_2 = \pm e^{C_1} \neq 0.}$$

ОР линейного однородного уравнения (11):

$$\boxed{\bar{y} = C(x^2 - 1), \qquad C \in \mathbb{R}.}$$

ОР линейного неоднородного уравнения (10) ищем методом вариации постоянной в виде
$y = C(x)(x^2 - 1)$.
Подставив это выражение в уравнение (10), получим

$$(x^2 - 1)C'(x) + 2xC(x) - 2xC(x) = 1 - x^2.$$

$$C' = -1.$$

$$C(x) = -x + C_0, \qquad C_0 \in \mathbb{R}.$$

Значит, ОР линейного неоднородного уравнения (10):

$$\boxed{y = (C_0 - x)(x^2 - 1), \qquad C_0 \in \mathbb{R}.}$$

Заметим, что его можно записать в виде

$$y = \underbrace{C_0(x^2 - 1)}_{\substack{\text{ОР линейного} \\ \text{однородного уравнения}}} + \underbrace{x(1 - x^2)}_{\substack{\text{ЧР линейного} \\ \text{неоднородного уравнения}}}.$$

Ответ: $y = (C - x)(x^2 - 1),\ C \in \mathbb{R}$.

Пример 7. Решить уравнение $(x - y^2)y' = 1$.
ДУ не является линейным. Но оно станет таковым, если искать вместо функции $y(x)$ обратную к ней функцию $x(y)$. В самом деле,
$(x - y^2)y' = 1 \iff (x - y^2)\frac{dy}{dx} = 1 \iff \frac{dx}{dy} = x - y^2 \iff \frac{dx}{dy} - x = -y^2$ — линейное уравнение относительно функции $x(y)$.
При этом, когда мы делили на dy, могли быть потеряны решения вида $y = \mathrm{const}$, но таких решений исходное уравнение не имеет.
Остаётся решить линейное уравнение. Дома доделать.

ДЗ 1. Филиппов № 53, 62, 102, 105, 113, 115, 138, 145, 146, 161.